

안녕하세요. 일반청의미 이원엽입니다.

지금은 실습에 피폐한 삶을 살고 있습니다.. ㅎㅎ

여러 요청이 들어와서.. 9평 이후의 공부에 있어 여러분께 도움이 될 조언이 있을까 고민해봤습니다.

결국, 제가 알려드릴 것은 제 스스로 어떻게 수능공부를 마무리했는지에 관한 것뿐이라고요.

저는 개념의 중요성을 인식한 때가 삼수 6월부터였어요.

개념을 다시 처음부터 정리하고 기출을 다시 풀기를 끝낼 때는 9월 이맘때였습니다.

그렇다면 9월 이후부터 수능까지는 과연 어떤 공부를 해야 수능에서 1등급 내지는 100점을 받을 수 있을까요?

다시 말해, 어떻게 수능에서 고득점을 받을 수 있을까요?

사실 답은 간단합니다.

“교과 내의 범위의 개념과 그 쓰임을 모두 알고, 그 지식을 활용해 문제를 정확하게 풀어낼 수 있다. “
면 됩니다.

매우 뻔 한 말이니까 좀 더 와 닿게 번역해볼까요?

“그동안 배운 개념을 이해했다면, 써봤다면,
그리고 계속 연습했다면, 확신을 가지면 된다.”

입니다.

저의 재수 때의 수능에서는 어떤 문제를 검토할지 알 수가 없었습니다. 모든 문제가 다 헛갈렸습니다.

21,29,30번의 문제를 풀지도, 검토를 제대로 하지도 못한 채 수능이 끝나버립니다.

(사실 이 때는, 제가 그렇게도 고생을 해놓고는 아무것도 변하지 않았다는 사실이 슬프더군요.

아마 수학시간에 눈물이 났었던 것으로 기억합니다.

뭐 그때부터 폐인생활 시작하고, 뭐 라면만 하루에 몇 개씩 먹고 난리도 아니었던 건 예전에도 말씀드렸습니다.)

삼수 때의 수능에서는 약간 달랐지요.

저는 수능 수학시험 60분 짜에서 확신을 가졌었습니다.

내가 검토한 29문제는 무조건 맞다는 확신이었습니다.

분명, 교과서 개념으로 명백하게 해석했고, 계산에 이상한 것은 단언컨대 하나도 없었습니다.

굳이 찜찜했던 것은, 29번 문제였지요.

29번 문제 하나만 계속 검토합니다. 다른 문제는 검토할 필요도 없이 확실했으니까요.

제 29번 풀이에는 틀린 부분이 2개 있었습니다.

논리적으로 틀린 부분과, 원의 넓이를 $2\pi r$ 로 계산한 것.

특히 넓이를 $2\pi r$ 로 계산한 실수는 수능 1분전에 고쳐요. 그 때, 수능 시험장에서 수학 100점을 확신했습니다.

과연 29문제 중 하나라도 다시 검토했다면 어땠을까요?

단언컨대,

[적어도 풀고 검토를 한번 했을 때, 맞았다는 확신을 가진 문제가 2/3 이상이어야 100점을 노릴 수 있습니다.]

그렇지 않으면 반드시 검토와 문제풀이의 갈등이 생겨요.

시험이 자신이 계획한 대로 흘러가지 않게 됩니다.

이제, 제가 수능 때 했던 것을 알려드리겠습니다.

1. 무료 실전모의고사를 비롯해서 많은 실모를 푼다.
2. 다시 한 번 모자란 개념을 복습합니다.
3. 그동안 공부한 기출문제를 복습합니다.

이건 여러분도 하시는 것입니다.

다만 관점의 차이일 것 같습니다.

제가 위의 것을 할 때 제가 스스로 물어본 것은

1. 어렵고 긴 풀이의 문제에서도 개념을 적용하고 그 뜻을 기억하면서 문제를 풀 수 있을까?

2. 진짜 개념은 100퍼센트 알고 있는 게 맞을까?

3. 기출문제를 틀린 이유가 뭘였을까? 생각이 안 났을까? 문제를 잘 못 봤을까? 풀이에 오류가 있었을까?

지금 적는 내용도 이 세 가지입니다.

1. 긴 풀이에 개념을 적용하는 것에 익숙해져라!

다음은 2019학년도 9월 30번입니다.

30. 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$ 이고 최솟값이 0인 사차함수 $f(x)$ 와

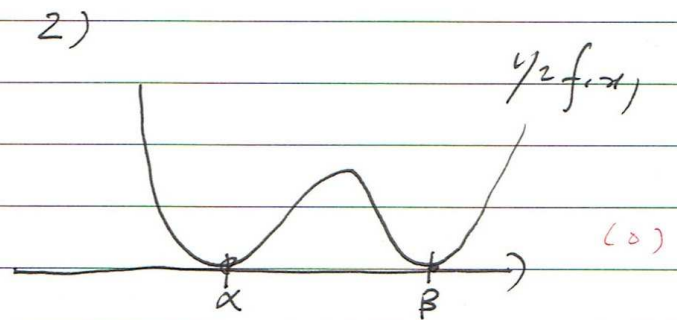
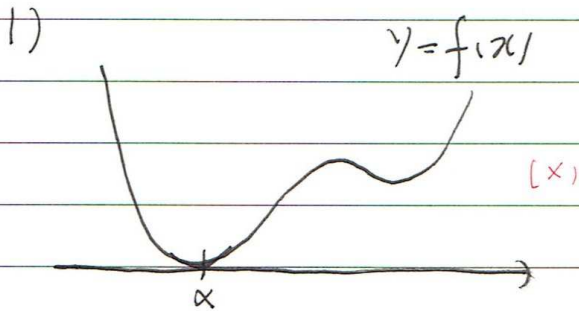
함수 $g(x) = 2x^4 e^{-x}$ 에 대하여 합성함수 $h(x) = (f \circ g)(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 방정식 $h(x) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.
 (나) 함수 $h(x)$ 는 $x=0$ 에서 극소이다.
 (다) 방정식 $h(x) = 8$ 의 서로 다른 실근의 개수는 6이다.

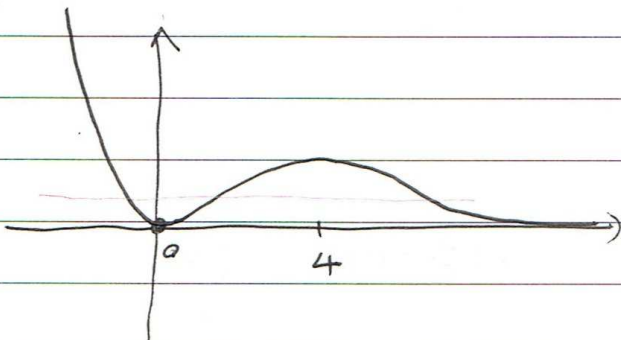
$f'(5)$ 의 값을 구하시오. (단, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$) [4점]

그래프를 그리면 다음과 같습니다. 최솟값이 0이므로 극솟값은 반드시 0일겁니다.

2019 수학 가형 9월 30번



★ $y = f(x) = 2x^4 e^{-x}$ ($f'(x) = 2x^3 e^{-x} (4 - x)$)



도함수의 활용 - 방정식, 부등식에의 활용 단원에서는 $f(x)=a$ 인 x 의 해의 개수를 많이 물어보곤 합니다.

그럴 때, 우리는 $y=f(x)$ 와 $y=a$ 그래프의 교점의 개수를 해의 개수로 생각했습니다.

(가) 조건의 의미는, $f(x)$ 가 0이 되도록 하는 x 값을 $g(x)$ 함수가 4개 가져야한다는 뜻입니다.

즉, $f(x)$ 가 0이 되도록 하는 x 값이 α 하나뿐이라면, $g(x)=\alpha$ 인 x 가 4개여야 하고,

$f(x)$ 가 0이 되도록 하는 x 값이 α 와 β 라면, $g(x)=\alpha$, $g(x)=\beta$ 인 서로 다른 x 값이 4개여야 합니다.

$g(x)=\alpha$ 인 x 는 최대 3개이므로, 1) 그래프와 같이, 극솟값이 0인 점이 하나면 안 됩니다.

2)의 그래프를 따라야, x 의 값이 4개가 될 가능성이 있습니다.

$\therefore f(x) = \frac{1}{2}(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$ 그리고, $g(x)=\alpha$, $g(x)=\beta$ 의 해의 개수의 합은 4개.

여기까지 (가) 조건을 도함수의 활용 중, 방정식의 활용 단위 개념을 이용한 분석입니다.

이 풀이에는 이상이 없습니다.

① 최솟값이 0임을 반영한 사차함수 그래프 개형과 미분법을 통한 $y=g(x)$ 의 개형.

② 합성함수 개념을 이용하여 추론한 $g(x)$ 의 해의 개수 조건.

③ 방정식과 부등식의 미분의 활용 단위를 고려한 사차함수 그래프 개형의 확정.

이 세 가지 모두 배운 개념을 이용한 것입니다.

문제를 풀 때 갑자기 내가 뭘 하고 있었는지 잊을 때가 가끔 있습니다.

두 가지만 제대로 생각하면서 문제에 접근합니다.

1. 내가 왜 이렇게 풀이를 하는지 아는가?

2. 풀이에 쓰인 개념은 그 목적에 맞는가?

이것만 조금씩 떠올려도 크게 달라질 겁니다.

(나) 조건을 해석해봅시다.

$g(x)=\alpha$, $g(x)=\beta$ 의 해의 개수의 합은 4개이므로,

2개, 2개 / 1개, 3개 / 3개, 1개 의 세 가지 경우가 있습니다.

하지만, $g(x)$ 의 해가 2개인 경우는 $g(x)=g(4)$ 인 경우로, 한 가지 경우입니다.

$\alpha=\beta$ 인 경우는 모순이므로, 1개, 3개 혹은 3개, 1개일 겁니다.

(1) 1개, 3개인 경우, α 는 0일 수밖에 없습니다.

$0 < \beta < f(4)$ 여야 3개인데, β 보다 α 가 작습니다.

(2) 3개, 1개인 경우 $0 < \alpha < f(4)$ 이며 $\beta > f(4)$ 입니다.

두 가지 모두 가능하므로, $y=h(x)$ 가 0에서 극소인지 생각합시다.

극솟값의 정의는, 그 주변의 함숫값보다 작은 함숫값을 말하며

미분 가능한 함수에 대해서, $f'(x)=0$ 이며 그 좌우로 도함수의 부호가 마이너스에서 플러스로 바뀔 때를 말합니다.

$h'(x) = f'(g(x))g'(x)$ 이며, $g(x)$ 는 0 근처에서 $(+) \rightarrow 0 \rightarrow (+)$ 로 바뀌며

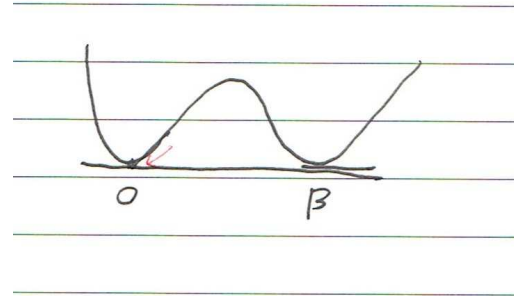
$g'(x)$ 는 0 근처에서 $(-) \rightarrow 0 \rightarrow (+)$ 로 바뀝니다.

$f'(g(x))$ 는 (1)의 경우, $g(x)$ 가 0보다 큰 상태에서 0으로 가까이 갑니다.

그래서 기울기가 $(+) \rightarrow 0 \rightarrow (+)$ 로 바뀝니다.

즉, $h'(x) = f'(g(x))g'(x)$ 의 부호는 $(-) \rightarrow 0 \rightarrow (+)$ 로 바뀌며

$x=0$ 에서 극소인 것을 확인할 수 있습니다.

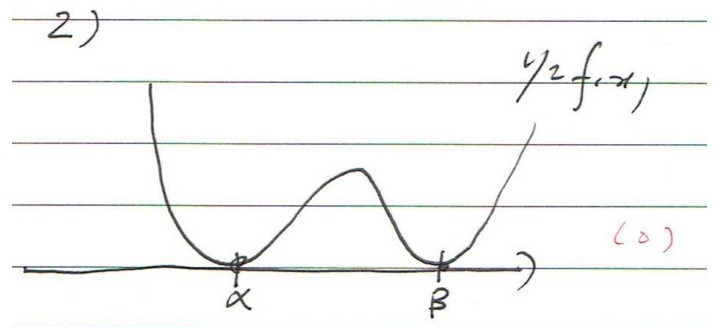


(2)의 경우, α 보다 0이 더 왼쪽에 위치하므로

$f'(g(x))$ 는 항상 음수입니다.

$h'(x) = f'(g(x))g'(x)$ 의 부호는 $(+) \rightarrow 0 \rightarrow (-)$

즉, 극대입니다.



즉, $f(x) = \frac{1}{2}x^2(x-\beta)^2$ 입니다.

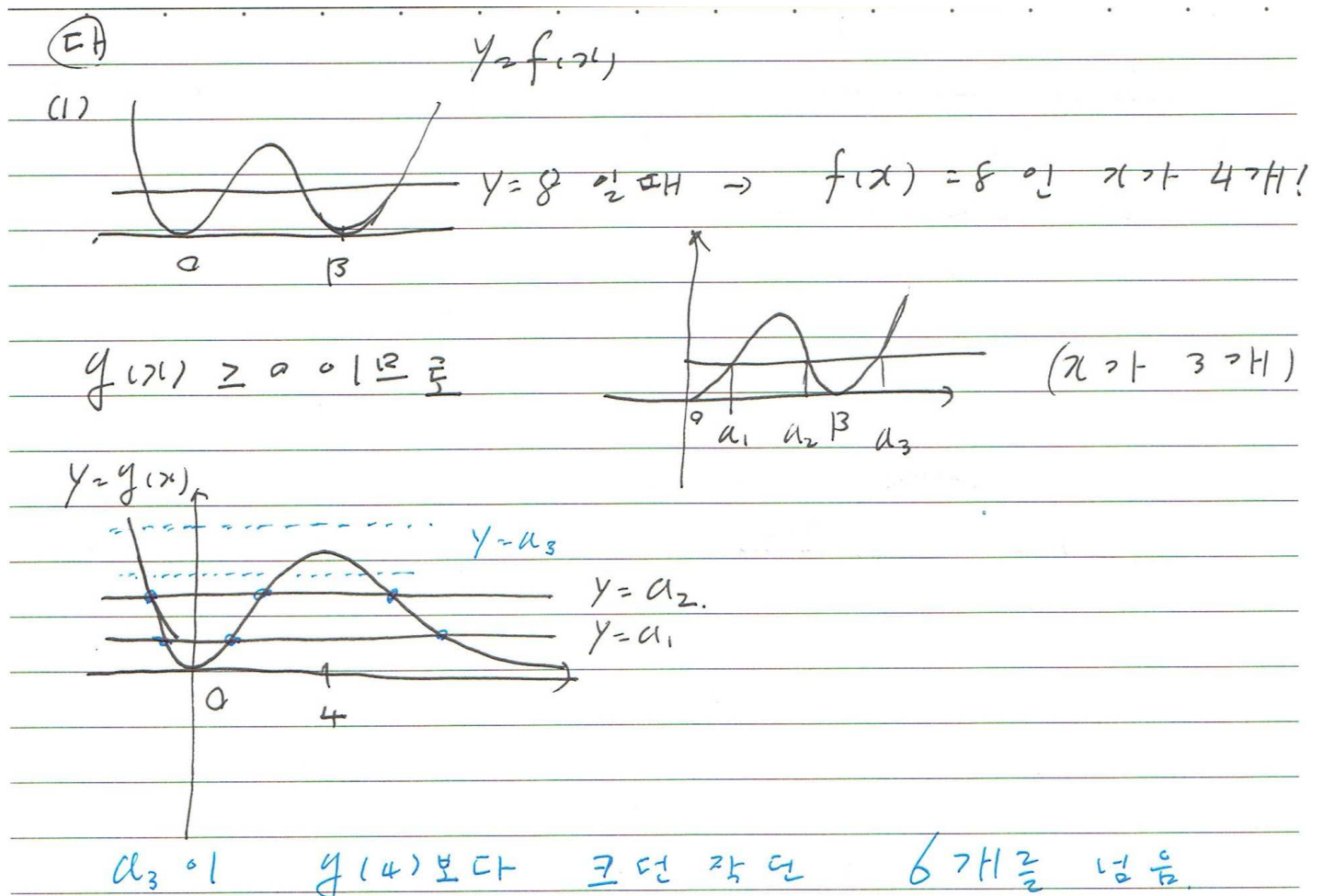
여기까지, 방정식에 미분의 활용, 극대, 극소의 정의를 이용한 분석입니다.

- ① 근의 개수의 합이 4개임을 알고 경우를 나누어서 방정식 개념을 적용.
- ② 극솟값의 개념을 이용하여 $f(x)$ 에 대한 정보를 추론.

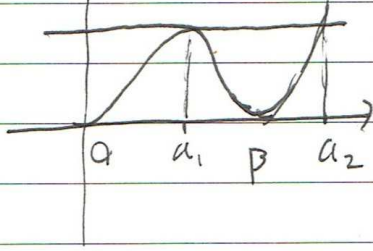
특히, 극소라는 정보 외에는 (나) 조건에 별다를 게 없기 때문에, 이 분석은 적절합니다.

(다) 조건을 해석해봅시다.

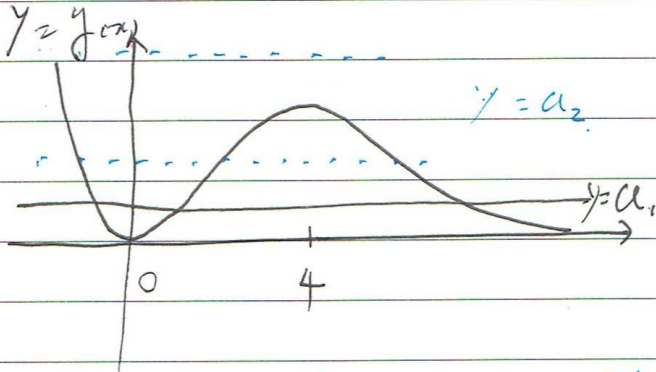
$g(x)$ 는 0 이상이기 때문에, $f(x)$ 도 x 가 0 이상인 부분만 생각해주면 됩니다.



(2) $y=f(x) \ (x \geq 0)$

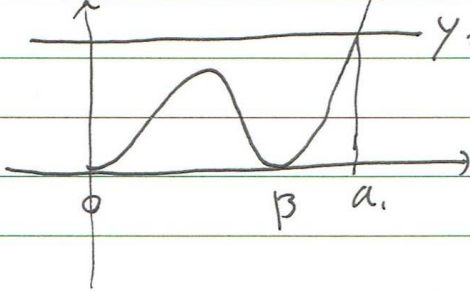


$y=8 \quad (x \text{ 가 } 2 \text{ 개})$

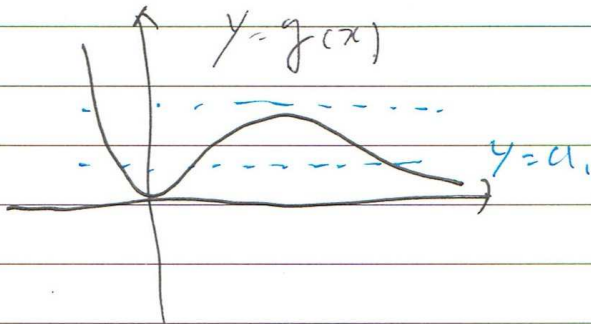


a_2 가 $g(4)$ 보다 작으면 만족!

(3) $y=f(x) \ (x \geq 0)$



$x \text{ 가 } 1 \text{ 개}$



상근 최대 3개.

이 사실을 종합해보면, $y=8$ 이 $f(x)$ 의 극댓값이어야만 성립하는 경우가 생김을 볼 수 있습니다.

물론, a_2 가 $g(4)$ 보다 작음을 증명해야 하지만, 가능한 경우가 없기 때문에 확신을 갖고 계산해주면 됩니다.

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2(x-\beta)^2 \text{에서 } f'(x) = x(x-\beta)(2x-\beta) \text{이므로, } a_1 = \frac{\beta}{2}$$

$$\text{대입하면, } f\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\beta}{2}\right)^4 = 8 \text{ 즉 } \beta=4 \text{입니다. } f'(5) = 5(5-4)(10-4) = 30 \text{입니다.}$$

a_2 가 $y(4)$ 보다 작음을 증명해보면 다음과 같습니다만, 굳이 증명하지 않아도 됩니다.

Date

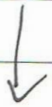
No

$$f(x) = \frac{1}{2} (x^2 - 4x)^2$$

$$f(x) = 8 \text{ 일 때, } (x^2 - 4x)^2 = 16$$

$$x^2 - 4x = 4$$

$$\text{or } x^2 - 4x = -4$$



$$x = 2 = \alpha_1$$

$$x = 2 \pm 2\sqrt{2}$$



$$x = 2 + 2\sqrt{2} \quad (\alpha_2 > \alpha_1)$$

$$y(4) = 512 e^{-4}$$

$$2 + 2\sqrt{2} < 512 e^{-4} \quad \therefore \text{이므로} \quad \alpha_2 < y(4)$$

$$(1 + \sqrt{2}) e^4$$

$$256$$



$$e^4$$

$$256 (\sqrt{2} - 1)$$

||

||

$$256 (0.414)$$

$$(2.7)^4$$

||

→ 표본 = 1쌍 $\frac{4}{10}$ 곱함.

△

$$3^4 = 81 < 100$$

증명에서 근삿값을 쓸 때, $e^4 < 3^4 < 100 < 256 \times (0.414...)$ 의 논리를 썼습니다.

여러분이 긴 풀이를 할 때, 흔히 저지르는 실수는

1. 내가 왜 이렇게 풀이를 하는지 갑자기 갈피를 잃는 것.
2. 풀이에 쓰인 개념이 그 목적에 맞는지 아닌지 모르는 것.

두 가지입니다.

이 두 가지만 신경 써서 정확하고 빠르게 풀어주시면 충분히 극복할 수 있습니다.

그러기 위해서는 여러분이 알고 있는 개념의 쓰임을 다시 한 번 볼 필요가 있습니다.

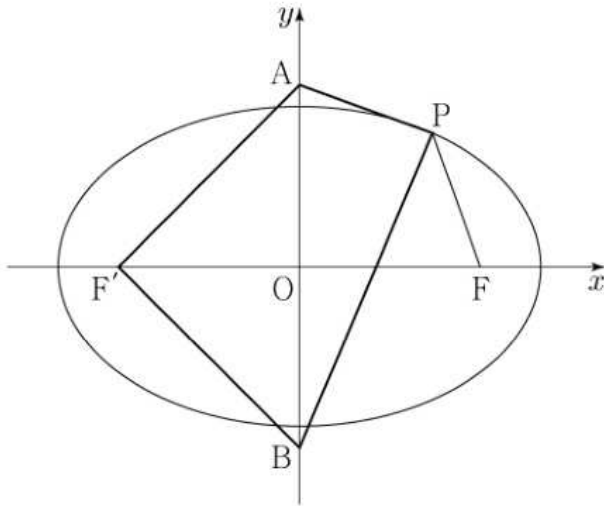
2. 개념에 확신을 가질 수 있는지 다시 한 번 점검하라!

27. 좌표평면에서 두 점 $A(0, 3)$, $B(0, -3)$ 에 대하여, 두

초점이 F, F' 인 타원 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$ 위의 점 P 가 $\overline{AP} = \overline{PF}$ 를

만족시킨다. 사각형 $AF'BP$ 의 둘레의 길이가 $a + b\sqrt{2}$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하시오.

(단, $\overline{PF} < \overline{PF'}$ 이고 a, b 는 자연수이다.) [4점]

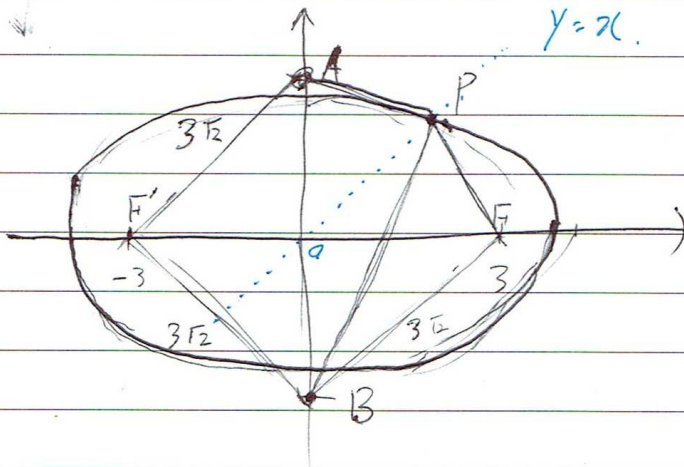


이차곡선은 정의! 입니다.

하지만 이 문제를 보고 굉장히 난해했던 학생이 분명 있었을 겁니다.

초점과 AP, BP선분은 관련이 없어 보입니다..

이 문제는 우리가 예전부터 익히 써왔던 개념과는 전혀 다른 문제일까요?



100% 대칭으로 보임! $\rightarrow 8 + 6\sqrt{2}$
($y=x$ 로)

그림이 참 조악하지만, 한번 봅시다.

A는 (0,3) B는 (0, -3)입니다! 또한 AP의 길이와 PF의 길이는 같습니다!

즉, 이 문제는 $y=x$ 대칭을 이용해 AP, BP선분을 초점에 닿을 수 있도록 이동하는 것이 포인트입니다!

실전에서는 여기서 끊어도 되겠지만, 굳이 증명을 정확하게 하고 싶다면 $y=x$ 를 주목하는 방향으로 하셔야합니다.

$y=x$, AP의 길이와 PF의 길이는 같다는 사실에 주목하면,

$\triangle APF$ 이 이등변삼각형이며, 이등분선은 $y=x$ 이며 P를 지납니다.

$\triangle BOF'$ 도 이등변삼각형이며, 이등분하는 직선은 $y=x$ 입니다.

즉 $\overline{BF'}$ 는 $y=x$ 에 의해 이등분되며, P를 지납니다. 즉, $\overline{BP} = \overline{PF'}$ 입니다.

AP의 길이와 PF의 길이는 같기 때문에 증명이 완료됩니다.

저는 이맘때 실전모의고사나 기출에서 틀린 문제가 있으면, 다시 한 번 관련 개념으로 돌아갔습니다.

다시 교과서를 뒤적거렸습니다. 개념만큼은 확실하게 하고 싶었어요.

내가 그동안 배운 개념이 문제를 풀 때 활용되지 않는 경우는 없애고 싶었습니다.

실제로 분명 배운 개념이긴 하지만, 못 쓰는 경우도 많았습니다.

다시 한 번 점검하고 정리했습니다. 계속 교과서와 문제를 비교하고 대조했어요.

그 결과, 시험장에서 문제를 옳게 풀었다는 확신을 얻을 수 있었습니다.

실제로 시험장에서는 그 확신이 가장 중요합니다.. 정말이에요.

우리는 개념을 확신을 가지고 쓸까요?

그렇게 많이 개념을 공부했지만, 실제로 문제풀이에서 선뜻 개념을 적용하기 어려운 경우도 있어요.

재점검하셔야 합니다. 다시 개념으로 돌아가셔야 해요.

여러분이 개념을 정확한 용도로 쓰고 있는지 다시 확인하셔야합니다.

3. 네가 낸 아이디어는 과연 확실할까?

20. 열린 구간 $(0, 2\pi)$ 에서 정의된 함수 $f(x) = \cos x + 2x \sin x$ 가 $x = \alpha$ 와 $x = \beta$ 에서 극값을 가진다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $\alpha < \beta$) [4점]

<보 기>

- ㄱ. $\tan(\alpha + \pi) = -2\alpha$
 ㄴ. $g(x) = \tan x$ 라 할 때, $g'(\alpha + \pi) < g'(\beta)$ 이다.
 ㄷ. $\frac{2(\beta - \alpha)}{\alpha + \pi - \beta} < \sec^2 \alpha$

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

모범적인 풀이는, 반드시 탄젠트 함수의 그래프를 그리는 것입니다.

(ㄱ) 극값에 관련한 문제이므로, 반드시 도함수를 찾아봅시다.

$$f'(x) = 2x \cos x + \sin x$$

이 식에서는 극값을 잘 찾기가 힘듭니다.

$$f'(x) = 2x \cos x + \sin x = \cos x (2x + \tan x) \text{로 변형하면,}$$

코사인 값이 0이 되는 x값에서는 도함수의 값이 0이 되지 않음을 알 수 있습니다.

즉, $\cos \alpha \neq 0$ 이며, $\cos \beta \neq 0$ 입니다.

$2x + \tan x$ 값이 0이 되면서 부호가 바뀔 때가 극값이라는 것을 알 수 있습니다.

즉, $\tan x = -2x$ 의 $(0, 2\pi)$ 에서의 해가 α 와 β 입니다.

$$\tan \alpha = \tan(\alpha + \pi) = -2\alpha \quad (0)$$

(ㄴ) ★이 선지까지 보시면, 반드시 탄젠트 함수의 그래프를 그려야겠다는 생각이 들어야합니다.★

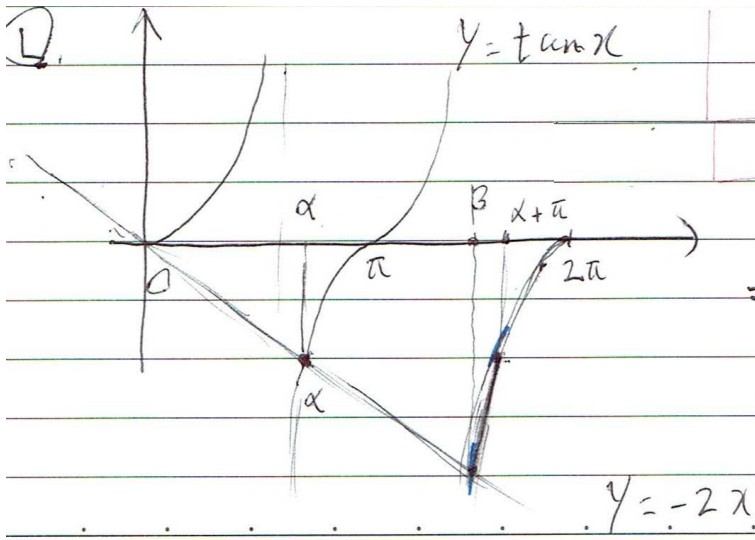
그 이유는 몇 가지가 있는데, 이 중 한 가지 혹은 두 가지만 찾아서 아이디어를 만들면 됩니다.

1) 선지 (ㄱ)과 (ㄴ)에서 탄젠트 함수에 관한 사항을 묻고 있습니다. 왜 이렇게 많이 물어볼까요?

2) α 와 β 에서의 상황을 물어보고 있습니다. 선지 (ㄱ)에서 극값은 $\tan x = -2x$ 의 해입니다.

3) α 와 β 가 정확하게 어떤 값인지도 모릅니다. 우리는 제시된 함수의 그래프를 정확히 그리기 힘듭니다.

그리고 극값에서의 상황만 물어봤습니다. 과연 그래프를 정확하게 그리는 것이 의도일까요? 의문이 듭니다.



이런 식으로 그래프를 그려봅시다. 그래프는 $y = \tan x$ 와 $y = -2x$ 입니다.

그 교점을 해로 생각하시면 됩니다. 기울기가 더 가파른 β 일 때가 도함수의 값이 큼을 알 수 있습니다. (O)

(ㄷ) $\frac{2\beta - 2\alpha}{\alpha + \pi - \beta}$ 입니다. (ㄴ) 선지에 있는 $(\alpha + \pi)$ 와 β 가 분모에 있습니다.

두 점 사이의 기울기로 해석해봅시다. 우리는 $\tan x = -2x$ 의 $(0, 2\pi)$ 에서의 해가 α 와 β 인 것을 압니다.

$$\frac{2\beta - 2\alpha}{\alpha + \pi - \beta} = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{\alpha + \pi - \beta} = \frac{\tan(\alpha + \pi) - \tan \beta}{\alpha + \pi - \beta} \text{이며,}$$

$g'(\alpha + \pi) = \sec^2 \alpha$ 이므로, x 값이 $(\alpha + \pi)$ 일 때의 탄젠트의 접선의 기울기와,

$x = \beta$, $x = (\alpha + \pi)$ 일 때의 탄젠트의 평균 변화율을 비교하면 됩니다. (X)

네가 낸 아이디어는 확실한가요?

그 이유를 제대로 설명할 수 있나요?

설명하지 않아도 풀 수 있을지도 모릅니다.

하지만 확신을 가지고 푸는 것과 확신 없이 푸는 것의 차이는 큼니다.

결론 : 9월이 지난 지금 이 시점에서는, 확신을 갖고 풀 수 있도록 보완하세요.

실전에서는 모든 문제를 확신을 가지고 풀기 힘들다는 건 압니다.

하지만, 지금 연습에서라도 모든 풀이에 확신을 가지고 풀 수 있도록 보완하세요.

확신은 큰 힘을 가지고 있습니다.

여러분이 여러분 자신을 믿는 것과 믿지 않는 것에는 정말 큰 차이가 있습니다.

여러분 스스로 여러분을 믿도록 만드세요.

지금까지 공부해 온 방식이 옳다고 믿는다면, 여러분 자신을 믿을 수 있도록 정리하세요.

그동안의 여러분의 고생이 수험장에서의 확신으로 바뀐다면 반드시 성공합니다.

앞으로의 1주. 정리 잘 하셔서 여러분의 노력만큼의 성과를 받길 바랍니다.