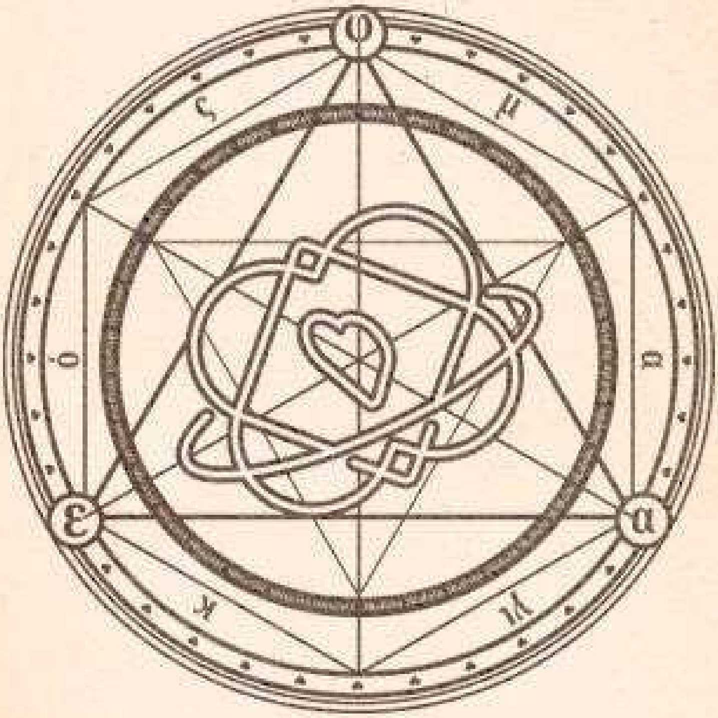
우주설 수학자료

9평전 약점체크+몸풀기

WJSN

Dream your dream

무한등비급수



2018. 02. 27

Coming Soon

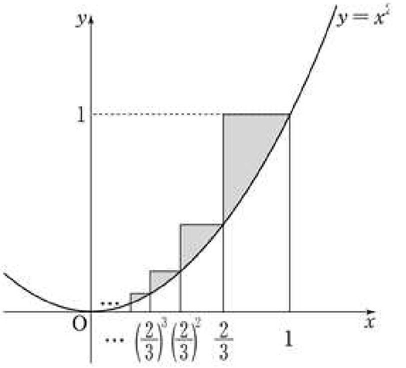
by우주설

*1.*아래 그림과 같이 x 좌표가 각각

$$1,\ \frac{2}{3},\ \left(\frac{2}{3}\right)^2,\ \left(\frac{2}{3}\right)^3,\ \cdots,\ \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1},\ \cdots$$

인 x축 위의 점에서 y축에 평행한 직선을 그어 곡선 $y=x^2$과 만나는 점을 한 꼭짓점으로 하는 직사각형을 한없이 만든다. 이 직사각형들이 곡선 $y=x^2$에 의하여 잘려진 윗부분들의 넓이의 합은?

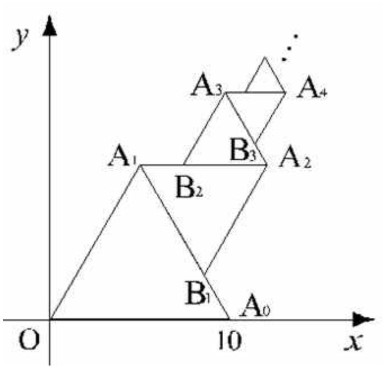
[3점][2004학년도 수능]



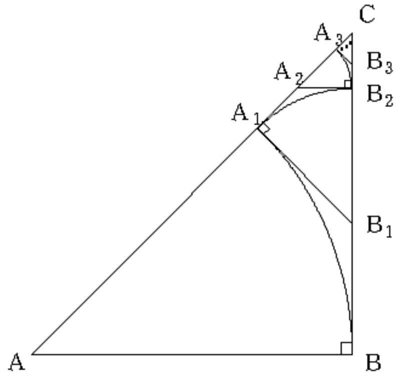
① $\frac{5}{57}$　② $\frac{2}{19}$　③ $\frac{7}{57}$　④ $\frac{8}{57}$　⑤ $\frac{3}{19}$

2. 아래 그림과 같이 원점 O와 점 $A_0(10,\ 0)$에 대하여 제1사분면 위에 $\overline{OA_0}$를 한 변으로 하는 정삼각형 OA_0A_1을 만들고 $\overline{A_0A_1}$을 $1:2$로 내분하는 점을 B_1이라 한다. 또 $\triangle OA_0A_1$밖에 $\overline{A_1B_1}$을 한 변으로 하는 정삼각형 $A_1B_1A_2$를 만들고 $\overline{A_1A_2}$를 $1:2$로 내분하는 점을 B_2라 한다. 이와 같은 과정을 한없이 반복하면 점 A_n은 점 (a,b)에 한없이 가까워진다. 이때 a의 값을 구하시오.

[4점][2004년 3월]



3. 그림과 같이 직각이등변삼각형 ABC에서 꼭짓점 A를 중심, $\overline{AB}$를 반지름으로 하는 원을 그렸을 때, $\overline{AC}$와 만나는 점을 A_1, $\overline{AC} \perp \overline{A_1B_1}$이면서 $\overline{BC}$ 위에 있는 점을 B_1, 다시 꼭짓점 B_1을 중심, $\overline{A_1B_1}$을 반지름으로 하는 원을 그렸을 때, $\overline{CB_1}$과 만나는 점을 B_2, $\overline{CB_1} \perp \overline{A_2B_2}$이면서 $\overline{A_1C}$ 위에 있는 점을 A_2라고 정하기로 한다.



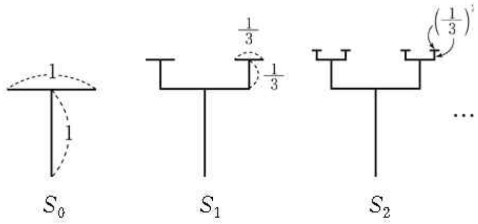
위와 같은 과정을 계속 반복해 나갈 때,
$\overline{AB} + \overline{A_1B_1} + \overline{A_2B_2} + \cdots$ 의 값은? (단, $\overline{AB} = 2$)

[4점][2004년 4월]

① $2+\frac{\sqrt{2}}{2}$　② $4-\sqrt{2}$　③ $2\sqrt{2}$
④ $2+\sqrt{2}$　⑤ $2+2\sqrt{2}$

4. 그림과 같이 길이가 1인 선분 2개로 만든 'ㅜ' 모양의 도형을 S_0이라 하자. 도형 S_0의 위쪽에 있는 선분의 양끝에 길이가 $\frac{1}{3}$인 선분 2개로 만든 'ㅜ' 모양의 도형을 붙여 도형 S_1을 만든다. 이와 같은 방법으로 도형 S_{n-1}의 가장 위쪽에 있는 각 선분의 양끝에 길이가 $\left(\frac{1}{3}\right)^n$인 선분 2개로 만든 'ㅜ' 모양의 도형을 붙여 도형 S_n을 만든다. 도형 S_n을 이루는 모든 선분의 길이의 합을 l_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} l_n$의 값을 구하시오.

[4점][2004년 6월]

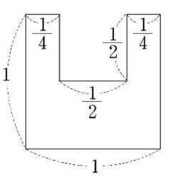


5. 아래 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형에서 한 변의 길이가 $\frac{1}{2}$인 정사각형을 잘라낸 후 남은 凹 모양의 도형을 A_1이라 하자. 한 변의 길이가 $\frac{1}{4}$인 정사각형에서 한 변의 길이가 $\frac{1}{8}$인 정사각형을 잘라낸 후 남은 凹 모양의 도형 2개를 A_1의 위쪽 두 변에 각각 붙인 도형을 A_2라 하자. 한 변의 길이가 $\frac{1}{16}$인 정사각형에서 한 변의 길이가 $\frac{1}{32}$인 정사각형을 잘라낸 후 남은 凹 모양의 도형 4개를 A_2의 위쪽 네 변에 각각 붙인 도형을 A_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 얻은 n번째 도형을 A_n이라 하고 그 넓이를 S_n이라 하자.

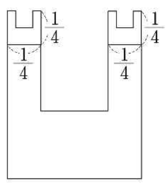
$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

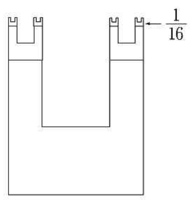
[4점][2005학년도 수능]



A_1



A_2



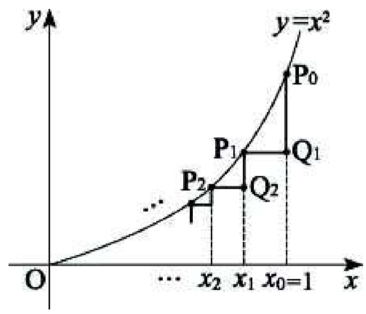
A_3

6. $x_0 = 1,\ x_1 = \frac{3}{4},\ x_2 = \frac{5}{8},\ \cdots,\ x_n = \frac{2^n+1}{2^{n+1}},\ \cdots$ 에 대하여 좌표평면 위에 점 $P_0(1,\ 1)$과 $P_n(x_n,\ {x_n}^2)$, $Q_n(x_{n-1},\ {x_n}^2)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$을 그림과 같이 나타낸다. 무한급수

$$\overline{P_0Q_1} + \overline{Q_1P_1} + \overline{P_1Q_2} + \overline{Q_2P_2} + \overline{P_2Q_3} + \cdots$$

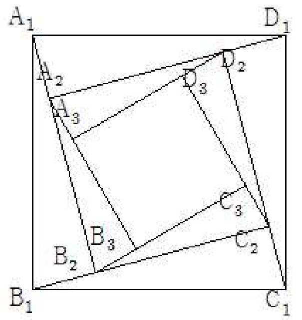
의 합을 S라 할 때 $100S$의 값을 구하시오.

[4점][2005년 3월]



7. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 내부에 합동인 4개의 직각삼각형의 넓이의 합과 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 넓이가 같도록 만들고, 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 내부에 같은 방법으로 정사각형 $A_3B_3C_3D_3$을 만든다. 이와 같은 과정을 한없이 반복하여 만들어진 정사각형 $A_nB_nC_nD_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 합은?

[3점][2005년 5월]



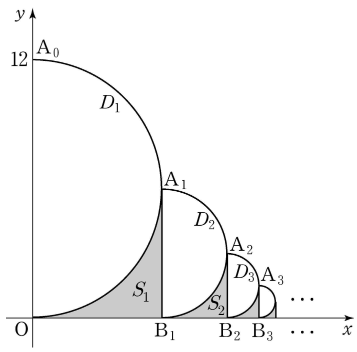
① 2 ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{11}{4}$ ⑤ 3

8. 그림과 같이 원점과 점 $A_0(0, 12)$를 지름의 양 끝점으로 하는 원의 오른쪽 반원을 D_1이라 하자. 원점을 지나고 기울기가 1인 직선이 D_1과 제1사분면에서 만나는 점을 A_1, 점 A_1에서 x축에 내린 수선의 발을 B_1이라 하고, 반원 D_1, x축, 선분 A_1B_1으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1이라 하자.

선분 A_1B_1을 지름으로 하는 원의 오른쪽 반원을 D_2라 하자. 점 B_1을 지나고 기울기가 1인 직선이 D_2와 제1사분면에서 만나는 점을 A_2, 점 A_2에서 x축에 내린 수선의 발을 B_2라 하고, 반원 D_2, x축, 선분 A_2B_2로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 도형의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?

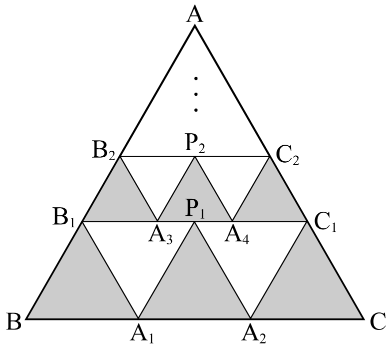
[4점][2005년 6월]



① $9(4-\pi)$ ② $12(4-\pi)$ ③ $15(4-\pi)$
④ $4(8-\pi)$ ⑤ $6(8-\pi)$

9. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정삼각형 ABC가 있다. 선분 BC의 삼등분 점을 A_1, A_2라 하고 선분 BA_1, A_1A_2, A_2C를 각각 한 변으로 하는 정삼각형 B_1BA_1, $P_1A_1A_2$, C_1A_2C를 만든다. 다시 삼각형 AB_1C_1에서 선분 B_1C_1의 삼등분 점을 A_3, A_4라 하고 같은 방법으로 세 정삼각형 $B_2B_1A_3$, $P_2A_3A_4$, $C_2A_4C_1$을 만든다. 이와 같은 방법으로 계속하여 삼각형을 만들어 나갈 때, 어두운 부분의 넓이의 합은?

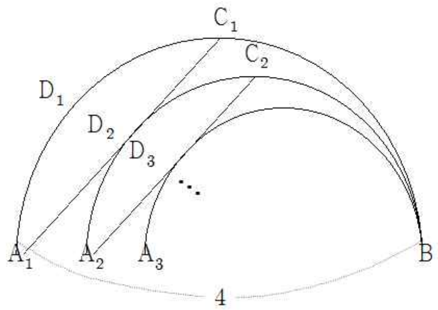
[4점][2005년 7월]



① $\frac{\sqrt{3}}{10}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{8}$ ③ $\frac{3\sqrt{3}}{20}$ ④ $\frac{\sqrt{3}}{6}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{3}}{16}$

10. 그림과 같이 길이가 4인 선분 A_1B를 지름으로 하는 반원 D_1이 있다. 호 A_1B를 이등분하는 점을 C_1, 점 B를 지나면서 선분 A_1C_1과 접하고 중심이 선분 A_1B 위에 있는 반원을 D_2, 반원 D_2가 선분 A_1B와 만나는 점을 A_2라 하자. 호 A_2B를 이등분하는 점을 C_2, 점 B를 지나면서 선분 A_2C_2와 접하고 중심이 선분 A_1B 위에 있는 반원을 D_3, 반원 D_3이 선분 A_1B와 만나는 점을 A_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 얻은 반원 D_n의 호의 길이를 l_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$의 값은?

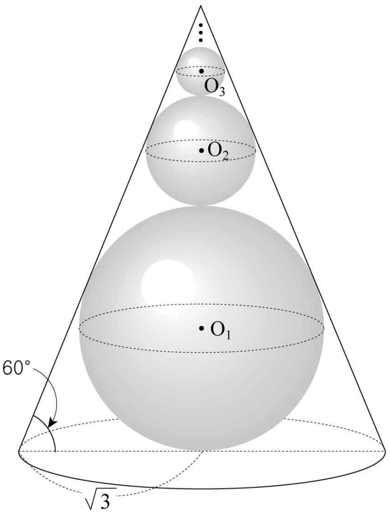
[4점][2006년 4월]



① $2(1+\sqrt{2})\pi$ ② $2(2+\sqrt{2})\pi$ ③ $2(3+\sqrt{2})\pi$
④ $2(2+2\sqrt{2})\pi$ ⑤ $2(3+2\sqrt{2})\pi$

11. 그림은 밑면의 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$이고 밑면과 모선 사이의 각도가 60°인 직원뿔이다. 구 O_1이 직원뿔에 내접하고, 구 O_2는 구 O_1에 외접하고 직원뿔의 옆면과 접한다. 이와 같은 방법으로 O_3, O_4, O_5, …를 한없이 만들어 나갈 때, 구들의 부피의 합은?

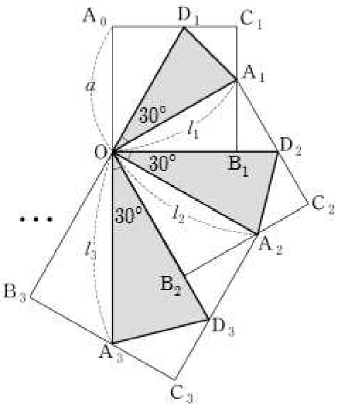
[4점][2006년 5월]



① $\frac{16}{13}\pi$ ② $\frac{18}{13}\pi$ ③ $\frac{20}{13}\pi$ ④ $\frac{22}{13}\pi$ ⑤ $\frac{24}{13}\pi$

12. 그림과 같이 한 변의 길이가 a인 정사각형 $OB_1C_1A_0$이 있다. 삼각형 OA_1D_1이 $\angle D_1OA_1 = 30°$인 이등변삼각형이 되도록 변 B_1C_1, A_0C_1 위에 각각 점 A_1, D_1을 잡고 변 OA_1의 길이를 l_1이라 하자.
선분 OA_1을 한 변으로 하는 정사각형 $OB_2C_2A_1$에서 삼각형 OA_2D_2가 $\angle D_2OA_2 = 30°$인 이등변삼각형이 되도록 변 B_2C_2, A_1C_2 위에 각각 점 A_2,D_2를 잡고 변 OA_2의 길이를 l_2라 하자.
선분 OA_2를 한 변으로 하는 정사각형 $OB_3C_3A_2$에서 삼각형 OA_3D_3이 $\angle D_3OA_3 = 30°$인 이등변삼각형이 되도록 변 B_3C_3, A_2C_3 위에 각각 점 A_3, D_3을 잡고 변 OA_3의 길이를 l_3이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 얻은 이등변삼각형 OA_nD_n에서 변 OA_n의 길이를 l_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l_n} = \sqrt{3}$일 때, a의 값은?

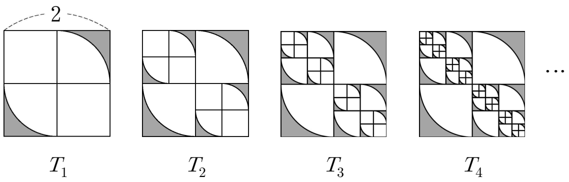
[4점][2006년 6월]



① $\sqrt{3}$ ② $1+\sqrt{3}$ ③ $2+\sqrt{3}$
④ $3+\sqrt{3}$ ⑤ $6+\sqrt{3}$

13. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형을 넓이가 같은 4개의 정사각형으로 나누고 반지름의 길이가 1인 사분원 2개의 외부(어두운 부분)를 잘라낸 후 남은 도형을 T_1이라 하자.
T_1에서 한 변의 길이가 1인 정사각형 2개를 각각 넓이가 같은 4개의 정사각형으로 나누고 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}$인 사분원 4개의 외부(어두운 부분)를 잘라낸 후 남은 도형을 T_2라 하자.
T_2에서 한 변의 길이가 $\frac{1}{2}$인 정사각형 4개를 각각 넓이가 같은 4개의 정사각형으로 나누고 반지름의 길이가 $\frac{1}{4}$인 사분원 8개의 외부(어두운 부분)를 잘라낸 후 남은 도형을 T_3이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 도형을 T_n이라 하고 그 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?

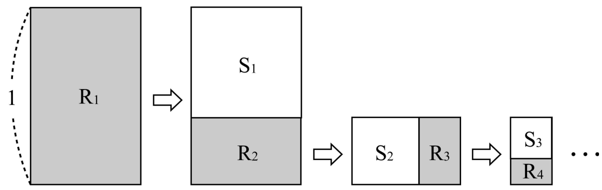
[4점][2006년 9월]



① $\frac{\pi}{2}$ ② $\frac{2}{3}\pi$ ③ $\frac{3}{4}\pi$ ④ π ⑤ $\frac{5}{4}\pi$

14. 직사각형 중에서 짧은 변을 한 변으로 하는 정사각형을 잘라내고 남은 직사각형이 처음의 직사각형과 서로 닮음이 되는 것을 황금직사각형이라고 한다.
그림과 같이 긴 변의 길이가 1인 황금직사각형 R_1에서 짧은 변을 한 변으로 하는 정사각형 S_1을 잘라내고 남은 직사각형을 R_2, 직사각형 R_2에서 정사각형 S_2를 잘라내고 남은 직사각형을 R_3이라고 하자. 이와 같은 방법으로 직사각형 R_4, R_5, R_6, $\cdots$ 을 한없이 만들어 간다.
직사각형 R_n $(n=1, 2, 3, \cdots)$의 둘레의 길이 l_n에 대하여
$\sum_{n=1}^{\infty} l_n = k\,l_1$일 때, 상수 k의 값은?

[4점][2006년 10월]



① $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ ② $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ ③ $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$
④ $3-\sqrt{5}$ ⑤ $3+\sqrt{5}$

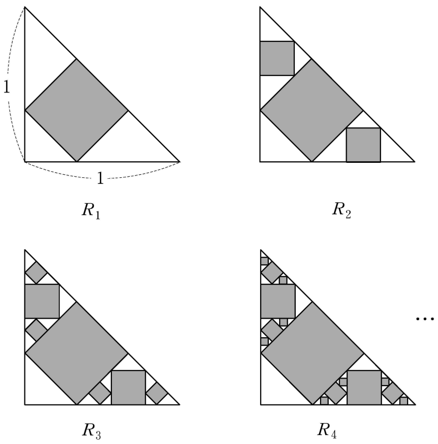
15. 아래와 같이 직각을 낀 두 변의 길이가 1인 직각이등변삼각형이 있다. 이 직각이등변삼각형의 빗변에 2개의 꼭짓점이 있고, 직각을 낀 두 변에 나머지 2개의 꼭짓점이 있는 정사각형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 합동인 2개의 직각이등변삼각형의 각 빗변에 2개의 꼭짓점이 있고, 직각을 낀 두 변에 나머지 2개의 꼭짓점이 있는 2개의 정사각형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

그림 R_2에서 합동인 4개의 직각이등변삼각형의 각 빗변에 2개의 꼭짓점이 있고, 직각을 낀 두 변에 나머지 2개의 꼭짓점이 있는 4개의 정사각형에 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.

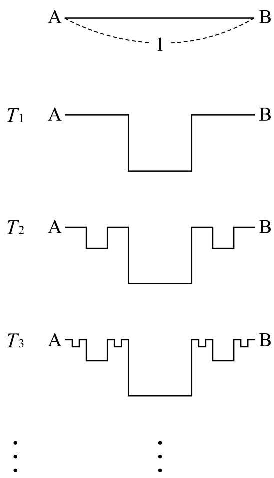
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 모든 정사각형의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?

[4점][2007학년도 수능]



① $\frac{3\sqrt{2}}{20}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{5}$ ③ $\frac{3}{10}$ ④ $\frac{\sqrt{3}}{5}$ ⑤ $\frac{2}{5}$

16. 길이가 1인 선분 AB가 있다. 그림과 같이 선분 AB를 3등분한 다음, 가운데 선분을 한 변으로 하는 정사각형을 그리고, 가운데 선분을 지워 만든 도형을 T_1이라 하자. T_1의 선분 중 원래의 선분 AB에서 남아 있는 두 선분을 각각 3등분한 다음, 가운데 선분을 한 변으로 하는 정사각형을 그리고, 가운데 선분을 지워 만든 도형을 T_2라 하자. T_2의 선분 중 원래의 선분 AB에서 남아 있는 네 선분을 각각 3등분한 다음, 가운데 선분을 한 변으로 하는 정사각형을 그리고, 가운데 선분을 지워 만든 도형을 T_3이라 하자.



이와 같은 과정을 계속 반복하여 n번째 만든 도형을 T_n이라 하고, T_n에 있는 모든 선분의 길이의 총합을 a_n이라 하자. 이때 a_{20}의 값은?

[4점][2007년 3월]

① $3\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{20}\right\}$ ② $3\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{21}\right\}$ ③ $3\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{19}\right\}$

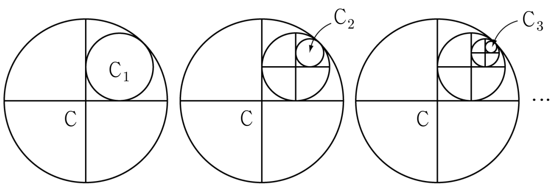
④ $3\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{20}\right\}$ ⑤ $3\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{21}\right\}$

17. 반지름의 길이가 1인 원 C가 있다.
원 C를 사분원으로 나누어 한 사분원에 내접하는 원을 C_1,
원 C_1을 사분원으로 나누어 한 사분원에 내접하는 원을 C_2,
원 C_2를 사분원으로 나누어 한 사분원에 내접하는 원을 C_3,

⋮

이와 같은 과정을 계속하여 얻어진 원 C_n의 반지름의 길이를 r_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} r_k$의 값은?

[4점][2007년 4월]



① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1+\sqrt{2}}{4}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$
④ $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$ ⑤ 1

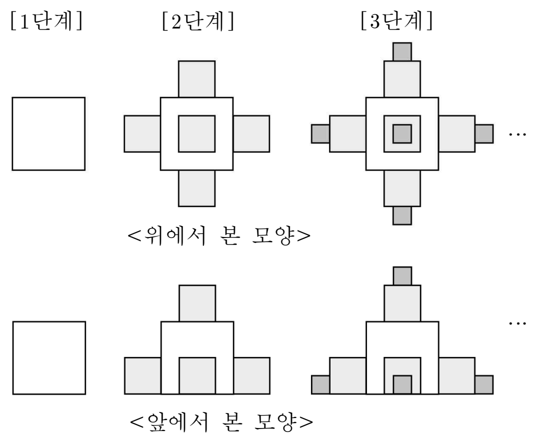
18. 그림은 단계별로 만들어지는 어떤 입체를 위에서 본 모양과 앞에서 본 모양을 나타낸 것이다.

[1단계] 한 모서리의 길이가 1인 정육면체를 평면 위에 놓는다.
[2단계] [1단계] 입체에 한 모서리의 길이가 $\frac{1}{2}$인 정육면체를 위, 왼쪽, 오른쪽, 앞, 뒤에 각각 1개씩 붙인다.
[3단계] [2단계] 입체에 한 모서리의 길이가 $\frac{1}{2^2}$인 정육면체를 위, 왼쪽, 오른쪽, 앞, 뒤에 각각 1개씩 붙인다.

⋮

이와 같은 과정을 계속하여 [n단계]에서 얻어진 입체의 부피를 V_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} V_n$의 값은?

[4점][2007년 4월]



① $\frac{8}{7}$ ② $\frac{9}{7}$ ③ $\frac{10}{7}$ ④ $\frac{11}{7}$ ⑤ $\frac{12}{7}$

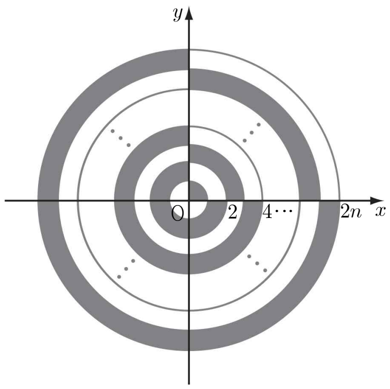
19. 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1, 2, 3, $\cdots$, $2n$인 동심원이 있다.

<1단계> 반지름의 길이가 1인 원 내부의 1사분면에 검은색을 칠하고, 반지름의 길이가 1인 원과 반지름의 길이가 2인 원 사이의 2, 3, 4사분면에도 검은색을 칠한다.

<2단계> 반지름의 길이가 2인 원과 반지름의 길이가 3인의 원 사이의 1사분면에 검은색을 칠하고, 반지름의 길이가 3인 원과 반지름의 길이가 4인 원 사이의 2, 3, 4사분면에도 검은색을 칠한다.

⋮

<n단계> 반지름의 길이가 $2n-2$인 원과 반지름의 길이가 $2n-1$인원 사이의 1사분면에 검은색을 칠하고, 반지름의 길이가 $2n-1$인 원과 반지름의 길이가 $2n$인 원 사이의 2, 3, 4사분면에도 검은색을 칠한다.



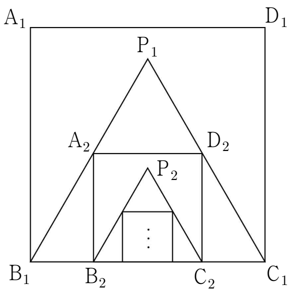
이와 같이 n단계까지 검은색으로 칠한 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2}$의 값은?

[4점][2007년 5월]

① $\frac{3}{4}\pi$ ② π ③ $\frac{4}{3}\pi$ ④ $\frac{3}{2}\pi$ ⑤ 2π

20. 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 내부에 선분 B_1C_1을 한 변으로 하는 정삼각형 $P_1B_1C_1$을 만든다. 다시 선분 B_1C_1 위에 정삼각형 $P_1B_1C_1$에 내접하는 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 만든다. 이와 같은 방법으로 만들어지는 정사각형 $A_nB_nC_nD_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}S_n$의 값은?

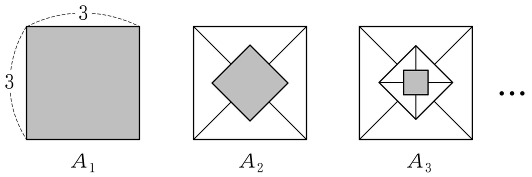
[4점][2007년 7월]



① $4\sqrt{3}+15$ ② $5\sqrt{3}+10$ ③ $5\sqrt{3}+25$
④ $6\sqrt{3}+5$ ⑤ $6\sqrt{3}+10$

21. 그림과 같이 한 변의 길이가 3인 정사각형을 A_1, 그 넓이를 S_1이라 하자. 정사각형 A_1에 대각선을 그어 만들어진 4개의 삼각형의 무게중심을 연결한 정사각형을 A_2, 그 넓이를 S_2라 하자. 같은 방법으로 정사각형 A_2에 대각선을 그어 만들어진 4개의 삼각형의 무게중심을 연결한 정사각형을 A_3, 그 넓이를 S_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 $(n-1)$번째 얻은 정사각형을 A_n, 그 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?

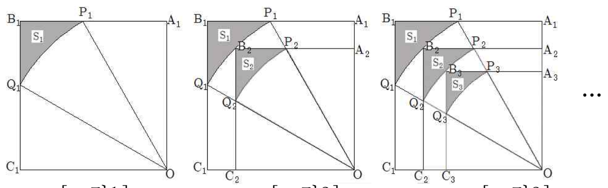
[4점][2007년 9월]



① $\frac{64}{7}$ ② $\frac{21}{2}$ ③ $\frac{72}{7}$ ④ $\frac{27}{2}$ ⑤ $\frac{81}{7}$

22. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 $\mathrm{OA_1B_1C_1}$에서 $\angle \mathrm{O}$의 3등분선이 $\overline{\mathrm{A_1B_1}}$, $\overline{\mathrm{B_1C_1}}$과 만나는 점을 각각 $\mathrm{P_1}$, $\mathrm{Q_1}$이라 하자. 점 O가 중심이고 $\overline{\mathrm{OP_1}}$을 반지름으로 하는 부채꼴 $\mathrm{OP_1Q_1}$을 그린다. [그림1]에서 도형 $\mathrm{B_1Q_1P_1}$의 넓이를 S_1이라 하자. 호 $\mathrm{P_1Q_1}$의 중점 $\mathrm{B_2}$, $\overline{\mathrm{OA_1}}$ // $\overline{\mathrm{C_2B_2}}$인 $\overline{\mathrm{OC_1}}$ 위의 점 $\mathrm{C_2}$, $\overline{\mathrm{OC_1}}$ // $\overline{\mathrm{A_2B_2}}$인 $\overline{\mathrm{OA_1}}$ 위의 점 $\mathrm{A_2}$, 점 O를 꼭짓점으로 하는 정사각형 $\mathrm{OA_2B_2C_2}$를 그린다. $\overline{\mathrm{OP_1}}$과 $\overline{\mathrm{A_2B_2}}$가 만나는 점을 $\mathrm{P_2}$, $\overline{\mathrm{OQ_1}}$과 $\overline{\mathrm{B_2C_2}}$가 만나는 점을 $\mathrm{Q_2}$라 하자. 점 O가 중심이고 $\overline{\mathrm{OP_2}}$를 반지름으로 하는 부채꼴 $\mathrm{OP_2Q_2}$를 그린다. [그림2]에서 도형 $\mathrm{B_2Q_2P_2}$의 넓이를 S_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 합은?

[4점][2007년 10월]



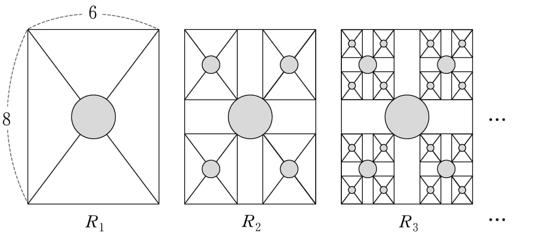
[그림1] [그림2] [그림3]

① $-3+\pi$ ② $4-\pi$ ③ $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$

④ $3-\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$ ⑤ $4-\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}$

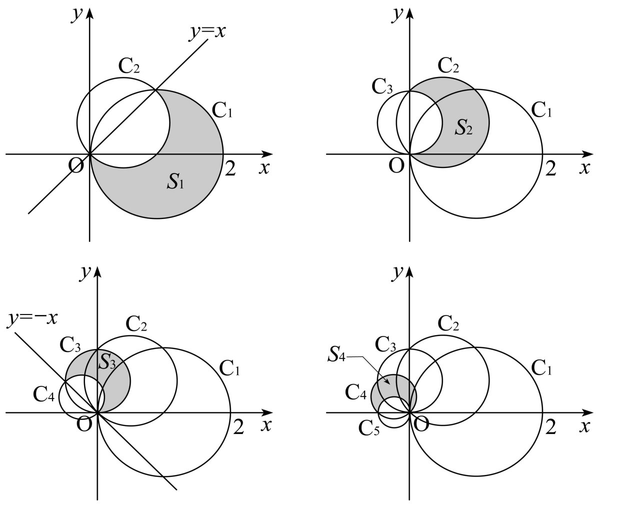
23. 아래와 같이 가로의 길이가 6이고 세로의 길이가 8인 직사각형 내부에 두 대각선의 교점을 중심으로 하고, 직사각형 가로 길이의 $\frac{1}{3}$을 지름으로 하는 원을 그려서 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 직사각형의 각 꼭짓점으로부터 대각선과 원의 교점까지의 선분을 각각 대각선으로 하는 4개의 직사각형을 그린 후, 새로 그려진 직사각형 내부에 두 대각선의 교점을 중심으로 하고, 새로 그려진 직사각형 가로 길이의 $\frac{1}{3}$을 지름으로 하는 원을 그려서 얻은 그림을 R_2라 하자. 그림 R_2에 있는 합동인 4개의 직사각형 각각에서 각 꼭짓점으로부터 대각선과 원의 교점까지의 선분을 각각 대각선으로 하는 4개의 직사각형을 그린 후, 새로 그려진 직사각형 내부에 두 대각선의 교점을 중심으로 하고, 새로 그려진 직사각형 가로 길이의 $\frac{1}{3}$을 지름으로 하는 원을 그려서 얻은 그림을 R_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 있는 모든 원의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? (단, 모든 직사각형의 가로와 세로는 각각 서로 평행하다.)

[4점][2008학년도 수능]



① $\frac{37}{9}\pi$ ② $\frac{34}{9}\pi$ ③ $\frac{31}{9}\pi$ ④ $\frac{28}{9}\pi$ ⑤ $\frac{25}{9}\pi$

24. 그림과 같이 원점 O와 점 $(2,\ 0)$을 지름의 양 끝으로 하는 원을 C_1이라 하자. 또, 원 C_1과 직선 $y=x$가 만나는 두 점을 지름의 양 끝으로 하는 원을 C_2, 원 C_2와 y축이 만나는 두 점을 지름의 양 끝으로 하는 원을 C_3이라 하자. 또, 원 C_3과 직선 $y=-x$가 만나는 두 점을 지름의 양 끝으로 하는 원을 C_4, 원 C_4와 x축이 만나는 두 점을 지름의 양 끝으로 하는 원을 C_5라 하자.



이와 같은 방법으로 중심이 차례로 직선 $y=x$, y축, 직선 $y=-x$, x축, … 위에 있는 원 C_6, C_7, C_8, C_9, …를 한없이 만들어 갈 때, 원 C_n의 내부와 원 C_{n+1}의 외부의 공통부분(어두운 부분)의 넓이를 $S_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\ )$이라 하자.

이때 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?

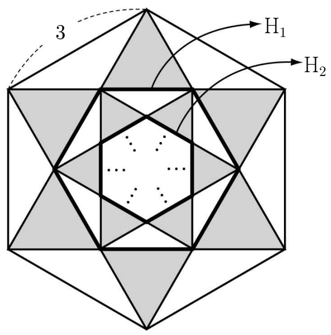
[4점][2008년 3월]

① $\pi+1$ ② $\frac{3}{2}\pi$ ③ $\frac{5}{4}(\pi+1)$

④ $\frac{3}{2}(\pi+1)$ ⑤ 2π

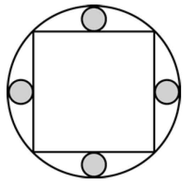
25. 그림과 같이 한 변의 길이가 3인 정육각형의 각 꼭짓점에서 짧은 대각선을 그려서 만들어진 정육각형을 H_1이라 하고, H_1의 외부에 새로 만들어진 정삼각형을 어둡게 칠한다.
H_1의 각 꼭짓점에서 짧은 대각선을 그려서 만들어진 정육각형을 H_2라 하고, H_2의 외부에 새로 만들어진 정삼각형을 어둡게 칠한다.
이와 같은 과정을 한없이 계속할 때, 어둡게 칠해진 모든 정삼각형의 넓이의 합은?

[4점][2008년 4월]



① $\frac{19}{4}\sqrt{3}$　② $\frac{21}{4}\sqrt{3}$　③ $\frac{23}{4}\sqrt{3}$
④ $\frac{25}{4}\sqrt{3}$　⑤ $\frac{27}{4}\sqrt{3}$

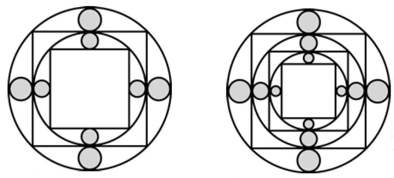
26. 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원에 내접하는 정사각형을 그린다. 원의 내부와 정사각형의 외부에 모두 접하는 가장 큰 원 4개를 그려 어둡게 칠한다.



여기에 아래의 과정을 반복한다.

<과정>

ㄱ. 안에 있는 정사각형에 내접하는 원을 그리고 그 원에 내접하는 정사각형을 그린다.
ㄴ. 새로 그려진 원의 내부와 정사각형 외부에 모두 접하는 가장 큰 원 4개를 어둡게 칠한다.



[$n=2$일 때]　[$n=3$일 때]

정사각형의 개수가 모두 n일 때, 어두운 부분의 넓이를 S_n이라 하자. 이 때 $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?

[4점][2008년 5월]

① $(\sqrt{13}-2\sqrt{3})\pi$　② $(2\sqrt{3}-\sqrt{11})\pi$
③ $(\sqrt{11}-\sqrt{10})\pi$　④ $(\sqrt{10}-3)\pi$
⑤ $(3-2\sqrt{2})\pi$

27. 그림과 같이 길이가 8인 선분 AB가 있다.

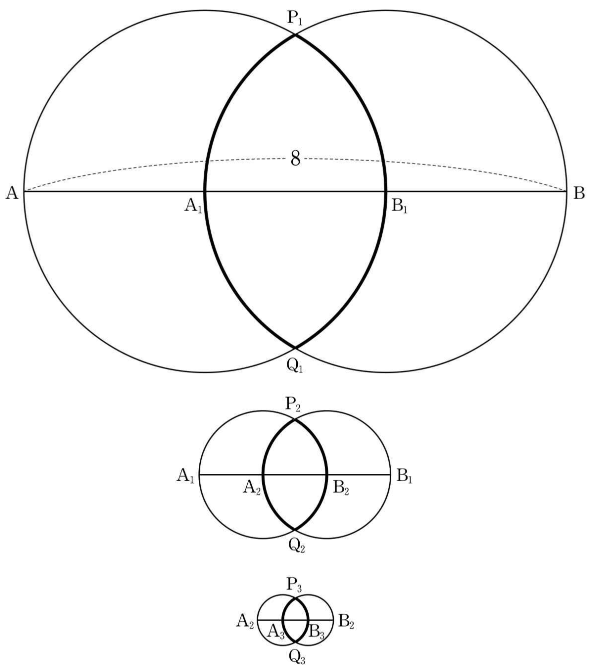
선분 AB의 삼등분점 A_1, B_1을 중심으로 하고 선분 A_1B_1을 반지름으로 하는 두 원이 서로 만나는 두 점을 각각 P_1, Q_1 이라고 하자.

선분 A_1B_1의 삼등분점 A_2, B_2를 중심으로 하고 선분 A_2B_2를 반지름으로 하는 두 원이 서로 만나는 두 점을 각각 P_2, Q_2 라고 하자.

선분 A_2B_2의 삼등분점 A_3, B_3을 중심으로 하고 선분 A_3B_3을 반지름으로 하는 두 원이 서로 만나는 두 점을 각각 P_3, Q_3 이라고 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 두 호 $P_nA_nQ_n$, $P_nB_nQ_n$의 길이의 합을 l_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$의 값은?

[3점][2008년 6월]



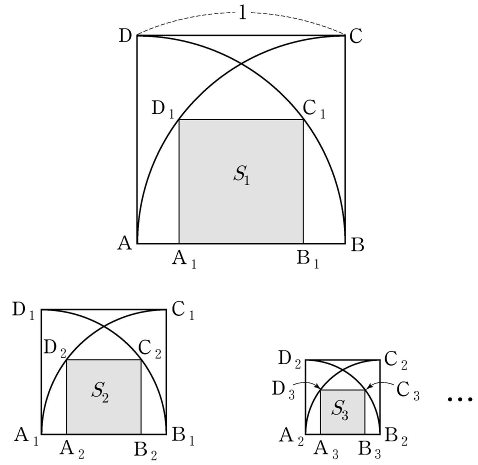
① $\frac{10}{3}\pi$　② 4π　③ $\frac{14}{3}\pi$　④ $\frac{16}{3}\pi$　⑤ 6π

28. 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD가 있다. 그림과 같이 정사각형 ABCD 안에 두 점 A, B를 각각 중심으로 하고 변 AB를 반지름으로 하는 2개의 사분원을 그린다. 이 두 사분원의 공통부분에 내접하는 정사각형을 $A_1B_1C_1D_1$이라 하자.

정사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 안에 두 점 A_1, B_1을 각각 중심으로 하고 변 A_1B_1을 반지름으로 하는 2개의 사분원을 그린다. 이 두 사분원의 공통부분에 내접하는 정사각형을 $A_2B_2C_2D_2$라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 정사각형 $A_nB_nC_nD_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?

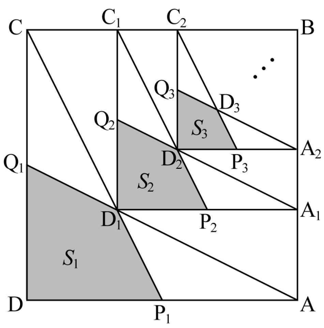
[4점][2008년 9월]



① $\frac{3}{8}$　② $\frac{9}{16}$　③ $\frac{4}{5}$　④ $\frac{9}{8}$　⑤ $\frac{23}{16}$

29. 한 변의 길이가 4인 정사각형 ABCD가 있다. 그림과 같이 두 선분 AD, DC의 중점을 각각 P_1, Q_1이라 하고, 두 선분 AQ_1, CP_1의 교점을 D_1이라 하자. 이때, 사각형 $DP_1D_1Q_1$의 넓이를 S_1이라 하자.
선분 BD_1을 대각선으로 하는 정사각형을 $BC_1D_1A_1$이라 하자. 두 선분 A_1D_1, D_1C_1의 중점을 각각 P_2, Q_2라 하고, 두 선분 A_1Q_2, C_1P_2의 교점을 D_2라 하자. 이때, 사각형 $D_1P_2D_2Q_2$의 넓이를 S_2라 하자.
선분 BD_2를 대각선으로 하는 정사각형을 $BC_2D_2A_2$라 하자. 두 선분 A_2D_2, D_2C_2의 중점을 각각 P_3, Q_3이라 하고, 두 선분 A_2Q_3, C_2P_3의 교점을 D_3이라 하자. 이때, 사각형 $D_2P_3D_3Q_3$의 넓이를 S_3이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 얻은 n번째 사각형의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?

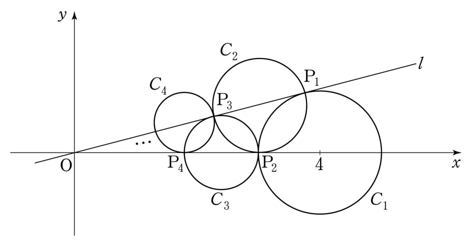
[4점][2008년 10월]



① $\frac{24}{5}$　② $\frac{16}{3}$　③ $\frac{27}{5}$　④ $\frac{20}{3}$　⑤ $\frac{36}{5}$

30. 좌표평면에 원 $C_1 : (x-4)^2+y^2=1$이 있다. 그림과 같이 원점에서 원 C_1에 기울기가 양수인 접선 l을 그었을 때 생기는 접점을 P_1이라 하자. 중심이 직선 l 위에 있고 점 P_1을 지나며 x축에 접하는 원을 C_2라 하고 이 원과 x축의 접점을 P_2라 하자. 중심이 x축 위에 있고 점 P_2를 지나며 직선 l에 접하는 원을 C_3이라 하고 이 원과 직선 l의 접점을 P_3이라 하자.
중심이 직선 l 위에 있고 점 P_3을 지나며 x축에 접하는 원을 C_4라 하고 이 원과 x축의 접점을 P_4라 하자.
이와 같은 과정을 계속할 때, 원 C_n의 넓이를 S_n이라 하자.
$\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? (단, 원 C_{n+1}의 반지름의 길이는 원 C_n의 반지름의 길이보다 작다.)

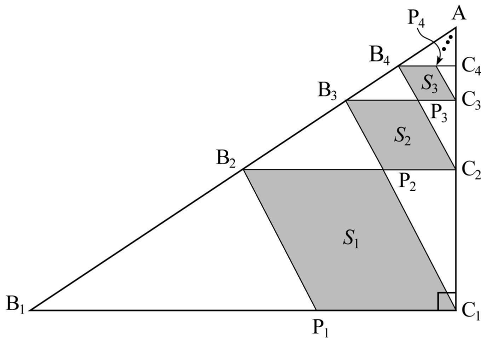
[4점][2009학년도 수능]



① $\frac{3}{2}\pi$　② 2π　③ $\frac{5}{2}\pi$　④ 3π　⑤ $\frac{7}{2}\pi$

31. $\angle A=60^\circ$, $\angle B_1=30^\circ$, $\overline{AC_1}=6$인 직각삼각형 AB_1C_1이 있다. 선분B_1C_1을 $2:1$로 내분하는 점을 P_1이라 하자. 두 선분 AB_1, AC_1의 중점을 각각 B_2, C_2라 하고, 선분 B_2C_2를 $2:1$로 내분하는 점을 P_2라 할 때, 네 점 B_2, P_1, C_1, P_2를 꼭짓점으로 하는 사각형 $B_2P_1C_1P_2$를 만든다. 두 선분 AB_2, AC_2의 중점을 각각 B_3, C_3이라 하고, 선분 B_3C_3을 $2:1$로 내분하는 점을 P_3이라 할 때, 네 점 B_3, P_2, C_2, P_3을 꼭짓점으로 하는 사각형 $B_3P_2C_2P_3$을 만든다. 두 선분 AB_3, AC_3의 중점을 각각 B_4, C_4라 하고, 선분 B_4C_4를 $2:1$로 내분하는 점을 P_4라 할 때, 네 점 B_4, P_3, C_3, P_4를 꼭짓점으로 하는 사각형$B_4P_3C_3P_4$를 만든다. 이와 같은 과정을 계속할 때, 사각형 $B_{n+1}P_nC_nP_{n+1}$의 넓이를 S_n $(n=1, 2, 3, \cdots)$ 이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?

[3점][2009년 3월]



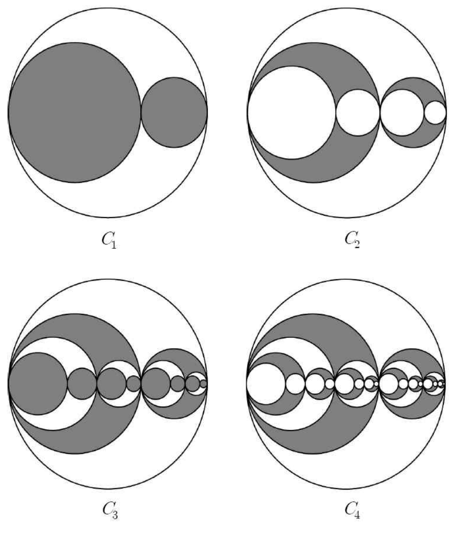
① $8\sqrt{3}$ ② $7\sqrt{3}$ ③ $6\sqrt{3}$ ④ $5\sqrt{3}$ ⑤ $4\sqrt{3}$

32. 원에 다음 과정을 실행한다.

[과정] Ⅰ. 원의 지름을 2:1로 내분하는 점을 잡는다. Ⅱ. 이 원에 내접하면서 Ⅰ의 내분점에서 서로 외접하는 두 개의 원을 그린다.

지름의 길이가 6인 원이 있다. 이 원에 [과정]을 실행하여 그린 2개의 원의 내부를 색칠하여 얻어진 그림을 C_1이라 하자. 그림 C_1에서 새로 그려진 2개의 원에 각각 [과정]을 실행하여 그린 4개의 원의 내부를 제외하여 얻어진 그림을 C_2라 하자. 그림 C_2에서 새로 그려진 4개의 원에 각각 [과정]을 실행하여 그린 8개의 원의 내부를 색칠하여 얻어진 그림을 C_3이라 하자. 그림 C_3에서 새로 그려진 8개의 원에 각각 [과정]을 실행하여 그린 16개의 원의 내부를 제외하여 얻어진 그림을 C_4라 하자. 이와 같은 방법으로 n번째 얻어진 그림 C_n에서 색칠된 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{q}{p}\pi$($p$와 q는 서로소인 자연수)이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, 모든 원의 중심은 처음 원의 한 지름 위에 있다.)

[4점][2009년 4월]



⋯

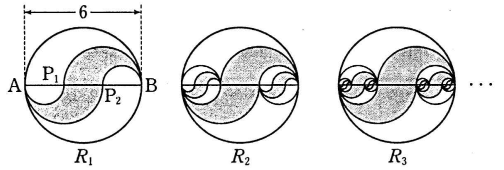
33. 그림과 같이 길이가 6인 선분 AB를 지름으로 하는 원을 그리고, 선분 AB의 3등분점을 각각 P_1, P_2라 하고 선분 AP_1을 지름으로 하는 원의 아래쪽 반원, 선분 AP_2를 지름으로 한는 원의 아래쪽 반원, 선분 P_2B를 지름으로 하는 원의 위쪽 반원, 선분 P_1B를 지름으로 하는 원의 위쪽 반원을 경계로 하여 만든 ∽ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 선분 AB 위의 색칠되지 않은 두 선분 AP_1, P_2B를 각각 지름으로 하는 두 원을 그리고, 이 두 원 안에 각각 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 만들어지는 두 ∽ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

그림 R_2에서 두 선분 AP_1, P_2B 위의 색칠되지 않은 네 선분을 각각 지름으로 하는 네 원을 그리고, 이 네 원 안에 각각 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 네 ∽ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 모든 ∽ 모양의 도형의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?

[3점][2009년 6월]



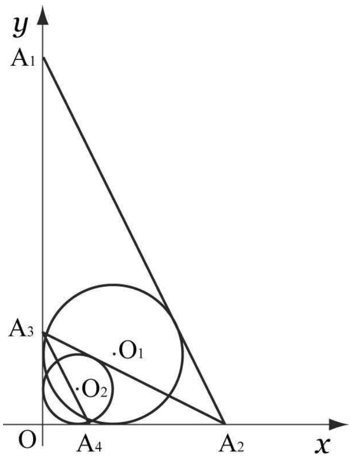
① $\frac{25}{7}\pi$ ② $\frac{27}{7}\pi$ ③ $\frac{29}{7}\pi$ ④ $\frac{31}{7}\pi$ ⑤ $\frac{33}{7}\pi$

34. 그림과 같이 세 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}_1(0,\ 4)$, $\mathrm{A}_2(2,\ 0)$으로 이루어진 $\triangle \mathrm{OA}_1\mathrm{A}_2$에 내접하는 원을 O_1이라 하자. y축 위의 점 A_3이 선분 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$의 기울기와 선분 $\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$의 기울기의 곱이 1이 되도록 하는 점일 때, $\triangle \mathrm{OA}_2\mathrm{A}_3$에 내접하는 원을 O_2라 하자.

x축 위의 점 A_4가 선분 $\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$의 기울기와 선분 $\mathrm{A}_3\mathrm{A}_4$의 기울기의 곱이 1이 되도록 하는 점일 때, $\triangle \mathrm{OA}_3\mathrm{A}_4$에 내접하는 원을 O_3이라 하자.

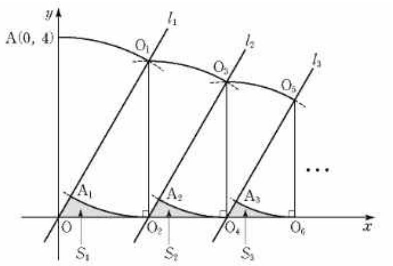
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 생기는 $\triangle \mathrm{OA}_n\mathrm{A}_{n+1}$에 내접하는 원을 O_n이라 하고, O_n의 반지름의 길이를 r_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} r_n = a - 2\sqrt{b}$ (a, b는 자연수)이다. $a+b$의 값을 구하시오.

[4점][2009년 7월]



35. 그림과 같이 원점 O를 지나고 기울기가 $\sqrt{3}$인 직선 l_1과 점 A$(0, 4)$가 있다.
점 O를 중심으로 하고 선분 OA를 반지름으로 하는 원이 직선 l_1과 제1사분면에서 만나는 점을 O_1이라 하자. 점 O_1에서 x축에 내린 수선의 발을 O_2라 하자. 점 O_2을 중심으로 하고 선분 $\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2$를 반지름으로 하는 원이 선분 OO_1과 만나는 점을 A_1이라 하자. 선분 $\mathrm{A}_1\mathrm{O}$, 선분 OO_2, 호 $\mathrm{O}_2\mathrm{A}_1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1이라 하자.
점 O_2를 중심으로 하고 선분 $\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2$를 반지름으로 하는 원이 점 O_2를 지나고 직선 l_1에 평행한 직선 l_2와 제1사분면에서 만나는 점을 O_3이라 하자. 점 O_3에서 x축에 내린 수선의 발을 O_4라 하자. 점 O_3을 중심으로 하고 선분 $\mathrm{O}_3\mathrm{O}_4$를 반지름으로 하는 원이 선분 $\mathrm{O}_2\mathrm{O}_3$과 만나는 점을 A_2이라 하자. 선분 $\mathrm{A}_2\mathrm{O}_2$, 선분 $\mathrm{O}_2\mathrm{O}_4$, 호 $\mathrm{O}_4\mathrm{A}_2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 도형의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?

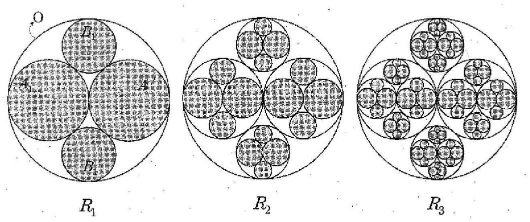
[3점][2009년 9월]



① $4\sqrt{3}-2\pi$ ② $8\sqrt{3}-4\pi$ ③ $4\sqrt{3}-\pi$
④ $8\sqrt{3}-2\pi$ ⑤ $16\sqrt{3}-4\pi$

36. 반지름의 길이가 1인 원 O가 있다.
원 O의 중심에서 서로 외접하고 원 O에 내접하는 두 원 A_1, A_1'을 그린 후 두 원 A_1과 A_1'에 외접하며 원 O에 내접하는 두 원 B_1, B_1'을 그려서 얻은 그림을 R_1이라 하자. 새로 그려진 네 원 A_1, A_1', B_1, B_1'의 내부에 그림 R_1의 제작과정을 반복하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻어진 그림을 R_n이라 하자.
또한, 그림 R_1, R_2, …, R_n, …각각에 아래와 같이 어둡게 색칠을 하자. 그림 R_n의 어두운 부분의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?

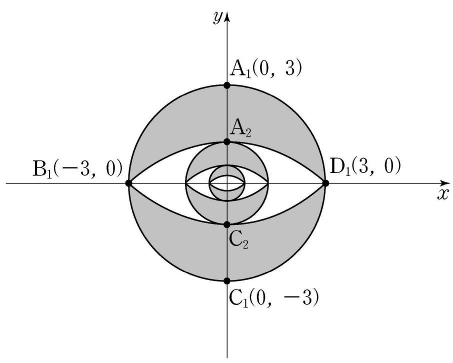
[4점][2009년 10월]



① π ② $\frac{9}{5}\pi$ ③ $\frac{13}{5}\pi$
④ $\frac{17}{5}\pi$ ⑤ $\frac{21}{5}\pi$

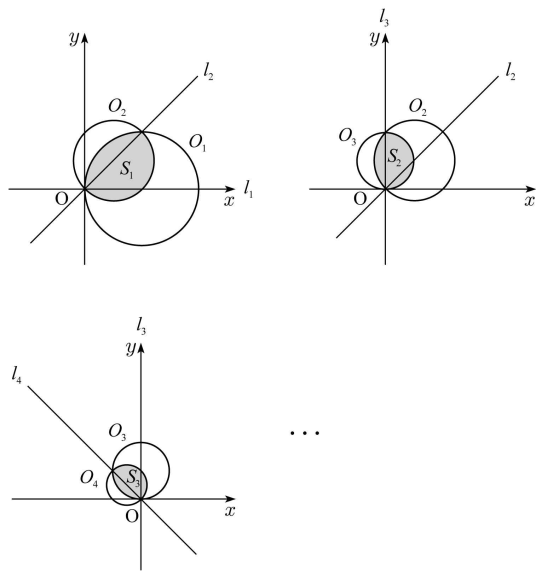
37. 그림과 같이 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 원 O_1을 그리고, 원 O_1이 좌표축과 만나는 네 점을 각각 $\mathrm{A}_1(0,\ 3)$, $\mathrm{B}_1(-3,\ 0)$, $\mathrm{C}_1(0,\ -3)$, $\mathrm{D}_1(3,\ 0)$이라 하자.
두 점 B_1, D_1을 모두 지나고 두 점 A_1, C_1을 각각 중심으로 하는 두 원이 원 O_2의 내부에서 y축과 만나는 점을 각각 C_2, A_2라 하자.
호 $\mathrm{B}_1\mathrm{A}_1\mathrm{D}_1$과 호 $\mathrm{B}_1\mathrm{A}_2\mathrm{D}_1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1, 호 $\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1\mathrm{D}_1$과 호 $\mathrm{B}_1\mathrm{C}_2\mathrm{D}_1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 T_1이라 하자.
선분 $\mathrm{A}_2\mathrm{C}_2$를 지름으로 하는 원 O_2를 그리고, 원 O_2가 x축과 만나는 두 점을 각각 B_2, D_2라 하자. 두 점 B_2, D_2를 모두 지나고 두 점 A_2, C_2를 각각 중심으로 하는 두 원이 원 O_2의 내부에서 y축과 만나는 점을 각각 C_3, A_3이라 하자. 호 $\mathrm{B}_2\mathrm{A}_2\mathrm{D}_2$와 호 $\mathrm{B}_2\mathrm{A}_3\mathrm{D}_2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2, 호 $\mathrm{B}_2\mathrm{C}_2\mathrm{D}_2$와 호 $\mathrm{B}_2\mathrm{C}_3\mathrm{D}_2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 T_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 호 $\mathrm{B}_n\mathrm{A}_n\mathrm{D}_n$과 호 $\mathrm{B}_n\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{D}_n$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_n, 호 $\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$과 호 $\mathrm{B}_n\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{D}_n$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 T_n이라 할 때,
$\sum_{n=1}^{\infty}(S_n+T_n)$의 값은?

[4점][2010학년도 수능]



① $6(\sqrt{2}+1)$ ② $6(\sqrt{3}+1)$ ③ $6(\sqrt{5}+1)$
④ $9(\sqrt{2}+1)$ ⑤ $9(\sqrt{3}+1)$

38. 좌표평면에서 점 $(3,\ 0)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 원을 O_1이라 하고, x축을 직선 l_1이라 하자.
직선 l_1을 원점을 중심으로 하여 $45°$ 만큼 회전시킨 직선을 l_2라 하고, 직선 l_2와 원 O_1의 두 교점을 지름의 양 끝점으로 하는 원을 O_2라 할 때, 두 원 O_1, O_2의 공통부분의 넓이를 S_1이라 하자.
직선 l_2를 원점을 중심으로 하여 $45°$ 만큼 회전시킨 직선을 l_3이라 하고, 직선 l_3과 원 O_2의 두 교점을 지름의 양 끝점으로 하는 원을 O_3이라 할 때, 두 원 O_2, O_3의 공통부분의 넓이를 S_2라 하자.
직선 l_3을 원점을 중심으로 하여 $45°$ 만큼 회전시킨 직선을 l_4라 하고, 직선 l_4와 원 O_3의 두 교점을 지름의 양 끝점으로 하는 원을 O_4라 할 때, 두 원 O_3, O_4의 공통부분의 넓이를 S_3이라 하자.



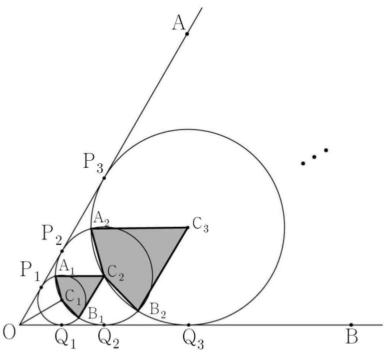
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}S_n$의 값은?

[4점][2010년 3월]

① $6(\pi-1)$ ② $7(\pi-1)$ ③ $8(\pi-1)$
④ $9(\pi-1)$ ⑤ $10(\pi-1)$

39. 그림과 같이 크기가 60° 인 $\angle \mathrm{AOB}$ 의 이등분선 위에 $\overline{\mathrm{OC_1}}=2$ 인 점 $\mathrm{C_1}$ 을 잡아 점 $\mathrm{C_1}$ 을 중심으로 하고 반직선 OA 와 OB 에 접하는 원 $\mathrm{C_1}$ 을 그릴 때, 원 $\mathrm{C_1}$ 과 반직선 OA, OB 와의 접점을 각각 $\mathrm{P_1}$, $\mathrm{Q_1}$ 이라 하자. 점 $\mathrm{C_1}$ 을 지나고 반직선 OA 와 OB 에 접하는 두 원 중에서 큰 원의 중심을 $\mathrm{C_2}$, 원 $\mathrm{C_2}$ 와 반직선 OA, OB 와의 접점을 각각 $\mathrm{P_2}$, $\mathrm{Q_2}$ 라 하고, 원 $\mathrm{C_1}$ 과 원 $\mathrm{C_2}$ 가 만나는 점을 각각 $\mathrm{A_1}$, $\mathrm{B_1}$ 이라 할 때, 사각형 $\mathrm{A_1C_1B_1C_2}$ 의 넓이를 S_1 이라 하자. 점 $\mathrm{C_2}$ 를 지나고 반직선 OA 와 OB 에 접하는 두 원 중에서 큰 원의 중심을 $\mathrm{C_3}$, 원 $\mathrm{C_3}$ 과 반직선 OA, OB 와의 접점을 각각 $\mathrm{P_3}$, $\mathrm{Q_3}$ 이라 하고, 원 $\mathrm{C_2}$ 와 원 $\mathrm{C_3}$ 이 만나는 점을 각각 $\mathrm{A_2}$, $\mathrm{B_2}$ 라 할 때, 사각형 $\mathrm{A_2C_2B_2C_3}$ 의 넓이를 S_2 라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 도형의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{4^n+3^n}$ 의 값은?

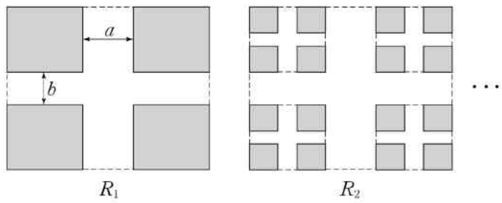
[4점][2010년 4월]



① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{15}}{8}$

40. 가로의 길이가 5이고 세로의 길이가 4인 직사각형에서 그림과 같이 가로의 폭 a가 직사각형의 가로의 길이의 $\frac{1}{4}$, 세로의 폭 b가 직사각형의 세로의 길이의 $\frac{1}{5}$인 ✚ 모양의 도형을 잘라내어 얻은 4개의 직사각형을 R_1이라 하고, 그 4개의 직사각형의 넓이의 합을 S_1이라 하자. R_1의 각 직사각형에서 가로의 폭이 각 직사각형의 가로의 길이의 $\frac{1}{4}$, 세로의 폭이 각 직사각형의 세로의 길이의 $\frac{1}{5}$인 ✚ 모양의 도형을 잘라내어 얻은 16개의 직사각형을 R_2라 하고, 그 16개의 직사각형의 넓이의 합을 S_2라 하자. 직사각형의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n$의 값은?

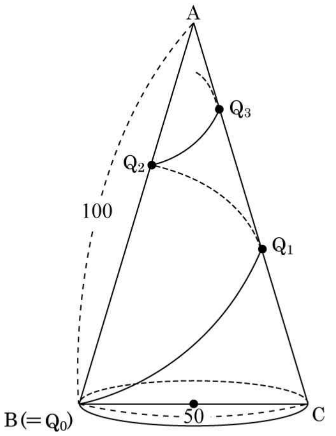
[4점][2010년 6월]



① 26 ② 30 ③ 34 ④ 38 ⑤ 42

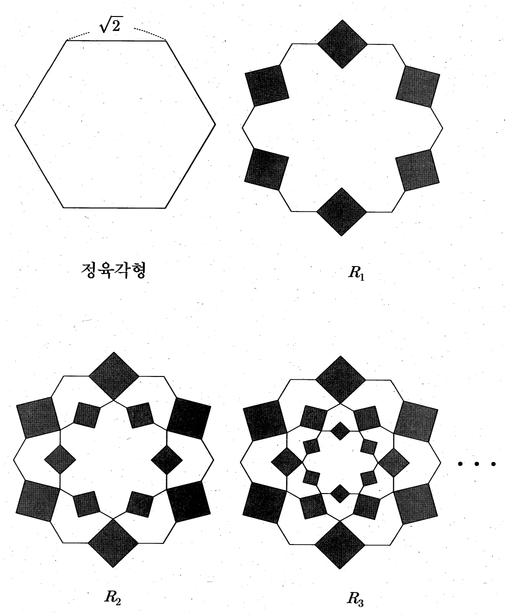
41. 그림과 같이 점 A를 꼭짓점으로 하고 선분 BC를 밑면의 지름으로 하며 $\overline{\mathrm{AB}}=100$, $\overline{\mathrm{BC}}=50$인 직원뿔이 있다. 모선 AC위의 점 Q_1은 점 B에서 원뿔의 옆면을 돌아 모선 AC에 최단 거리로 이르는 점이고, 모선 AB위의 점 Q_2는 점 Q_1에서 원뿔의 옆면을 돌아 모선 AB에 최단 거리로 이르는 점이다. 이와 같은 방법으로 점 Q_n은 모선 AB 또는 AC위의 점 Q_{n-1}에서 원뿔의 옆면을 돌아 다른 모선에 최단 거리로 이르는 점이라고 하자. 점 Q_{n-1}에서 점 Q_n에 이르는 최단 거리를 l_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$의 값은 $a+b\sqrt{2}$이다. $a+b$의 값을 구하시오.
(단, $\mathrm{B}=\mathrm{Q}_0$, a와 b는 유리수이다.)

[4점][2010년 7월]



42. 그림과 같이 한 변의 길이가 $\sqrt{2}$인 정육각형이 있다. 이 정육각형의 한 변을 1:3과 3:1로 내분하는 두 점을 대각선의 양 끝점으로 하는 정사각형을 각 변에 만들어 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1의 정사각형들의 꼭짓점 중에서 정육각형의 내부에 있는 꼭짓점들을 연결하여 정육각형을 만들고, 이 정육각형의 한 변을 1:3과 3:1로 내분하는 두 점을 대각선의 양 끝점으로 하는 정사각형을 각 변에 만들어 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번 째 얻은 그림 R_n의 모든 정사각형의 둘레의 길이의 합을 l_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} l_n$의 값은?

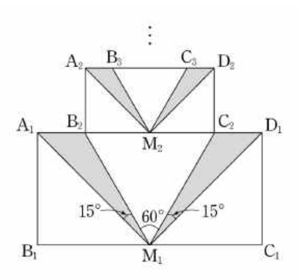
[4점][2010년 11월]



① $\frac{48(5+2\sqrt{3})}{13}$ ② $\frac{28(2+3\sqrt{3})}{15}$ ③ $\frac{18(1+2\sqrt{3})}{11}$
④ $\frac{6(3+2\sqrt{3})}{11}$ ⑤ $\frac{4(1+3\sqrt{3})}{13}$

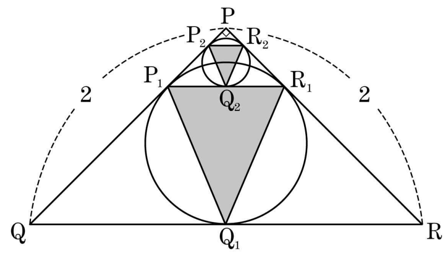
43. $\overline{A_1B_1}=1$, $\overline{B_1C_1}=2$인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 그림과 같이 선분 B_1C_1의 중점을 M_1이라 하고, 선분 A_1D_1위에 $\angle A_1M_1B_2=\angle C_2M_1D_1=15^\circ$, $\angle B_2M_1C_2=60^\circ$가 되도록 두 점 B_2, C_2를 정한다. 삼각형 $A_1M_1B_2$의 넓이와 삼각형 $C_2M_1D_1$의 넓이의 합을 S_1이라 하자. 사각형 $A_2B_2C_2D_2$가 $\overline{B_2C_2}=2\overline{A_2B_2}$인 직사각형이 되도록 그림과 같이 두 점 A_2, D_2를 정한다.
선분 B_2C_2의 중점을 M_2라 하고, 선분 A_2D_2 위에 $\angle A_2M_2B_3=\angle C_3M_2D_2=15^\circ$, $\angle B_3M_2C_3=60^\circ$가 되도록 두 점 B_3, C_3을 정한다. 삼각형 $A_2M_2B_3$의 넓이와 삼각형 $C_3M_2D_2$의 넓이의 합을 S_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 얻은 S_n에 대하여 $\sum_{n=1}^{n} S_n$의 값은?

[4점][2011학년도 수능]



① $\dfrac{2+\sqrt{3}}{6}$　② $\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$　③ $\dfrac{4+\sqrt{3}}{9}$
④ $\dfrac{5-\sqrt{3}}{5}$　⑤ $\dfrac{7-\sqrt{3}}{8}$

44. 그림과 같이 $\overline{PQ}=\overline{PR}=2$이고 $\angle QPR=90°$인 삼각형 PQR의 내접원과 세 변 PQ, QR, RP의 접점을 각각 P_1, Q_1, R_1이라 하자. 또, 삼각형 PP_1R_1의 내접원과 세 변 PP_1, P_1R_1, R_1P의 접점을 각각 P_2, Q_2, R_2라 하자.



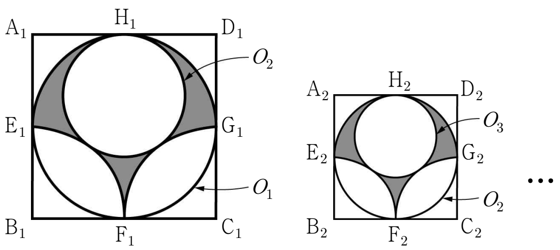
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 세 점 P_n, Q_n, R_n을 꼭짓점으로 하는 삼각형 $P_nQ_nR_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n = p+q\sqrt{2}$를 만족시키는 두 유리수 p, q의 합 $p+q$의 값은?

[4점][2011년 3월]

① $\dfrac{1}{7}$　② $\dfrac{2}{7}$　③ $\dfrac{3}{7}$　④ $\dfrac{4}{7}$　⑤ $\dfrac{5}{7}$

45. 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원 O_1에 외접하는 정사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$의 네 변 $\mathrm{A_1B_1}$, $\mathrm{B_1C_1}$, $\mathrm{C_1D_1}$, $\mathrm{D_1A_1}$의 중점을 각각 $\mathrm{E_1}$, $\mathrm{F_1}$, $\mathrm{G_1}$, $\mathrm{H_1}$이라 하자.
점 $\mathrm{B_1}$을 중심으로 하고 선분 $\mathrm{B_1F_1}$을 반지름으로 하는 부채꼴 $\mathrm{B_1F_1E_1}$의 호 $\mathrm{E_1F_1}$과 점 $\mathrm{C_1}$을 중심으로 하고 선분 $\mathrm{C_1F_1}$을 반지름으로 하는 부채꼴 $\mathrm{C_1F_1G_1}$의 호 $\mathrm{G_1F_1}$과 원 O_1의 호 $\mathrm{E_1H_1G_1}$로 둘러싸인 도형을 R_1이라 하자. R_1에 내접하는 원을 O_2라 하고 도형 R_1의 넓이에서 원 O_2의 넓이를 뺀 값을 S_1이라 하자.
원 O_2에 외접하는 정사각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$의 네 변 $\mathrm{A_2B_2}$, $\mathrm{B_2C_2}$, $\mathrm{C_2D_2}$, $\mathrm{D_2A_2}$의 중점을 각각 $\mathrm{E_2}$, $\mathrm{F_2}$, $\mathrm{G_2}$, $\mathrm{H_2}$라 하자. 점 $\mathrm{B_2}$를 중심으로 하고 선분 $\mathrm{B_2F_2}$를 반지름으로 하는 부채꼴 $\mathrm{B_2F_2E_2}$의 호 $\mathrm{E_2F_2}$와 점 $\mathrm{C_2}$를 중심으로 하고 선분 $\mathrm{C_2F_2}$를 반지름으로 하는 부채꼴 $\mathrm{C_2F_2G_2}$의 호 $\mathrm{G_2F_2}$와 원 O_2의 호 $\mathrm{E_2H_2G_2}$로 둘러싸인 도형을 R_2라 하자. R_2에 내접하는 원을 O_3이라 하고 도형 R_2의 넓이에서 원 O_3의 넓이를 뺀 값을 S_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 호 $\mathrm{E}_n\mathrm{F}_n$, 호 $\mathrm{G}_n\mathrm{F}_n$, 호 $\mathrm{E}_n\mathrm{H}_n\mathrm{G}_n$으로 둘러싸인 도형을 R_n이라 하고 R_n에 내접하는 원을 O_{n+1}이라 하자. 도형 R_n의 넓이에서 원 O_{n+1}의 넓이를 뺀 값을 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?

[4점][2011년 4월]

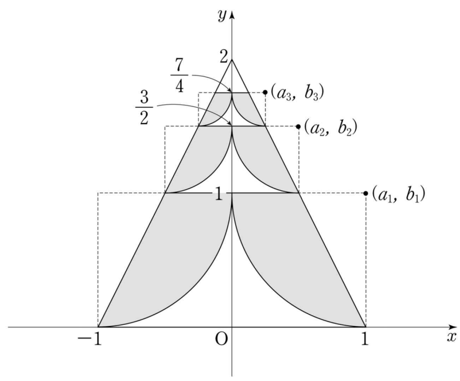


① $\dfrac{9-2\pi}{3}$ ② $\dfrac{18-4\pi}{5}$ ③ $\dfrac{9-2\pi}{2}$
④ $\dfrac{18-4\pi}{3}$ ⑤ $9-2\pi$

46. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 일반항이 각각

$$a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},\quad b_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

이다. 좌표평면에서 중심이 $(a_n,\ b_n)$ 이고 y 축에 접하는 원의 내부와 연립부등식 $\begin{cases} y\le b_n \\ 2x+y-2\le 0 \end{cases}$ 이 나타내는 영역의 공통부분을 P_n 이라 하고, y 축에 대하여 P_n 과 대칭인 영역을 Q_n 이라 하자. P_n 의 넓이와 Q_n 의 넓이의 합을 S_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 의 값은?

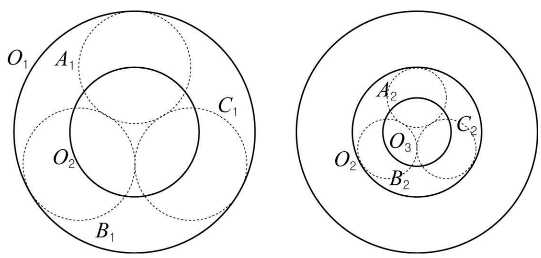


[4점][2011년 6월]

① $\dfrac{5(\pi-1)}{9}$ ② $\dfrac{11(\pi-1)}{18}$ ③ $\dfrac{2(\pi-1)}{3}$
④ $\dfrac{13(\pi-1)}{18}$ ⑤ $\dfrac{7(\pi-1)}{9}$

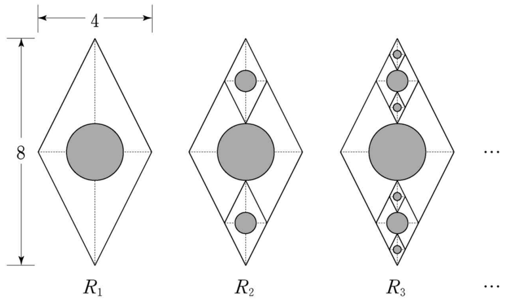
47. 반지름의 길이가 3인 원 O_1이 있다. 그림과 같이 원 O_1에 내접하고 서로 외접하게 그린 반지름의 길이가 같은 세 원 A_1, B_1, C_1의 중심을 지나는 원을 O_2라 하자. 원 O_2에 내접하고 서로 외접하게 그린 반지름의 길이가 같은 세 원 A_2, B_2, C_2의 중심을 지나는 원을 O_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 그린 원 O_n의 둘레의 길이를 l_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$의 값은?

[4점][2011년 7월]



① $(5+4\sqrt{3})\pi$ ② $(6+4\sqrt{3})\pi$ ③ $(7+4\sqrt{3})\pi$
④ $(8+4\sqrt{3})\pi$ ⑤ $(9+4\sqrt{3})\pi$

48. 그림과 같이 두 대각선의 길이가 각각 8, 4 인 마름모 내부에 두 대각선의 교점을 중심으로 하고 짧은 대각선의 길이의 $\frac{1}{2}$ 을 지름으로 하는 원을 그려서 얻은 그림을 R_1 이라 하자. 그림 R_1 에 있는 마름모에 긴 대각선의 양 끝점으로부터 그 대각선과 원의 두 교점 중 가까운 점까지의 선분을 각각 긴 대각선으로 하고, 마름모의 이웃하는 두 변 위에 짧은 대각선의 양 끝점이 놓이도록 마름모를 2 개 그린다. 새로 그려진 각 마름모에서, 두 대각선의 교점을 중심으로 하고 짧은 대각선의 길이의 $\frac{1}{2}$ 을 지름으로 하는 원을 그려서 얻은 그림을 R_2 라 하자. 그림 R_2 에 있는 작은 두 마름모에 긴 대각선의 양 끝점으로부터 그 대각선과 원의 두 교점 중 가까운 점까지의 선분을 각각 긴 대각선으로 하고, 마름모의 이웃하는 두 변 위에 짧은 대각선의 양 끝점이 놓이도록 마름모를 4 개 그린다. 새로 그려진 각 마름모에서, 두 대각선의 교점을 중심으로 하고 짧은 대각선의 길이의 $\frac{1}{2}$ 을 지름으로 하는 원을 그려서 얻은 그림을 R_3 이라 하자. 이와 같은 방법으로 n 번째 얻은 그림 R_n 에 있는 모든 원의 넓이의 합을 S_n 이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$ 의 값은?

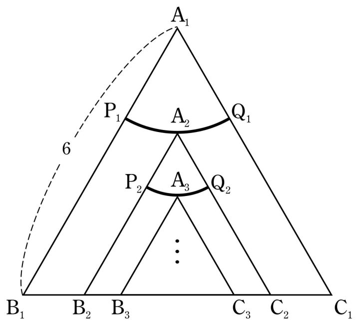


[3점][2011년 9월]

① $\frac{16}{13}\pi$ ② $\frac{32}{25}\pi$ ③ $\frac{4}{3}\pi$ ④ $\frac{32}{23}\pi$ ⑤ $\frac{16}{11}\pi$

49. 그림과 같이 한 변의 길이가 6인 정삼각형 $\mathrm{A_1B_1C_1}$이 있다. 꼭짓점 $\mathrm{A_1}$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{1}{3}\overline{\mathrm{A_1B_1}}$인 원이 삼각형 $\mathrm{A_1B_1C_1}$과 만나는 점을 각각 $\mathrm{P_1}$, $\mathrm{Q_1}$이라 하고 삼각형 $\mathrm{A_1B_1C_1}$의 내부에 있는 호 $\mathrm{P_1Q_1}$을 이등분하는 점을 $\mathrm{A_2}$라 하자. 점 $\mathrm{A_2}$를 꼭짓점으로 하고 나머지 두 꼭짓점 $\mathrm{B_2}$, $\mathrm{C_2}$가 변 $\mathrm{B_1C_1}$ 위에 있는 정삼각형 $\mathrm{A_2B_2C_2}$를 그린다.

꼭짓점 $\mathrm{A_2}$를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{1}{3}\overline{\mathrm{A_2B_2}}$인 원이 삼각형 $\mathrm{A_2B_2C_2}$와 만나는 점을 각각 $\mathrm{P_2}$, $\mathrm{Q_2}$라 하고 삼각형 $\mathrm{A_2B_2C_2}$의 내부에 있는 호 $\mathrm{P_2Q_2}$를 이등분하는 점을 $\mathrm{A_3}$이라 하자. 점 $\mathrm{A_3}$을 꼭짓점으로 하고 나머지 두 꼭짓점 $\mathrm{B_3}$, $\mathrm{C_3}$이 변 $\mathrm{B_1C_1}$ 위에 있는 정삼각형 $\mathrm{A_3B_3C_3}$을 그린다.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 호 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$의 길이를 l_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$의 값은?

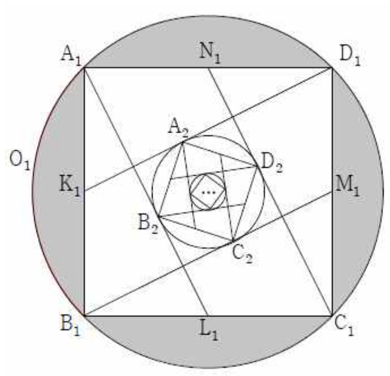


[4점][2011년 10월]

① $\sqrt{3}\pi$ ② $\frac{3\sqrt{3}}{2}\pi$ ③ $2\sqrt{3}\pi$
④ $\frac{5\sqrt{3}}{2}\pi$ ⑤ $3\sqrt{3}\pi$

50. 반지름의 길이가 1인 원 $\mathrm{O_1}$이 있다. 원 $\mathrm{O_1}$과 $\mathrm{O_1}$에 내접하는 정사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1이라 하자. 그림과 같이 선분 $\mathrm{B_1C_1}$, $\mathrm{C_1D_1}$, $\mathrm{D_1A_1}$, $\mathrm{A_1B_1}$의 각각의 중점 $\mathrm{L_1}$, $\mathrm{M_1}$, $\mathrm{N_1}$, $\mathrm{K_1}$에 대하여, 네 개의 선분 $\mathrm{A_1L_1}$, $\mathrm{B_1M_1}$, $\mathrm{C_1N_1}$, $\mathrm{D_1K_1}$의 교점을 꼭짓점으로 하는 사각형에 내접하는 원을 $\mathrm{O_2}$라 하자. $\mathrm{O_2}$와 원 $\mathrm{O_2}$에 내접하는 정사각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$로 둘러싸인 넓이를 S_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 얻은 S_n에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?

[4점][2011년 10월]



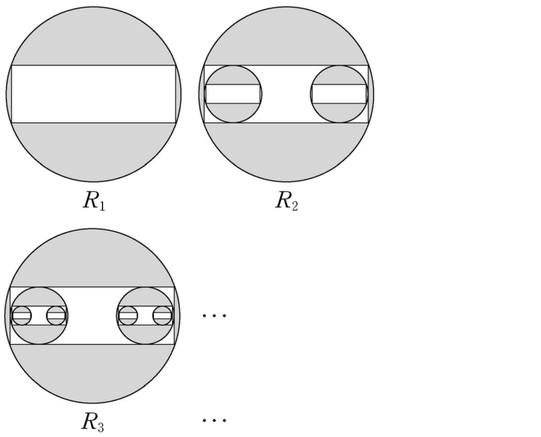
① $\frac{3(\pi-2)}{2}$ ② $\frac{4(\pi-2)}{3}$ ③ $\frac{5(\pi-2)}{4}$
④ $\frac{7(\pi-2)}{6}$ ⑤ $\frac{10(\pi-2)}{9}$

51. 반지름의 길이가 1 인 원이 있다. 그림과 같이 가로의 길이와 세로의 길이의 비가 3 : 1 인 직사각형을 이 원에 내접하도록 그리고, 원의 내부와 직사각형의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자.

그림 R_1 에서 직사각형의 세 변에 접하도록 원 2 개를 그린다. 새로 그려진 각 원에 그림 R_1 을 얻은 것과 같은 방법으로 직사각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자.

그림 R_2 에서 새로 그려진 직사각형의 세 변에 접하도록 원 4 개를 그린다. 새로 그려진 각 원에 그림 R_1 을 얻는 것과 같은 방법으로 직사각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_3 이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에서 색칠된 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$ 의 값은?



[4점][2012학년도 수능]

① $\frac{5}{4}\pi-\frac{5}{3}$ ② $\frac{5}{4}\pi-\frac{3}{2}$ ③ $\frac{4}{3}\pi-\frac{8}{5}$
④ $\frac{5}{4}\pi-1$ ⑤ $\frac{4}{3}\pi-\frac{16}{15}$

52. 그림과 같이 반지름의 길이가 $2\sqrt{3}$ 이고 $\angle A_1OB_1 = 60°$인 부채꼴 A_1OB_1이 있다.

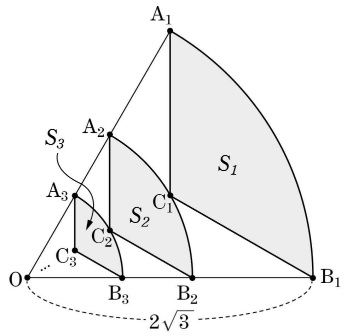
세 점 A_1, O, B_1을 꼭짓점으로 하는 삼각형 A_1OB_1의 무게중심을 C_1이라 할 때, 두 선분 A_1C_1, B_1C_1과 호 A_1B_1로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1이라 하자.

점 O를 중심으로 하고 점 C_1을 지나는 원이 두 선분 OA_1, OB_1과 만나는 점을 각각 A_2, B_2라 하자. 세 점 A_2, O, B_2를 꼭짓점으로 하는 삼각형 A_2OB_2의 무게중심을 C_2라 할 때, 두 선분 A_2C_2, B_2C_2와 호 A_2B_2로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2라 하자.

점 O를 중심으로 하고 점 C_2를 지나는 원이 두 선분 OA_2, OB_2와 만나는 점을 각각 A_3, B_3이라 하자. 세 점 A_3, O, B_3을 꼭짓점으로 하는 삼각형 A_3OB_3의 무게중심을 C_3이라 할 때, 두 선분 A_3C_3, B_3C_3과 호 A_3B_3으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 도형의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?

[4점][2012년 3월]



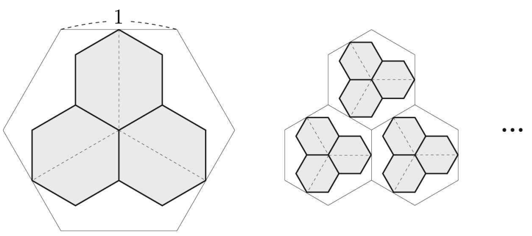
① $2\pi-\sqrt{3}$ ② $2\pi-2\sqrt{3}$ ③ $2\pi-3\sqrt{3}$
④ $3\pi-3\sqrt{3}$ ⑤ $3\pi-4\sqrt{3}$

53. 한 변의 길이가 1인 정육각형에서 서로 이웃하지 않는 세 변의 중점과 이 정육각형에 외접하는 원의 중심을 각각 연결하여 세 선분을 얻는다. 이 세 선분을 각각 가장 긴 대각선으로 하는 3개의 정육각형을 그려서 얻은 모양의 그림을 H_1이라 하고, 그림 H_1의 넓이를 S_1이라 하자.

그림 H_1에서 새로 그려진 세 정육각형 내부에 각각 그림 H_1을 얻은 것과 같은 방법으로 그려서 얻은 3개의 모양의 그림을 H_2라 하고, 그림 H_2의 넓이를 S_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 그려서 얻은 3^{n-1}개의 모양의 그림을 H_n이라 하고, 그림 H_n의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?

[4점][2012년 4월]



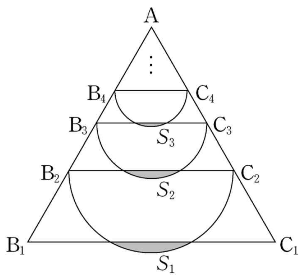
H_1　　　　　H_2

① $\frac{27}{11}\sqrt{3}$　　② $\frac{9}{4}\sqrt{3}$　　③ $\frac{27}{13}\sqrt{3}$

④ $\frac{27}{14}\sqrt{3}$　　⑤ $\frac{9}{5}\sqrt{3}$

54. 한 변의 길이가 3인 정삼각형 AB_1C_1이 있다. 그림과 같이 선분 AB_1과 선분 AC_1을 $2:1$로 내분하는 점을 각각 B_2, C_2이라 하고, 선분 B_2C_2를 지름으로 하는 원의 호 B_2C_2와 선분 B_1C_1로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1이라 하자.

정삼각형 AB_2C_2에서 선분 AB_2과 선분 AC_2을 $2:1$로 내분하는 점을 각각 B_3, C_3이라 하고, 선분 B_3C_3를 지름으로 하는 원의 호 B_3C_3와 선분 B_2C_2로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2이라 하자.



이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?

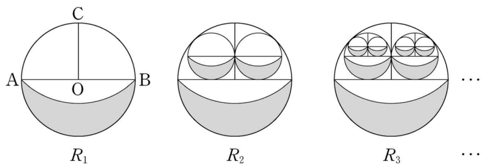
[3점][2012년 6월]

① $\frac{3\pi-5\sqrt{3}}{10}$　　② $\frac{6\pi-9\sqrt{3}}{20}$　　③ $\frac{4\pi-5\sqrt{3}}{10}$

④ $\frac{8\pi-9\sqrt{3}}{20}$　　⑤ $\frac{10\pi-9\sqrt{3}}{20}$

55. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 원 O가 있다. 원 O의 중심을 지나고 선분 AB와 수직인 직선이 원과 만나는 2개의 점 중 한 점을 C라 하자.
점 C를 중심으로 하고 점 A와 점 B를 지나는 원의 외부와 원 O의 내부의 공통부분인 ◡ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 색칠된 부분을 포함하지 않은 원 O의 반원을 이등분한 2개의 사분원에 각각 내접하는 원을 그리고, 이 2개의 원 안에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 ◡ 모양의 2개의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
그림 R_2에서 새로 생긴 2개의 도형에 색칠된 부분을 포함하지 않은 반원을 각각 이등분한 4개의 사분원에 각각 내접하는 원을 그리고, 이 4개의 원 안에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 ◡ 모양의 4개의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$의 값은?

[4점][2013학년도 수능]

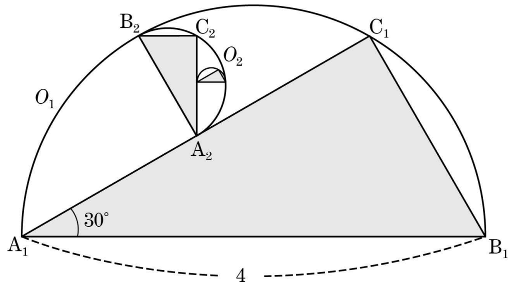


① $\dfrac{5+2\sqrt{2}}{7}$　② $\dfrac{5+3\sqrt{2}}{7}$　③ $\dfrac{5+4\sqrt{2}}{7}$

④ $\dfrac{5+5\sqrt{2}}{7}$　⑤ $\dfrac{5+6\sqrt{2}}{7}$

56. 그림과 같이 길이가 4인 선분 $\mathrm{A_1B_1}$을 지름으로 하는 반원 O_1을 그리고, 반원 O_1 위에 $\angle \mathrm{C_1A_1B_1} = 30°$가 되도록 점 $\mathrm{C_1}$을 정한다. 이때 삼각형 $\mathrm{A_1B_1C_1}$의 넓이를 S_1이라 하자.
선분 $\mathrm{A_1C_1}$의 중점을 $\mathrm{A_2}$라 하고, 호 $\mathrm{A_1B_2}$와 호 $\mathrm{C_1B_2}$의 길이가 같도록 점 $\mathrm{B_2}$를 정한다. 선분 $\mathrm{A_2B_2}$를 지름으로 하는 반원 O_2를 그리고, 반원 O_2 위에 $\angle \mathrm{C_2A_2B_2} = 30°$가 되도록 점 $\mathrm{C_2}$를 정한다. 이때 삼각형 $\mathrm{A_2B_2C_2}$의 넓이를 S_2라 하자.
선분 $\mathrm{A_2C_2}$의 중점을 $\mathrm{A_3}$이라 하고, 호 $\mathrm{A_2B_3}$과 호 $\mathrm{C_2B_3}$의 길이가 같도록 점 $\mathrm{B_3}$을 정한다. 선분 $\mathrm{A_3B_3}$을 지름으로 하는 반원 O_3을 그리고, 반원 O_3 위에 $\angle \mathrm{C_3A_3B_3} = 30°$가 되도록 점 $\mathrm{C_3}$을 정한다. 이때 삼각형 $\mathrm{A_3B_3C_3}$의 넓이를 S_3이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 얻은 삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?

[3점][2013년 3월]

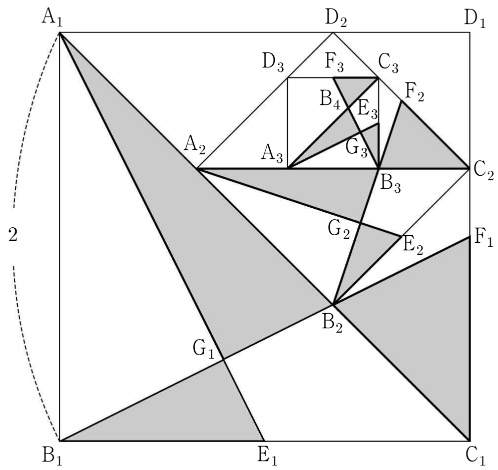


① $2\sqrt{3}$　② $\dfrac{32\sqrt{3}}{15}$　③ $\dfrac{34\sqrt{3}}{15}$

④ $\dfrac{12\sqrt{3}}{5}$　⑤ $\dfrac{38\sqrt{3}}{15}$

57. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 두 선분 B_1C_1, C_1D_1의 중점을 각각 E_1, F_1이라 하고, 두 선분 A_1E_1과 A_1C_1이 선분 B_1F_1과 만나는 두 점을 각각 G_1, B_2라 하자. 이때, 세 삼각형 $A_1G_1B_2$, $B_1E_1G_1$, $C_1F_1B_2$의 넓이의 합을 S_1이라 하자.
점 B_2를 지나고 선분 A_1B_2에 수직인 직선과 선분 C_1D_1이 만나는 점을 C_2라 하자. 점 C_2를 지나고 선분 B_2C_2에 수직인 직선과 선분 A_1D_1이 만나는 점을 D_2라 하고, 점 D_2에서 선분 A_1B_2에 내린 수선의 발을 A_2라 하자. 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$에서 두 선분 B_2C_2, C_2D_2의 중점을 각각 E_2, F_2라 하고, 두 선분 A_2E_2와 A_2C_2가 선분 B_2F_2와 만나는 두 점을 각각 G_2, B_3이라 하자. 이때, 세 삼각형 $A_2G_2B_3$, $B_2E_2G_2$, $C_2F_2B_3$의 넓이의 합을 S_2라 하자.
점 B_3을 지나고 선분 A_2B_3에 수직인 직선과 선분 C_2D_2가 만나는 점을 C_3이라 하자. 점 C_3을 지나고 선분 B_3C_3에 수직인 직선과 선분 A_2D_2가 만나는 점을 D_3이라 하고, 점 D_3에서 선분 A_2B_3에 내린 수선의 발을 A_3이라 하자. 정사각형 $A_3B_3C_3D_3$에서 두 선분 B_3C_3, C_3D_3의 중점을 각각 E_3, F_3이라 하고, 두 선분 A_3E_3과 A_3C_3이 선분 B_3F_3과 만나는 두 점을 각각 G_3, B_4라 하자. 이때, 세 삼각형 $A_3G_3B_4$, $B_3E_3G_3$, $C_3F_3B_4$의 넓이의 합을 S_3이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 세 삼각형 $A_nG_nB_{n+1}$, $B_nE_nG_n$, $C_nF_nB_{n+1}$의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?

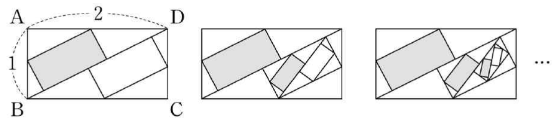
[4점][2013년 4월]



① $\frac{41}{35}$ ② $\frac{44}{35}$ ③ $\frac{46}{35}$ ④ $\frac{48}{35}$ ⑤ $\frac{51}{35}$

58. 직사각형 $ABCD$에서 $\overline{AB}=1$, $\overline{AD}=2$ 이다. 그림과 같이 직사각형 $ABCD$의 한 대각선에 의하여 만들어지는 두 직각삼각형의 내부에 두 변의 길이의 비가 1 : 2인 두 직사각형을 긴 변이 대각선 위에 놓이면서 두 직각삼각형에 각각 내접하도록 그리고 새로 그려진 두 직사각형 중 하나에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 새로 그려진 두 직사각형 중 색칠되어 있지 않은 직사각형에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 두 직사각형 중 하나에 색칠하여 얻은 그림을 R_2이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?

[4점][2013년 6월]

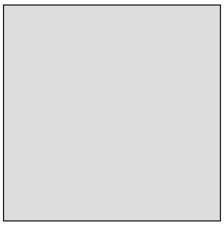


R_1 R_2 R_3

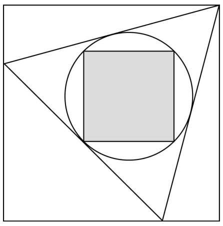
① $\frac{37}{61}$ ② $\frac{38}{61}$ ③ $\frac{39}{61}$ ④ $\frac{40}{61}$ ⑤ $\frac{41}{61}$

59. 한 변의 길이가 1인 정사각형을 R_1이라 하자. 그림과 같이 R_1의 한 꼭짓점과 정사각형 R_1의 변 위의 두 점을 세 꼭짓점으로 하는 정삼각형 하나를 그리고 이 정삼각형에 내접하는 원을 그린 후, 이 원에 내접하는 하나의 정사각형을 R_2라 하자.
정사각형 R_2의 한 꼭짓점과 정사각형 R_2의 변 위의 두 점을 세 꼭짓점으로 하는 정삼각형 하나를 그리고 이 정삼각형에 내접하는 원을 그린 후, 이 원에 내접하는 하나의 정사각형을 R_3이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 정사각형을 R_n이라 하자. 정사각형 R_n의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{a+b\sqrt{3}}{11}$이다. 이때 $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 자연수이다.)

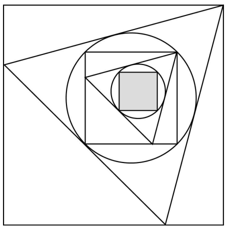
[4점][2013년 7월]



R_1



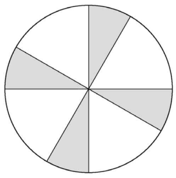
R_2



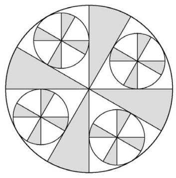
R_3

…

60. 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원에 중심각의 크기가 60°이고 반지름의 길이가 1인 부채꼴을 서로 겹치지 않게 4개 그린 후 원의 내부와 새로 그린 부채꼴의 외부에 공통으로 속하는 영역을 색칠하여 얻은 그림을 [그림 1]이라 하자.
[그림 1]에서 색칠되지 않은 각 부채꼴에 두 반지름과 호에 모두 접하도록 원을 그린다. 새로 그린 각 원에 중심각의 크기가 60°이고 반지름의 길이가 새로 그린 원의 반지름의 길이와 같은 부채꼴을 서로 겹치지 않게 4개씩 그린 후 새로 그린 원의 내부와 새로 그린 부채꼴의 외부에 공통으로 속하는 영역을 색칠하여 얻은 그림을 [그림 2]라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림에서 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



[그림 1]



[그림 2]

…

[4점][2013년 9월]

① $\frac{7}{15}\pi$ ② $\frac{8}{15}\pi$ ③ $\frac{3}{5}\pi$ ④ $\frac{2}{3}\pi$ ⑤ $\frac{11}{15}\pi$

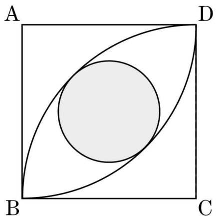
61. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 ABCD 안에 꼭짓점 A, C를 중심으로 하고 선분 AB, CD를 반지름으로 하는 사분원을 각각 그린다. 두 사분원의 호로 둘러싸인 부분에 내접하는 가장 큰 원을 그리고, 그 내부를 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 두 꼭짓점 A, C로부터 두 사분원의 호와 원이 접하는 두 점 중 가까운 점까지의 선분을 대각선으로 하는 정사각형을 각각 그린다. 이 2개의 정사각형 안에 그림 R_1에서 얻은 것과 같은 방법으로 만들어지는 2개의 원의 내부를 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

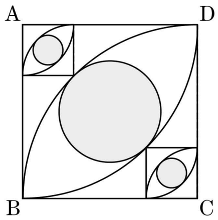
그림 R_2에 있는 작은 두 정사각형에서 두 꼭짓점으로부터 사분원과 원의 접점 중 가까운 점까지의 선분을 대각선으로 하는 정사각형을 각각 그린다. 이 4개의 정사각형 안에 그림 R_1에서 얻은 것과 같은 방법으로 만들어지는 4개의 원의 내부를 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에서 색칠된 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n \to \infty} S_n$의 값은?

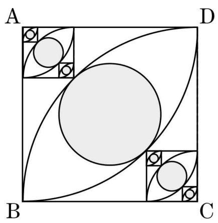
[4점][2013년 10월]



R_1



R_2



R_3

…

① $(3-2\sqrt{2})\pi$　② $(2-\sqrt{3})\pi$　③ $(\sqrt{2}-1)\pi$
④ $(4-2\sqrt{3})\pi$　⑤ $(2-\sqrt{2})\pi$

62. 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$에서 $\overline{A_1B_1}=1$, $\overline{A_1D_1}=2$이다. 그림과 같이 선분 A_1D_1과 선분 B_1C_1의 중점을 각각 M_1, N_1이라 하자.

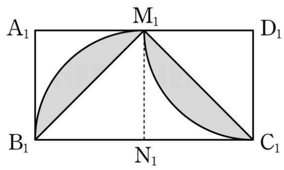
중심이 N_1, 반지름의 길이가 $\overline{B_1N_1}$이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 $N_1M_1B_1$을 그리고, 중심이 D_1, 반지름의 길이가 $\overline{C_1D_1}$이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 $D_1M_1C_1$을 그린다.

부채꼴 $N_1M_1B_1$의 호 M_1B_1과 선분 M_1B_1로 둘러싸인 부분과 부채꼴 $D_1M_1C_1$의 호 M_1C_1과 선분 M_1C_1로 둘러싸인 부분인  모양에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

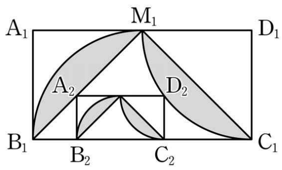
그림 R_1에 선분 M_1B_1 위의 점 A_2, 호M_1C_1 위의 점 D_2와 변 B_1C_1 위의 두 점 B_2, C_2를 꼭짓점으로 하고 $\overline{A_2B_2}$: $\overline{A_2D_2}$ = $1:2$인 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그리고, 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$에서 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 만들어지는 모양에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n라 할 때, $\lim_{n \to \infty} S_n$의 값은?

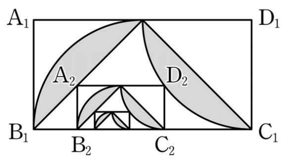
[4점][2014학년도 수능]



R_1



R_2



R_3

…

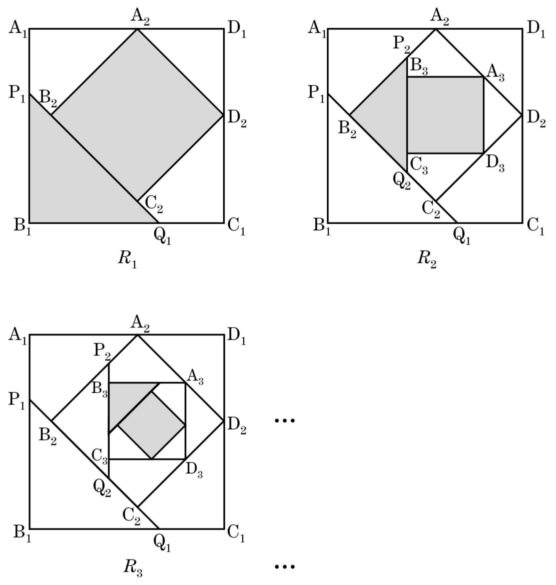
① $\frac{25}{19}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$　② $\frac{5}{4}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$　③ $\frac{25}{21}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$
④ $\frac{25}{22}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$　⑤ $\frac{25}{23}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$

63. 그림과 같이 한 변의 길이가 3인 정사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$에서 선분 $\mathrm{A_1B_1}$을 $1:2$로 내분하는 점을 $\mathrm{P_1}$, 선분 $\mathrm{B_1C_1}$을 $2:1$로 내분하는 점을 $\mathrm{Q_1}$이라 하자. 선분 $\mathrm{A_1D_1}$ 위의 점 $\mathrm{A_2}$, 선분 $\mathrm{P_1Q_1}$ 위의 두 점 $\mathrm{B_2}$, $\mathrm{C_2}$, 선분 $\mathrm{C_1D_1}$ 위의 점 $\mathrm{D_2}$를 네 꼭짓점으로 하는 정사각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$를 그리고 정사각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$의 내부와 삼각형 $\mathrm{P_1B_1Q_1}$의 내부를 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

정사각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$에서 선분 $\mathrm{A_2B_2}$를 $1:2$로 내분하는 점을 $\mathrm{P_2}$, 선분 $\mathrm{B_2C_2}$를 $2:1$로 내분하는 점을 $\mathrm{Q_2}$라 하자. 선분 $\mathrm{A_2D_2}$ 위의 점 $\mathrm{A_3}$, 선분 $\mathrm{P_2Q_2}$ 위의 두 점 $\mathrm{B_3}$, $\mathrm{C_3}$, 선분 $\mathrm{C_2D_2}$ 위의 점 $\mathrm{D_3}$을 네 꼭짓점으로 하는 정사각형 $\mathrm{A_3B_3C_3D_3}$을 그리고 정사각형 $\mathrm{A_3B_3C_3D_3}$의 내부와 삼각형 $\mathrm{P_2B_2Q_2}$의 내부를 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?

[4점][2014년 3월]



① $\frac{375}{49}$ ② $\frac{400}{49}$ ③ $\frac{425}{49}$ ④ $\frac{450}{49}$ ⑤ $\frac{475}{49}$

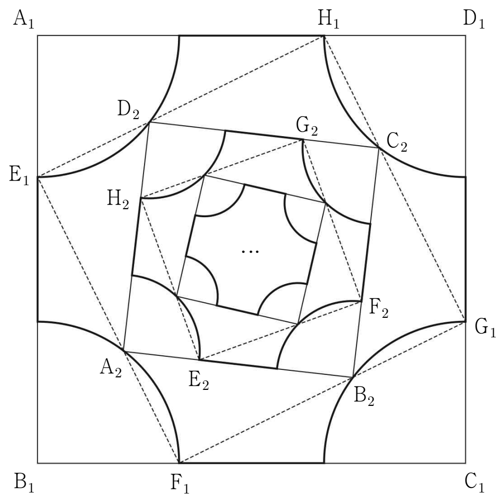
64. 그림과 같이 한 변의 길이가 3인 정사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$이 있다. 네 선분 $\mathrm{A_1B_1}$, $\mathrm{B_1C_1}$, $\mathrm{C_1D_1}$, $\mathrm{D_1A_1}$을 각각 $1:2$로 내분하는 점을 각각 $\mathrm{E_1}$, $\mathrm{F_1}$, $\mathrm{G_1}$, $\mathrm{H_1}$이라 하고, 정사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$의 네 꼭짓점을 중심으로 하고 네 선분 $\mathrm{A_1E_1}$, $\mathrm{B_1F_1}$, $\mathrm{C_1G_1}$, $\mathrm{D_1H_1}$을 각각 반지름으로 하는 4개의 사분원을 잘라내어 얻은 모양의 도형을 R_1이라 하자.

정사각형 $\mathrm{E_1F_1G_1H_1}$과 도형 R_1과의 교점 중 정사각형 $\mathrm{E_1F_1G_1H_1}$의 꼭짓점이 아닌 4개의 점을 $\mathrm{A_2}$, $\mathrm{B_2}$, $\mathrm{C_2}$, $\mathrm{D_2}$라 하자. 정사각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$에서 네 선분 $\mathrm{A_2B_2}$, $\mathrm{B_2C_2}$, $\mathrm{C_2D_2}$, $\mathrm{D_2A_2}$를 각각 $1:2$로 내분하는 점을 각각 $\mathrm{E_2}$, $\mathrm{F_2}$, $\mathrm{G_2}$, $\mathrm{H_2}$라 하고, 정사각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$의 네 꼭짓점을 중심으로 하고 네 선분 $\mathrm{A_2E_2}$, $\mathrm{B_2F_2}$, $\mathrm{C_2G_2}$, $\mathrm{D_2H_2}$를 각각 반지름으로 하는 4개의 사분원을 잘라내어 얻은 모양의 도형을 R_2라 하자.

정사각형 $\mathrm{E_2F_2G_2H_2}$에서 도형 R_2를 얻는 것과 같은 방법으로 얻은 모양의 도형을 R_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 모양의 도형 R_n의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?

[4점][2014년 4월]

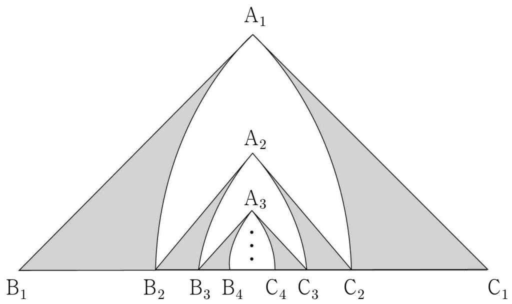


① $\frac{39}{32}(9-\pi)$ ② $\frac{5}{4}(9-\pi)$ ③ $\frac{21}{16}(9-\pi)$

④ $\frac{11}{8}(9-\pi)$ ⑤ $\frac{45}{32}(9-\pi)$

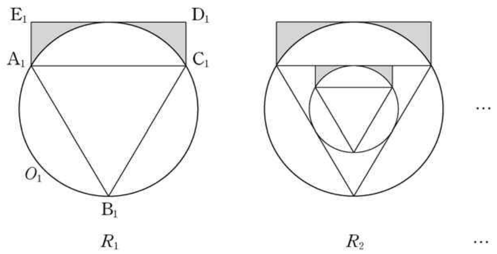
65. 그림과 같이 길이가 4인 선분 $\mathrm{B_1C_1}$을 빗변으로 하고 $\angle\mathrm{B_1A_1C_1}=90^\circ$인 직각이등변삼각형 $\mathrm{A_1B_1C_1}$을 그린다.
$\overline{\mathrm{B_1A_1}}=\overline{\mathrm{B_1C_2}}$이고 $\overline{\mathrm{C_1A_1}}=\overline{\mathrm{C_1B_2}}$인 선분 $\mathrm{B_1C_1}$ 위의 두 점 $\mathrm{C_2}$와 $\mathrm{B_2}$에 대하여 부채꼴 $\mathrm{B_1A_1C_2}$와 부채꼴 $\mathrm{C_1A_1B_2}$를 그린 후 생긴  모양에 색칠하고 그 넓이를 S_1이라 하자.
선분 $\mathrm{B_2C_2}$를 빗변으로 하고 삼각형 $\mathrm{A_1B_1C_1}$의 내부의 점 $\mathrm{A_2}$에 대하여 $\angle\mathrm{B_2A_2C_2}=90^\circ$인 직각이등변삼각형 $\mathrm{A_2B_2C_2}$를 그린다.
$\overline{\mathrm{B_2A_2}}=\overline{\mathrm{B_2C_3}}$이고 $\overline{\mathrm{C_2A_2}}=\overline{\mathrm{C_2B_3}}$인 선분 $\mathrm{B_2C_2}$ 위의 두 점 $\mathrm{C_3}$과 $\mathrm{B_3}$에 대하여 부채꼴 $\mathrm{B_2A_2C_3}$과 부채꼴 $\mathrm{C_2A_2B_3}$을 그린 후 생긴  모양에 색칠하고 그 넓이를 S_2라 하자.
선분 $\mathrm{B_3C_3}$을 빗변으로 하고 삼각형 $\mathrm{A_2B_2C_2}$의 내부의 점 $\mathrm{A_3}$에 대하여 $\angle\mathrm{B_3A_3C_3}=90^\circ$인 직각이등변삼각형 $\mathrm{A_3B_3C_3}$을 그린다.
$\overline{\mathrm{B_3A_3}}=\overline{\mathrm{B_3C_4}}$이고 $\overline{\mathrm{C_3A_3}}=\overline{\mathrm{C_3B_4}}$인 선분 $\mathrm{B_3C_3}$ 위의 두 점 $\mathrm{C_4}$와 $\mathrm{B_4}$에 대하여 부채꼴 $\mathrm{B_3A_3C_4}$와 부채꼴 $\mathrm{C_3A_3B_4}$를 그린 후 생긴  모양에 색칠하고 그 넓이를 S_3이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 얻은 S_n에 대하여
$\dfrac{1}{4-\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n=a+\sqrt{b}$ (a, b는 정수)일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오.

[4점][2014년 7월]



66. 반지름의 길이가 2인 원 O_1에 내접하는 정삼각형 $A_1B_1C_1$이 있다. 그림과 같이 직선 A_1C_1과 평행하고 점 B_1을 지나지 않는 원 O_1의 접선 위에 두 점 D_1, E_1을 사각형 $A_1C_1D_1E_1$이 직사각형이 되도록 잡고, 직사각형 $A_1C_1D_1E_1$의 내부와 원 O_1의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에 정삼각형 $A_1B_1C_1$에 내접하는 O_2와 원 O_2에 내접하는 정삼각형 $A_2B_2C_2$를 그리고, 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 직사각형 $A_2C_2D_2E_2$를 그리고 직사각형 $A_2C_2D_2E_2$의 내부와 원 O_2의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은?

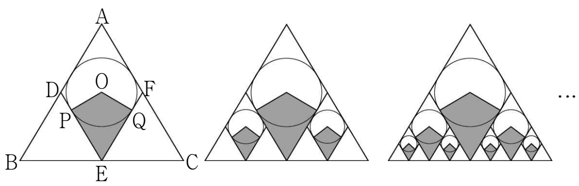
[4점][2015년 6월]



① $4\sqrt{3}-\dfrac{16}{9}\pi$　② $4\sqrt{3}-\dfrac{5}{3}\pi$　③ $4\sqrt{3}-\dfrac{4}{3}\pi$
④ $5\sqrt{3}-\dfrac{16}{9}\pi$　⑤ $5\sqrt{3}-\dfrac{5}{3}\pi$

67. 그림과 같이 한 변의 길이가 8인 정삼각형 ABC가 있다. 세 선분 AB, BC, CA의 중점을 각각 D, E, F라 하고 두 정삼각형 BED, ECF를 그린 후 마름모 ADEF에 중심이 O인 원을 내접하도록 그린다. 원과 두 선분 DE, EF의 접점을 각각 P, Q라 할 때, 사각형 OPEQ를 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 새로 그려진 두 개의 정삼각형의 내부에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 두 개의 사각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
그림 R_2에서 새로 그려진 네 개의 정삼각형의 내부에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 네 개의 사각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?

[4점][2015년 7월]

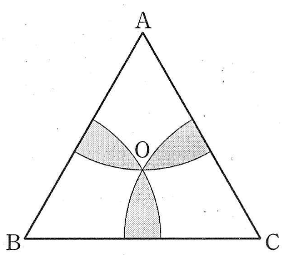


R_1 R_2 R_3 …

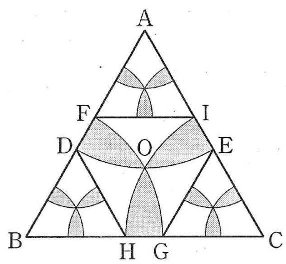
① $6\sqrt{3}$ ② $\frac{13}{2}\sqrt{3}$ ③ $7\sqrt{3}$
④ $\frac{15\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $8\sqrt{3}$

68. 그림과 같이 한 변의 길이가 6인 정삼각형 ABC가 있다. 정삼각형 ABC의 외심을 O라 할 때, 중심이 A 이고 반지름의 길이가 $\overline{AO}$인 원을 O_A, 중심이 B이고 반지름의 길이가 $\overline{BO}$인 원을 O_B, 중심이 C이고 반지름의 길이가 $\overline{CO}$인 원을 O_c라 하자.
원 O_A와 원 O_B의 내부의 공통부분, 원 O_A와 원 O_c의 내부의 공통부분, 원 O_B와 원 O_c의 내부의 공통부분 중 삼각형 ABC 내부에 있는 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에 원 O_A가 두 선분 AB, AC와 만나는 점을 각각 D, E, 원 O_B가 두 선분 AB, BC와 만나는 점을 각각 F, G, O_C가 두 선분 BC, AC와 만나는 점을 각각 H, I라 하고, 세 정삼각형 AFI, BHD, CEG에서 R_1을 얻는 과정과 같은 방법으로 각각 만들어지는 모양의 도형 3개에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
그림 R_2에 새로 만들어진 세 개의 정삼각형에 각각 R_1에서 R_2를 얻는 과정과 같은 방법으로 만들어지는 모양의 도형 9개에 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?

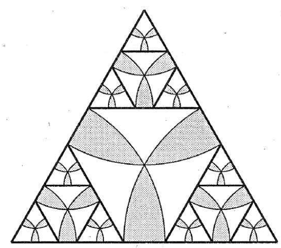
[4점][2015년 9월]



R_1



R_2

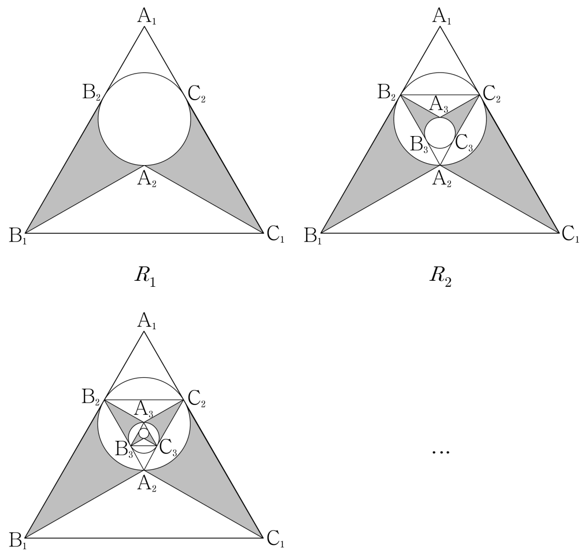


R_3 …

① $(2\pi-3\sqrt{3})(\sqrt{3}+3)$ ② $(\pi-\sqrt{3})(\sqrt{3}+3)$
③ $(2\pi-3\sqrt{3})(2\sqrt{3}+3)$ ④ $(\pi-\sqrt{3})(2\sqrt{3}+3)$
⑤ $(2\pi-2\sqrt{3})(\sqrt{3}+3)$

69. 그림과 같이 한 변의 길이가 3인 정삼각형 $A_1B_1C_1$의 무게중심을 A_2, 점 A_2를 지나는 원과 두 변 A_1B_1, A_1C_1의 접점을 각각 B_2, C_2라 하자. 호 A_2B_2, 선분 B_2B_1, 선분 B_1A_2와 호 A_2C_2, 선분 C_2C_1, 선분 C_1A_2로 둘러싸인 부분인  모양의 도형을 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 삼각형 $A_2B_2C_2$의 무게중심을 A_3, 점 A_3을 지나는 원과 두 변 A_2B_2, A_2C_2의 접점을 각각 B_3, C_3이라 하자. 그림 R_1에 호 A_3B_3, 선분 B_3B_2, 선분 B_2A_3과 호 A_3C_3, 선분 C_3C_2, 선분 C_2A_3으로 둘러싸인 부분인  모양의 도형을 색칠하고 추가하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
그림 R_2에서 삼각형 $A_3B_3C_3$의 무게중심을 A_4, 점 A_4를 지나는 원과 두 변 A_3B_3, A_3C_3의 접점을 각각 B_4, C_4라 하자. 그림 R_2에 호 A_4B_4, 선분 B_4B_3, 선분 B_3A_4와 호 A_4C_4, 선분 C_4C_3, 선분 C_3A_4로 둘러싸인 부분인  모양의 도형을 색칠하고 추가하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림을 R_n, 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?

[4점][2015년 10월]

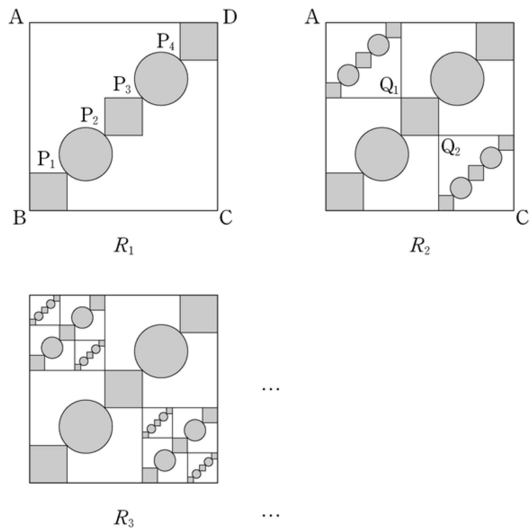


R_1 R_2 R_3

① $\frac{1}{16}(21\sqrt{3}-4\pi)$ ② $\frac{1}{16}(7\sqrt{3}-2\pi)$
③ $\frac{1}{8}(21\sqrt{3}-4\pi)$ ④ $\frac{1}{8}(7\sqrt{3}-2\pi)$
⑤ $\frac{1}{8}(21\sqrt{3}-2\pi)$

70. 그림과 같이 한 변의 길이가 5인 정사각형 ABCD의 대각선 BD의 5등분점을 점 B에서 가까운 순서대로 각각 P_1, P_2, P_3, P_4라 하고, 선분 BP_1, P_2P_3, P_4D를 각각 대각선으로 하는 정사각형과 선분 P_1P_2, P_2P_3를 각각 지름으로 하는 원을 그린 후,  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 선분 P_2P_3을 대각선으로 하는 정사각형의 꼭짓점 중 점 A와 가장 가까운 점을 Q_1, 점 C와 가장 가까운 점을 Q_2라 하자. 선분 AQ_1을 대각선으로 하는 정사각형과 선분 CQ_2를 대각선으로 하는 정사각형을 그리고, 새로 그려진 2개의 정사각형 안에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로  모양의 도형을 각각 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
그림 R_2에서 선분 AQ_1을 대각선으로 하는 정사각형과 선분 CQ_2를 대각선으로 하는 정사각형에 그림 R_1에서 그림 R_2를 얻는 것과 같은 방법으로  모양의 도형을 각각 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?

[3점][2016학년도 수능]



R_1 R_2 R_3

① $\frac{24}{17}(\pi+3)$ ② $\frac{25}{17}(\pi+3)$ ③ $\frac{26}{17}(\pi+3)$
④ $\frac{24}{17}(2\pi+1)$ ⑤ $\frac{27}{17}(2\pi+1)$

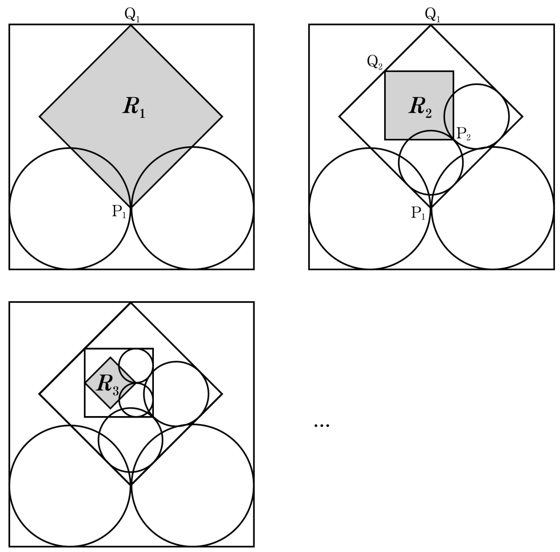
71. 한 변의 길이가 4인 정사각형이 있다. 그림과 같이 지름이 2인 두 원이 서로 한 점 P_1에서 만나고 정사각형의 두 변에 각각 접하도록 그린다. 정사각형의 네 변 중 원과 접하지 않는 변의 중점을 Q_1이라 하고, 선분 $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1$을 대각선으로 하는 정사각형 R_1을 그린다. 이때, R_1의 한 변의 길이를 l_1이라 하자.

지름이 $\dfrac{l_1}{2}$인 두 원이 서로 한 점 P_2에서 만나고 정사각형 R_1의 두 변에 각각 접하도록 그린다. 정사각형 R_1의 네 변 중 원과 접하지 않는 변의 중점을 Q_2라 하고, 선분 $\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2$를 대각선으로 하는 정사각형 R_2를 그린다. 이때, R_2의 한 변의 길이를 l_2라 하자.

지름이 $\dfrac{l_2}{2}$인 두 원이 서로 한 점 P_3에서 만나고 정사각형 R_2의 두 변에 각각 접하도록 그린다. 정사각형 R_2의 네 변 중 원과 접하지 않는 변의 중점을 Q_3이라 하고, 선분 $\mathrm{P}_3\mathrm{Q}_3$을 대각선으로 하는 정사각형 R_3을 그린다. 이때, R_3의 한 변의 길이를 l_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 그린 정사각형 R_n의 한 변의 길이를 l_n이라 할 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} l_n$의 값은?

[4점][2016년 3월]



① $\dfrac{12(3+4\sqrt{2})}{23}$ ② $\dfrac{24(2+\sqrt{2})}{23}$ ③ $\dfrac{12(1+4\sqrt{2})}{23}$

④ $\dfrac{3(3+2\sqrt{2})}{7}$ ⑤ $\dfrac{3(3+\sqrt{2})}{7}$

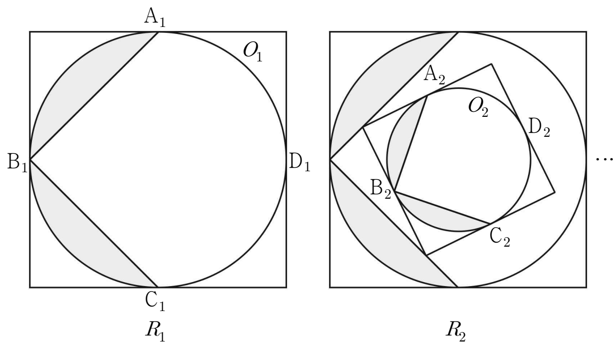
72. 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형에 내접하는 원 O_1이 있다. 정사각형과 원 O_1의 접점을 각각 A_1, B_1, C_1, D_1이라 할 때, 원 O_1과 두 선분 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1$, $\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1$로 둘러싸인 ☾ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 두 선분 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1$, $\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1$을 각각 $3:1$로 내분하는 두 점을 이은 선분을 한 변으로 하는 정사각형을 원 O_1의 내부에 그린다. 이 정사각형에 내접하는 원을 O_2라 하고 그 접점을 각각 A_2, B_2, C_2, D_2라 할 때, 원 O_2와 두 선분 $\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2$, $\mathrm{B}_2\mathrm{C}_2$로 둘러싸인 ☾ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

그림 R_2에서 두 선분 $\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2$, $\mathrm{B}_2\mathrm{C}_2$를 각각 $3:1$로 내분하는 두 점을 이은 선분을 한 변으로 하는 정사각형에 그림 R_1에서 그림 R_2를 얻는 것과 같은 방법으로 만들어진 ☾ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?

[4점][2016년 4월]

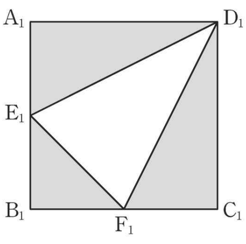


① $\dfrac{32}{11}(\pi-2)$ ② $\dfrac{34}{11}(\pi-2)$ ③ $\dfrac{36}{11}(\pi-2)$

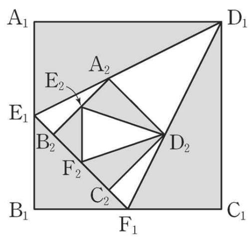
④ $\dfrac{32}{11}(\pi-1)$ ⑤ $\dfrac{34}{11}(\pi-1)$

73. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$에서 선분 A_1B_1과 선분 B_1C_1의 중점을 각각 E_1, F_1이라 하자.
정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 내부와 삼각형 $E_1F_1D_1$의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에 선분 D_1E_1 위의 점 A_2, 선분 D_1F_1 위의 점 D_2와 선분 E_1F_1 위의 두 점 B_2, C_2를 꼭짓점으로 하는 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그리고, 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 삼각형 $E_2F_2D_2$를 그리고 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 내부와 삼각형 $E_2F_2D_2$의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$의 값은?

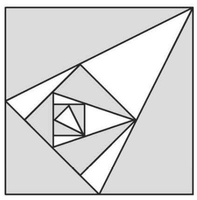
[4점][2016년 6월]



R_1



R_2

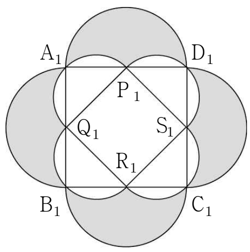


…

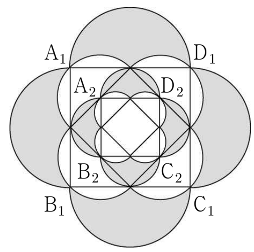
① $\frac{125}{37}$ ② $\frac{125}{38}$ ③ $\frac{125}{39}$
④ $\frac{25}{8}$ ⑤ $\frac{125}{41}$

74. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 네 변 A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1을 각각 지름으로 하는 반원을 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 외부에 그려 만들어진 4개의 호로 둘러싸인  모양의 도형을 E_1이라 하자. 네 변 D_1A_1, A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1의 중점 P_1, Q_1, R_1, S_1을 꼭짓점으로 하는 정사각형에 도형 E_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는  모양의 도형을 F_1이라 하자. 도형 E_1의 내부와 도형 F_1의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 G_1이라 하자.
그림 G_1에 네 변 P_1Q_1, Q_1R_1, R_1S_1, S_1P_1의 중점 A_2, B_2, C_2, D_2를 꼭짓점으로 하는 정사각형을 그리고 도형 E_1을 얻는 것과 같은 방법으로 새로 만들어지는  모양의 도형을 E_2라 하자. 네 변 D_2A_2, A_2B_2, B_2C_2, C_2D_2의 중점 P_2, Q_2, R_2, S_2를 꼭짓점으로 하는 정사각형을 그리고 도형 E_1을 얻는 것과 같은 방법으로 새로 만들어지는  모양의 도형을 F_2라 하자. 그림 G_1에 도형 E_2의 내부와 도형 F_2의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 G_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 G_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 T_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}T_n$의 값은?

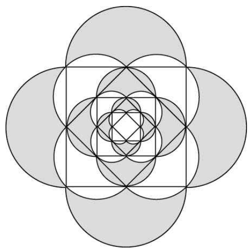
[4점][2016년 7월]



G_1



G_2


G_3

…

…

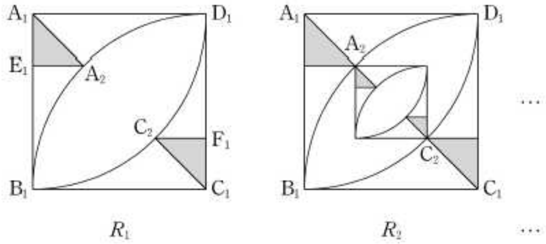
① $\frac{4}{3}(\pi+2)$ ② $\frac{3}{2}(\pi+2)$ ③ $\frac{5}{3}(\pi+2)$
④ $\frac{4}{3}(\pi+4)$ ⑤ $\frac{5}{3}(\pi+4)$

75. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 안에 꼭짓점 A_1, C_1을 중심으로 하고 선분 A_1B_1, C_1D_1을 반지름으로 하는 사분원을 각각 그린다. 선분 A_1C_1이 두 사분원과 만나는 점 중 점 A_1과 가까운 점을 A_2, 점 C_1과 가까운 점을 C_2라 하자. 선분 A_1D_1에 평행하고 점 A_2를 지나는 직선이 선분 A_1B_1과 만나는 점을 E_1, 선분 B_1C_1에 평행하고 점 C_2를 지나는 직선이 선분 C_1D_1과 만나는 점을 F_1이라 하자. 삼각형 $A_1E_1A_2$와 삼각형 $C_1F_1C_2$를 그린 후 두 삼각형의 내부에 속하는 영역을 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에 선분 A_2C_2를 대각선으로 하는 정사각형을 그리고, 새로 그려진 정사각형 안에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 두 개의 사분원과 두 개의 삼각형을 그리고 두 삼각형의 내부에 속하는 영역을 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?

[4점][2016년 9월]



① $\frac{1}{12}(\sqrt{2}-1)$　② $\frac{1}{6}(\sqrt{2}-1)$　③ $\frac{1}{4}(\sqrt{2}-1)$

④ $\frac{1}{3}(\sqrt{2}-1)$　⑤ $\frac{5}{12}(\sqrt{2}-1)$

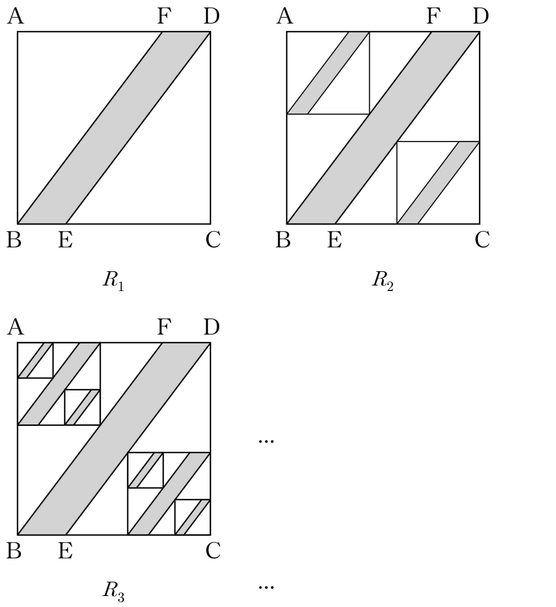
76. 한 변의 길이가 4인 정사각형 ABCD가 있다. 그림과 같이 선분 BC를 1 : 3으로 내분하는 점을 E, 선분 DA를 1 : 3으로 내분하는 점을 F라 하고 평행사변형 BEDF를 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 정사각형 안에 있는 각 직각삼각형에 내접하는 가장 큰 정사각형을 각각 그리자. 새로 그려진 각 정사각형에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 평행사변형을 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

그림 R_2에서 새로 그려진 정사각형 안에 있는 각 직각삼각형에 내접하는 가장 큰 정사각형을 각각 그리자. 새로 그려진 각 정사각형에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 평행사변형을 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 모든 평행사변형의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?

[4점][2016년 10월]



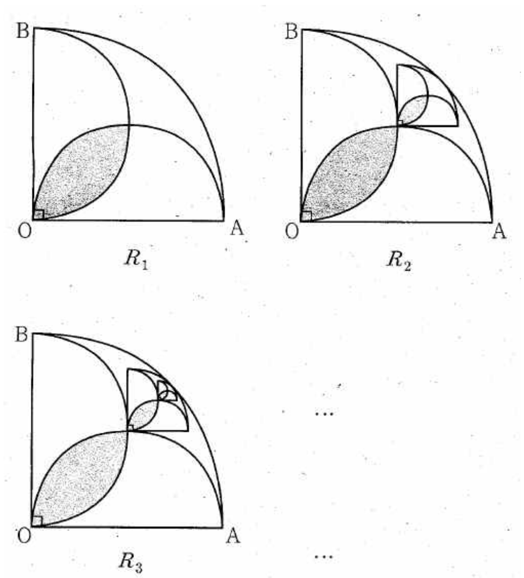
① $\frac{28}{5}$　② $\frac{98}{17}$　③ $\frac{196}{33}$　④ $\frac{49}{8}$　⑤ $\frac{196}{31}$

77. 중심이 O, 반지름의 길이가 2이고 중심각의 크기가 90°인 부채꼴 OAB가 있다. 그림과 같이 부채꼴 OAB의 내부에 선분 OA를 지름으로 하는 반원과 선분 OB를 지름으로 하는 반원을 그린 후 두 반원의 내부의 공통부분인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에 그려진 두 반원이 만나는 점 중에서 점 O가 아닌 점을 중심으로 하고 반지름이 선분 OA, 선분 OB와 각각 평행하면서 호 AB와 한 점에서 만나는 부채꼴을 두 반원의 외부에 그리고 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 두 반원을 그린 후 새로 그려진 두 반원의 내부의 공통부분인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?

[4점][2016년 10월]



① $\dfrac{2\sqrt{2}-1}{7}(\pi-2)$ ② $\dfrac{2\sqrt{2}+1}{7}(\pi-2)$

③ $\dfrac{2\sqrt{2}-1}{7}(\pi-1)$ ④ $\dfrac{2\sqrt{2}+1}{7}(\pi-1)$

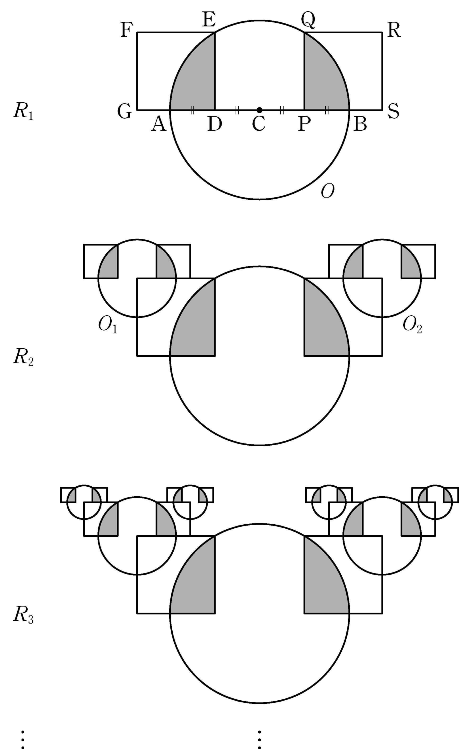
⑤ $\dfrac{2\sqrt{2}+1}{7}(\pi+1)$

78. 그림과 같이 길이가 4인 선분 AB를 지름으로 하는 원 O가 있다. 원의 중심을 C라 하고, 선분 AC의 중점과 선분 BC의 중점을 각각 D, P라 하자. 선분 AC의 수직이등분선과 선분 BC의 수직이등분선이 원 O의 위쪽 반원과 만나는 점을 각각 E, Q라 하자. 선분 DE를 한 변으로 하고 원 O와 점 A에서 만나며 선분 DF가 대각선인 정사각형 DEFG를 그리고, 선분 PQ를 한 변으로 하고 원 O와 점 B에서 만나며 선분 PR가 대각선인 정사각형 PQRS를 그린다. 원 O의 내부와 정사각형 DEFG의 내부의 공통부분인 모양의 도형과 원 O의 내부와 정사각형 PQRS의 내부의 공통부분인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 점 F를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}\overline{\mathrm{DE}}$인 원 O_1, 점 R를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}\overline{\mathrm{PQ}}$인 원 O_2를 그린다. 두 원 O_1, O_2에 각각 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 만들어지는 모양의 2개의 도형과 모양의 2개의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?

[4점][2017학년도 수능]



① $\dfrac{12\pi-9\sqrt{3}}{10}$ ② $\dfrac{8\pi-6\sqrt{3}}{5}$ ③ $\dfrac{32\pi-24\sqrt{3}}{15}$

④ $\dfrac{28\pi-21\sqrt{3}}{10}$ ⑤ $\dfrac{16\pi-12\sqrt{3}}{5}$

1) ④

직사각형의 넓이를 S_1 이라 하자.

직사각형의 넓이를 차례로 더하면

$$S_1 = \left(1-\frac{2}{3}\right)\times 1^2 + \left\{\frac{2}{3}-\left(\frac{2}{3}\right)^2\right\}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left\{\left(\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{2}{3}\right)^3\right\}\times\left(\frac{2}{3}\right)^4 + \cdots$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)^6 + \cdots$$

따라서, 직사각형의 넓이는 첫째항이 $\frac{1}{3}$이고 공비가 $\left(\frac{2}{3}\right)^3$인 무한등비급수이므로

$$S_1 = \frac{\frac{1}{3}}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^3} = \frac{9}{19}$$

또한 곡선 $y=x^2$과 x축, $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하면

$$S_2 = \int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S = S_1 - S_2 = \frac{9}{19} - \frac{1}{3} = \frac{8}{57}$$

2) 13

[출제의도] 무한등비급수를 이용하여 문제를 해결할 수 있다.

$$10\left\{1-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^4+\cdots\right\}$$

$$= 10\left(1-\frac{1}{2}\right)+10\left\{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\right\}\left\{1+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^4+\cdots\right\}$$

$$= 5+10\cdot\frac{4}{9}\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{4}{9}}\right) = 13$$

3) ④

[출제의도] 무한등비급수를 활용하여 외적 문제 해결하기

$\overline{\mathrm{AB}}=2$, $\overline{\mathrm{AC}}=2\sqrt{2}$,

$\overline{\mathrm{A_1B_1}}=2\sqrt{2}-2$, $\overline{\mathrm{B_1C}}=\sqrt{2}(2\sqrt{2}-2)$,

$\overline{\mathrm{A_2B_2}}=\sqrt{2}(2\sqrt{2}-2)-(2\sqrt{2}-2)=2(\sqrt{2}-1)^2$

구하는 값은 초항이 2, 공비가 $\sqrt{2}-1$인 무한등비급수이므로

(준식)$= \dfrac{2}{1-(\sqrt{2}-1)} = 2+\sqrt{2}$

4) 6

$l_n = 2\times1+2^2\times\frac{1}{3}+2^3\times\left(\frac{1}{3}\right)^2+2^4\times\left(\frac{1}{3}\right)^3+\cdots+2^{n+1}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty} l_n = 2\times1+2^2\times\frac{1}{3}+2^3\times\left(\frac{1}{3}\right)^2+2^4\times\left(\frac{1}{3}\right)^3+\cdots+2^{n+1}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\cdots$$

$$= 2\left\{1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^n+\cdots\right\}$$

$$= 2\times\frac{1}{1-\frac{2}{3}}$$

$$= 6$$

5) 13

도형 A_1, A_2, A_3, $\cdots$의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3, $\cdots$라 하면

$$S_1 = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

$$S_2 = \frac{3}{4}+2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2\frac{3}{4}$$

$S_3 = \frac{3}{4}+2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2\frac{3}{4}+2^2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^4\frac{3}{4}+\cdots$이므로

S_n은 첫째항이 $\frac{3}{4}$이고, 공비가 $2\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{8}$인 등비수열의 합이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{8}} = \frac{6}{7}$$

$\therefore\ p=7,\ q=6$ $\qquad\therefore\ p+q=13$

6) 125

$S=\sum_{n=0}^{\infty}\overline{\mathrm{P_nQ_{n+1}}}+\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\mathrm{Q_nP_n}}$ 이고, $x_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{n+1}}$ 이므로

$$\sum_{n=0}^{\infty}\overline{\mathrm{P}_n\ \mathrm{Q}_{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}({x_n}^2-{x_{n+1}}^2) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+2}}+\frac{3}{4^{n+2}}\right)$$

$$= \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{3}{16}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\mathrm{Q_nP_n}} = \sum_{n=1}^{\infty}(x_{n-1}-x_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}} = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

따라서, $S=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{5}{4}$이므로 $100S=125$

<다른 풀이>

$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}$ 이므로 점 P_n과 점 Q_n은 점$\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right)$에 한없이 가까워진다.

$\mathrm{A}_n(x_n,0)$, $\mathrm{B}_n(0,{x_n}^2)$ 이라 하면

$$\sum_{n=0}^{\infty}\overline{\mathrm{P}_n\ \mathrm{Q}_{n+1}} = (1-\overline{\mathrm{Q_1A_0}})+(\overline{\mathrm{Q_1A_0}}-\overline{\mathrm{Q_2A_1}})+\cdots$$

$$= 1-\lim_{n\to\infty}\overline{\mathrm{Q}_n\ \mathrm{A}_{n-1}} = 1-\lim_{n\to\infty}{x_n}^2 = 1-\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\mathrm{Q}_n\ \mathrm{P}_n}$$

$$= (1-\overline{\mathrm{B_1P_1}})+(\overline{\mathrm{B_1P_1}}-\overline{\mathrm{B_2P_2}})+\cdots$$

$$= 1-\lim_{n\to\infty}\overline{\mathrm{B}_n\ \mathrm{P}_n} = 1-\lim_{n\to\infty}x_n = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

따라서, $S=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{5}{4}$이므로 $100S=125$

7) ①

$S_{n+1}=\frac{1}{2}S_n$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}S_n = \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

8) ②

$\overline{\mathrm{OB_1}}=\overline{\mathrm{A_1B_1}}=6$이므로

$$S_1 = 6^2-\frac{1}{4}\pi 6^2 = 6^2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$$

$\overline{\mathrm{B_1B_2}}=\overline{\mathrm{A_2B_2}}=\frac{6}{2}$이므로

$$S_2 = \left(\frac{6}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\pi\left(\frac{6}{2}\right)^2 = \left(\frac{6}{2}\right)^2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$$

$\overline{B_2B_3} = \overline{A_3B_3} = \frac{6}{4}$ 이므로

$$S_3 = \left(\frac{6}{4}\right)^2 - \frac{1}{4}\pi\left(\frac{6}{4}\right)^2 = \left(\frac{6}{4}\right)^2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$$

$\vdots$

수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $6^2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$이고, 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{6^2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)}{1-\frac{1}{4}} = 12(4-\pi)$$

9) ③

정삼각형 B_1BA_1을 S_1, 정삼각형 $B_2B_1A_3$을 S_2라 하면 정삼각형 S_1의 한 변의 길이는 $\frac{1}{3}$이므로 S_1의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{36}$이다.

또, 정삼각형 S_1의 한 변의 길이의 2배가 정삼각형 S_2의 한 변의 길이의 3배와 일치하므로 S_1, S_2의 닮음비는 3 : 2이고, S_1, S_2의 넓이의 비는 9 : 4이다.

따라서 구하는 넓이는 첫째항이 $\frac{\sqrt{3}}{36}\times 3$, 공비가 $\frac{4}{9}$인 무한등비급수의 합이므로

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{36}\times 3}{1-\frac{4}{9}} = \frac{3\sqrt{3}}{20}$$

10) ⑤

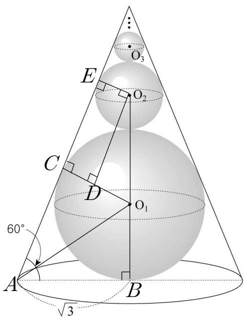
반원 D_n, D_{n+1}의 반지름을 각각 r_n, r_{n+1}라 하면,

$r_{n+1} : (2r_n - r_{n+1}) = 1 : \sqrt{2}$, $r_{n+1} = \frac{2}{\sqrt{2}+1}r_n$

따라서, $l_1 = 2\pi$, $l_{n+1} = \frac{2}{\sqrt{2}+1}l_n$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} l_n = \frac{2\pi}{1-\frac{2}{\sqrt{2}+1}} = 2(3+2\sqrt{2})\pi$$

11) ②



구 O_1의 반지름을 r_1이라하면 $\triangle ABO_1$에서

$\angle BAO_1 = 30°$이므로 $\tan 30° = \frac{r_1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

따라서 $r_1 = 1$

구 O_2의 반지름을 r_2이라하면 $\triangle O_2O_1D$에서

$\angle O_1O_2D = 30°$이므로 $\sin 30° = \frac{1-r_2}{1+r_2} = \frac{1}{2}$

따라서 $r_2 = \frac{1}{3}$

구 V_1의 반지름 1이므로 부피는 $\frac{4}{3}\pi$

구 V_2의 반지름 $\frac{1}{3}$이므로 부피는 $\frac{4}{81}\pi$ $\cdots$

따라서 첫째항이 $\frac{4}{3}\pi$이고 공비가 $\frac{1}{27}$인 무한등비급수이므로 합은

$$\frac{\frac{4}{3}\pi}{1-\frac{1}{27}} = \frac{18}{13}\pi$$

12) ③

$l_1 = \frac{a}{\cos 30^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}}a$

$l_{n+1} = \frac{l_n}{\cos 30^\circ}$

$\therefore \frac{l_{n+1}}{l_n} = \frac{1}{\cos 30^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

따라서 수열 $\{l_n\}$은 첫째항이 $\frac{2}{\sqrt{3}}a$이고 공비가 $\frac{2}{\sqrt{3}}$인 등비수열이므로

$$l_n = \frac{2}{\sqrt{3}}a\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n-1} = a\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l_n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n} = \frac{1}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$$

$$= \frac{1}{a}\cdot\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{a}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}+3}{a} = \sqrt{3}$$

$\therefore a = 2+\sqrt{3}$

13) ④

$S_1 = 2+\frac{\pi}{2}$

$S_2 = \frac{\pi}{2}+\left(1+\frac{\pi}{4}\right) = 1+\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$

$S_3 = \frac{\pi}{2}+\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2}+\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{8}\right)$

$\vdots$

$$\lim_{n\to\infty}S_n = \frac{\frac{\pi}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \pi S_n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{8}+\cdots+\frac{\pi}{2^n}\right)$$

이므로 $\lim_{n\to\infty}S_n = \frac{\frac{\pi}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \pi$

14) ②

R_1의 짧은 변의 길이를 x라 하면 R_2의 긴 변과 짧은 변의 길이는 각각 x, $1-x$이고 R_1과 R_2가 닮음이므로 $x : 1 = (1-x) : x$

$x^2+x-1=0$에서 $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ $\quad(\because\ x>0)$

또 R_n과 R_{n+1}사이에 $1 : \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 의 닮음비가 성립하므로

$l_{n+1} = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} l_n$

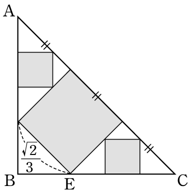
$\sum_{n=1}^{\infty} l_n = \dfrac{l_1}{1-\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} l_1$ 이므로

$k = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ 이다.

15) ⑤

처음 정사각형 넓이를 a_1이라고 하면 $a_1 = \dfrac{2}{9}$

$\overline{AB} : \overline{CD} = 1 : \dfrac{\sqrt{2}}{3}$ 이므로 넓이의 비는 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)^2$ 이다.



$\therefore\ a_2 = 2 \cdot \left(\dfrac{2}{9}\right) \cdot \left(\dfrac{2}{9}\right)$

$\therefore\ a_n \therefore\ a_n = 2^{n-1} \cdot \left(\dfrac{2}{9}\right) \cdot \left(\dfrac{2}{9}\right)^{n-1} = \dfrac{2}{9} \cdot \left(\dfrac{4}{9}\right)^{n-1}$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{2}{9} \cdot \left(\dfrac{4}{9}\right)^{k-1} = \dfrac{\dfrac{2}{9}}{1-\dfrac{4}{9}} = \dfrac{2}{5}$

16) ⑤

$a_1 = 1 + \dfrac{1}{3} \times 2 = 1 + \dfrac{2}{3}$,

$a_2 = a_1 + \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 \times 2^2 = 1 + \dfrac{2}{3} + \left(\dfrac{2}{3}\right)^2$,

$a_3 = a_2 + \left(\dfrac{1}{3}\right)^3 \times 2^3 = 1 + \dfrac{2}{3} + \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{2}{3}\right)^3$,

$\cdots$

$\therefore\ a_{20} = 1 + \dfrac{2}{3} + \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\dfrac{2}{3}\right)^{20}$

$= \dfrac{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{21}}{1-\dfrac{2}{3}} = 3\left\{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{21}\right\}$

17) ③

원 C와 C_1의 반지름의 길이를 각각 r과 r_1이라 하면 $r = 1$,

$\sqrt{2} r_1 + r_1 = 1$이므로 $r_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1$,

$r : r_1 = r_n : r_{n+1} = 1 : \sqrt{2}-1$

$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} r_k = \dfrac{\sqrt{2}-1}{1-(\sqrt{2}-1)} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

18) ⑤

입체의 부피를 V_n이라하면 $V_1 = 1$,

$V_2 = 1 + 5 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^3$

$V_3 = 1 + 5 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 + 5 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^6$, $\cdots$ 이므로

$\lim_{n\to\infty} V_n = 1 + \dfrac{5 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^3}{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^3} = \dfrac{12}{7}$

19) ⑤

n단계에서 색칠하는 부분의 넓이를 a_n이라 하면

$a_1 = \dfrac{1}{4}\pi(1^2-0^2) + \dfrac{3}{4}\pi(2^2-1^2)$

$a_2 = \dfrac{1}{4}\pi(3^2-2^2) + \dfrac{3}{4}\pi(4^2-3^2)$

$\vdots$

$a_n = \dfrac{1}{4}\pi\{(2n-1)^2-(2n-2)^2\} + \dfrac{3}{4}\pi\{(2n)^2-(2n-1)^2\}$

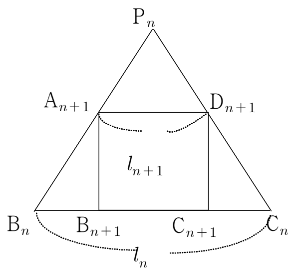
$S_n = \dfrac{1}{4}\pi\left\{\sum_{k=1}^{n}(4k-3)\right\} + \dfrac{3}{4}\pi\left\{\sum_{k=1}^{n}(4k-1)\right\}$

$= \dfrac{1}{4}\pi(2n^2-n) + \dfrac{3}{4}\pi(2n^2+n)$

$= \dfrac{\pi}{2}(4n^2+n)$

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{S_n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{\pi}{2}(4n^2+n)}{n^2} = 2\pi$

20) ⑤



$\triangle P_nB_nC_n$의 높이는

$\dfrac{\sqrt{3}}{2} l_n = l_{n+1} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} l_{n+1}$이므로

$\dfrac{l_{n+1}}{l_n} = \dfrac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}-3$

따라서 첫째항은 16이고, 공비는 $(2\sqrt{3}-3)^2$ 인 무한등비급수의 합이다.

$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \dfrac{16}{1-(2\sqrt{3}-3)^2} = 6\sqrt{3}+10$

21) ⑤

대각선의 교점을 O, 무게중심을 G_1, G_2라고 하면P, G_1, O, G_2, Q는

일직선 위에 있고, $\overline{PQ} = 3$이다.

$\overline{G_1G_2} = \dfrac{2}{3}\overline{PQ} = 2$

A_1과 A_2의 대각선의 길이의 비가 $3\sqrt{2} : 2$이므로 넓이의 비는

$(3\sqrt{2})^2 : 2^2$이다.

첫째항 $S_1 = 9$이고, 공비 $r = \dfrac{2}{9}$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \dfrac{9}{1-\dfrac{2}{9}} = \dfrac{81}{7}$

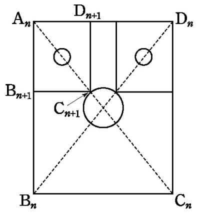
22) ④

$$S_1 = 1-\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{\sqrt{3}}\times 2-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2\times\frac{\pi}{6} = 1-\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\pi}{9}$$

$$r = \frac{(\text{정사각형 } OA_2B_2C_2 \text{ 대각선})^2}{(\text{정사각형 } OA_1B_1C_1 \text{ 대각선})^2} = \frac{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2}{(\sqrt{2})^2} = \frac{2}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{S_1}{1-r} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\pi}{9}}{1-\frac{2}{3}} = 3-\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$$

23) ⑤



$\square AB_nC_nD_n$과 $\square AB_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$에서 두 사각형은 닮은 도형이고 대각선의 길이의 비가 10 : 4이므로 넓이의 비는 5^2 : 2^2이다. 따라서,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \pi + 4\times\left(\frac{2}{5}\right)^2\pi + 4^2\left(\frac{2}{5}\right)^4\pi+\cdots$$

$$= \frac{\pi}{1-\frac{16}{25}} = \frac{25}{9}\pi$$

24) ①

$$S_1 = \pi-\left\{\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)\right\} = \frac{\pi+1}{2}$$

원 C_n의 지름의 길이를 l_n이라 하면

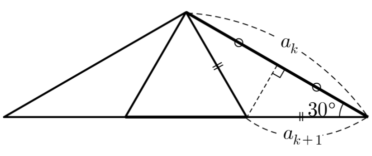
$l_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}l_n$이므로

$$S_{n+1} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 S_n = \frac{1}{2}S_n$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{\pi+1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \pi+1$$

25) ⑤

k번째 만들어진 정육각형 H_k와 $k+1$번째 만들어진 정육각형 H_{k+1}의 한 변의 길이를 각각 a_k, a_{k+1}이라 하면



$$a_{k+1}\cos 30^\circ = \frac{1}{2}a_k$$

$$\therefore\ a_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{3}}a_k$$

길이의 비가 $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 이므로 넓이의 비는 $\frac{1}{3}$이고 첫 번째 과정에서 생기는 6개의 정삼각형의 넓이의 합은 $6\times\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3})^2 = \frac{9}{2}\sqrt{3}$ 이다.

모든 정삼각형의 넓이의 합은 첫째항이 $\frac{9}{2}\sqrt{3}$이고,

공비가 $\frac{1}{3}$인 무한 등비급수의 합이므로

$$\therefore\ \frac{\frac{9}{2}\sqrt{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{27}{4}\sqrt{3}$$

26) ⑤

n번째 그린 정사각형을 A_n, A_n의 외접원을 O_n, 원 O_n의 반지름의 길이를 R_n, O_n의 내부와 A_n의 외부에서 접하는 최대원의 넓이를 T_n, 반지름의 길이를 r_n이라 하면

$$R_1 = 1,\ R_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}R_n,\quad \therefore\ R_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$$

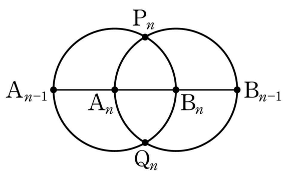
$$r_n = \frac{R_n-\frac{1}{\sqrt{2}}R_n}{2} = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}R_n = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{n-1}$$

$$T_n = \pi\left\{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}\right\}^2 = \pi\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} 4T_n = 4\pi\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$= 4\pi\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{8}\times\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = (3-2\sqrt{2})\pi$$

27) ④



그림과 같이 n번째 얻어진 도형에 있는 두 원의 반지름의 길이를 r_n이라하면

$\overline{A_nB_n} = \overline{A_nP_n} = \overline{B_nP_n} = r_n$ 이므로

$\angle P_nA_nB_n = \angle P_nB_nA_n = 60^\circ$

두 호 $P_nA_nQ_n$, $P_nB_nQ_n$의 길이의 합

$$l_n = 2\times 2\pi r_n\times\frac{1}{3} = \frac{4}{3}\pi r_n$$

또 선분 $A_{n-1}B_{n-1}$의 삼등분점이 A_n, B_n이므로

$$\overline{A_nB_n} = \frac{1}{3}\overline{A_{n-1}B_{n-1}} \qquad \therefore\ r_n = \frac{1}{3}r_{n-1}$$

따라서, 수열 l_n의 공비는 $\frac{1}{3}$, $r_1 = \frac{8}{3}$이므로 초항

$$l_1 = \frac{4}{3}\pi\cdot\frac{8}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} l_n = \frac{\frac{32}{9}\pi}{1-\frac{1}{3}} = \frac{16}{3}\pi$$

28) ②

사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 한 변의 길이를 a라 하자.

이 때, $\overline{AB_1} = \frac{1}{2}+\frac{a}{2}$, $\overline{B_1C_1} = a$, $\overline{AC_1} = 1$이므로

직각삼각형 AB_1C_1에서

$\left(\frac{1}{2}+\frac{a}{2}\right)^2+a^2=1^2$

$\frac{5}{4}a^2+\frac{a}{2}-\frac{3}{4}=0$

$5a^2+2a-3=(5a-3)(a+1)=0$

$\therefore\ a=\frac{3}{5}$ $(\because\ a>0)$

따라서 정사각형 $A_nB_nC_nD_n$의 한 변의 길이를 a_n이라 하면 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\frac{3}{5}$, 공비가 $\frac{3}{5}$인 등비수열임을 알 수 있다.

따라서 수열$\{S_n\}$은 첫째항이 $\frac{9}{25}$, 공비가 $\frac{9}{25}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{9}{25}}{1-\frac{9}{25}}=\frac{9}{16}$$

29) ①

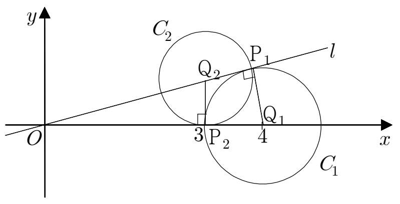
$\overline{\mathrm{DP_1}}=2$, $\triangle\mathrm{DP_1D_1}\backsim\triangle\mathrm{BCD_1}$이므로 $\overline{\mathrm{DD_1}}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$

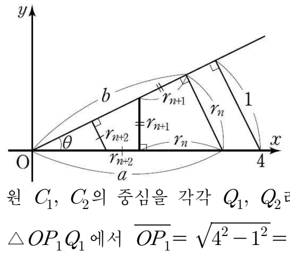
$\therefore\ S_1=\frac{8}{3}$

한편, 정사각형 $\mathrm{BC_1D_1A_1}$의 한 변의 길이는 $\frac{8}{3}$이므로 각 정사각형의 넓이는 공비가 $\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$인 등비수열을 이룬다.

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{24}{5}$

30) ③





원 C_1, C_2의 중심을 각각 Q_1, Q_2라 하자.

$\triangle OP_1Q_1$에서 $\overline{OP_1}=\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$이고,

$\triangle OP_1Q_1\backsim\triangle OP_2Q_2$이므로

$\overline{OP_1}:\overline{P_1Q_1}=\overline{OP_2}:\overline{P_2Q_2}$

$\sqrt{15}:1=3:\overline{P_2Q_2}$

$\therefore\ \overline{P_2Q_2}=\frac{3}{\sqrt{15}}$

따라서, $\triangle OP_1Q_1$과 $\triangle OP_2Q_2$의 닮음비는

$\overline{P_1Q_1}:\overline{P_2Q_2}=1:\frac{3}{\sqrt{15}}$이므로

넓이의 비는 $1:\frac{9}{15}=1:\frac{3}{5}$이다.

원 C_1의 넓이는 $S_1=\pi$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=S_1+S_2+S_3+\cdots=S_1+\frac{3}{5}S_1+\left(\frac{3}{5}\right)^2S_1+\cdots$$

$$=\frac{S_1}{1-\frac{3}{5}}=\frac{5}{2}S_1=\frac{5}{2}\pi$$

31) ①

사각형 $\mathrm{B_2P_1C_1P_2}$에서

$\overline{\mathrm{P_1C_1}}=\frac{1}{3}\overline{\mathrm{B_1C_1}}=2\sqrt{3}$

$\overline{\mathrm{C_1C_2}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AC_1}}=3$이므로

$S_1=\overline{\mathrm{P_1C_1}}\cdot\overline{\mathrm{C_1C_2}}=6\sqrt{3}$

모든 자연수 n에 대하여 $\overline{\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{C}_n}$이므로

$S_{n+1}=\frac{1}{4}S_n$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{6\sqrt{3}}{1-\frac{1}{4}}=8\sqrt{3}$

32) 59

지름이 6인 원의 넓이를 A_0, $(A_0=9\pi)$

C_1에서 그려진 2개 원의 넓이의 합을 A_1,

C_2에서 그려진 4개의 원의 넓이의 합을 $A_2,\cdots$

C_n에서 그려진 2^n개의 원의 넓이의 합을 A_n이라 하자.

C_1에서 바깥 원을 O_1, O_1의 내부에 내접하는 두 원을 크기 순서대로 O_2, O_3라 하면

넓이의 비는 $9:4:1$이므로 $A_1=\frac{5}{9}A_0$이다.

C_n에서 한 원과 그 원에 내접하는 두 원의 넓이의 비가 O_1, O_2, O_3의 넓이의 비와 같으므로

$A_n=\frac{5}{9}A_{n-1}$이다.

따라서 C_n에서 색칠된 부분의 넓이를 S_n이라 하면

$\lim_{n\to\infty}S_n=A_0\left\{\frac{5}{9}-\left(\frac{5}{9}\right)^2+\left(\frac{5}{9}\right)^3-\left(\frac{5}{9}\right)^4+\cdots\right\}=\frac{45}{14}\pi$ 이다.

$\therefore\ p+q=59$

33) ②

$S_1=\frac{1}{2}\{4\pi-\pi\}\times2=3\pi$이고

이후 모양의 도형은 넓이 $\frac{1}{9}$배, 개수는 2배로 변화 하므로 $\lim_{n\to\infty}S_n$은 공비가 $\frac{1}{9}\times2=\frac{2}{9}$인 무한등비급수가 된다.

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{3\pi}{1-\frac{2}{9}}=\frac{27\pi}{7}$

34) 11

$\triangle\mathrm{OA_1A_2}=\triangle\mathrm{OO_1A_1}+\triangle\mathrm{OO_1A_2}+\triangle\mathrm{O_1A_1A_2}$

$\frac{1}{2}\times2\times4=\frac{1}{2}\times r_1\times(6+2\sqrt{5})$ $\therefore r_1=3-\sqrt{5}$

$\triangle\mathrm{OA_2A_3}=\triangle\mathrm{OO_2A_2}+\triangle\mathrm{OO_2A_3}+\triangle\mathrm{O_2A_2A_3}$

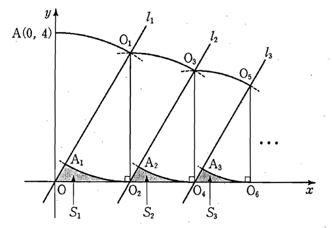
$\frac{1}{2}\times2\times1=\frac{1}{2}\times r_2\times(3+\sqrt{5})$

∴ $r_2 = \frac{1}{2}(3-\sqrt{5})$

따라서 $r_n = (3-\sqrt{5})\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이다.

$\sum_{n=1}^{\infty} r_n = 6-2\sqrt{5}$이므로 $a+b=11$

35) ②



$S_1 = \triangle OO_1O_2 - $부채꼴$A_1O_1O_2$

$= \frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 2 - \frac{1}{12}\times(2\sqrt{3})^2\pi = 2\sqrt{3}-\pi$

$S_2 = \triangle O_2O_3O_4 - $부채꼴$A_2O_3O_4$

$= \frac{1}{2}\times 3\times\sqrt{3} - \frac{1}{12}\times 9\pi = \frac{3}{4}(2\sqrt{3}-\pi)$

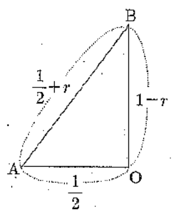
$S_3 = \triangle O_4O_5O_6 - $부채꼴$A_3O_5O_6$

$= \frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{3}}{2}\times\frac{3}{2} - \frac{1}{12}\times(\frac{3\sqrt{3}}{2})^2\pi = (\frac{3}{4})^2(2\sqrt{3}-\pi)$

S_1, S_2, S_3에 의해서 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $2\sqrt{3}-\pi$이고 공비가 $\frac{3}{4}$인 등비수열이므로

무한등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{2\sqrt{3}-\pi}{1-\frac{3}{4}} = 8\sqrt{3}-4\pi$

36) ③



원 O_1, A_1, B_1의 중심을 각각 O, A, B라 하면 R_1의 내부의 큰 원의 반지름은 $\frac{1}{2}$이고, 작은 원의 반지름을 r이라 하면

$\left(\frac{1}{2}+r\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (1-r)^2$

이므로 $r = \frac{1}{3}$이다. 작은 원의 반지름의 길이가 $\frac{1}{3}$이다.

따라서 R_1의 어두운 부분의 넓이는 $\frac{13}{18}\pi$이다.

넓이의 합 S_n은 공비가 $\frac{13}{18}$인 등비수열이므로

$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{13}{18}\pi}{1-\frac{13}{18}} = \frac{13}{5}\pi$이다.

37) ④

원 O_1의 반지름의 길이는 3이고 부채꼴 $A_1B_1D_1$의 반지름의 길이는

$\overline{A_1B_1} = \overline{A_1C_2} = 3\sqrt{2}$ …… ㉠이므로

$T_1 = S_1$

$= \frac{1}{2}\times$(원 O1의 넓이)−{(부채꼴 $B_1C_1D_1$의 넓이)

−(삼각형 $B_1C_1D_1$의 넓이)}

$= \frac{1}{2}\times 3^2\pi - \left\{\frac{1}{4}\times(3\sqrt{2})^2\pi - \frac{1}{2}\cdot(3\sqrt{2})^2\right\} = 9$

∴ $S_1 + T_1 = 18$

한편, $\overline{C_2C_1} = \overline{A_1C_1} - \overline{A_1C_2} = 6-3\sqrt{2}$ (∵ ㉠)

∴ $\overline{A_2C_2} = \overline{A_1C_1} - 2\times\overline{C_2C_1} = 6-2(6-3\sqrt{2}) = 6\sqrt{2}-6$

따라서, 원 O_2의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\overline{A_2C_2} = \frac{1}{2}\times(6\sqrt{2}-6) = 3\sqrt{2}-3$

두 원 O_1과 O_2의 반지름의 길이의 비가

$\frac{3\sqrt{2}-3}{3} = \sqrt{2}-1$이므로

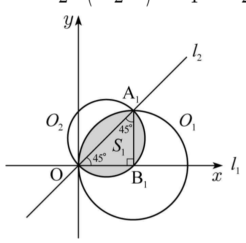
수열 $\{S_n+T_n\}$은 공비가 $(\sqrt{2}-1)^2 = 3-2\sqrt{2}$인 등비수열이다.

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(S_n+T_n) = \frac{18}{1-(3-2\sqrt{2})} = \frac{18}{2\sqrt{2}-2} = \frac{9}{\sqrt{2}-1} = 9(\sqrt{2}+1)$$

38) ④

원 O_1과 직선 l_2의 한 교점을 A_1, 원 O_1의 중심을 $B_1(3, 0)$이라 하면 삼각형 A_1OB_1은 직각이등변삼각형이므로 $\overline{OA_1} = 3\sqrt{2}$

$S_1 = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}\pi - \frac{9}{2} = \frac{9}{2}(\pi-1)$



같은 방법으로 원 O_2와 직선 l_3의 한 교점을 A_2, 원 O_2의 중심을 B_2라 하면 삼각형 A_2OB_2는 직각이등변삼각형이므로 $\overline{OA_2} = 3$

$S_2 = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{\pi}{4}\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}(\pi-1)$

…

$S_n = \frac{9}{2^n}(\pi-1)$

수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\frac{9}{2}(\pi-1)$, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{9}{2}(\pi-1)}{1-\frac{1}{2}} = 9(\pi-1)$$

39) ⑤

$\triangle C_1OQ_1$에서 $\angle C_1OQ_1 = 30°$이고 $\overline{OC_1} = 2$이므로 $\overline{C_1Q_1} = 1$이다. 이때, 원 C_n의 반지름의 길이를 r_n, 원 C_{n+1}의 반지름의 길이를 r_{n+1}이라 하면, $r_1 = 1$이고 $\sin 30° = \frac{r_{n+1}-r_n}{r_{n+1}} = \frac{1}{2}$에서 $r_{n+1} = 2r_n$이므로

$S_{n+1} = 4S_n$이 된다.

$S_1 = 2\times\triangle \mathrm{C_2C_1B_1} = \dfrac{\sqrt{15}}{2}$ 이므로 $S_n = \dfrac{\sqrt{15}}{2}4^{n-1}$ 이다.

따라서 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{4^n+3^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{15}}{8}4^n}{4^n+3^n} = \frac{\sqrt{15}}{8}$ 이다.

40) ②

색칠된 직사각형을 모두 모으면 닮은 직사각형이 된다.

$\mathrm{S_1} = \left(5\times\dfrac{3}{4}\right)\left(4\times\dfrac{4}{5}\right) = 20\times\dfrac{3}{5} = 12$

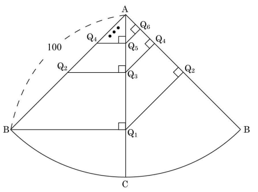
$\mathrm{S_2} = \left(5\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{3}{4}\right)\left(4\times\dfrac{4}{5}\times\dfrac{4}{5}\right) = 20\times\left(\dfrac{3}{5}\right)^2 = \dfrac{16}{5}$

$\vdots$

$\mathrm{S_n} = 20\times\left(\dfrac{3}{5}\right)^{\mathrm{n}}$ 이므로

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{S_n} = \frac{12}{1-\frac{3}{5}} = 30$

41) 200



$\angle\mathrm{BAC} = 45^\circ$ 이므로

$l_1 = 50\sqrt{2}$, $l_2 = 50$, $l_3 = 25\sqrt{2}$, …

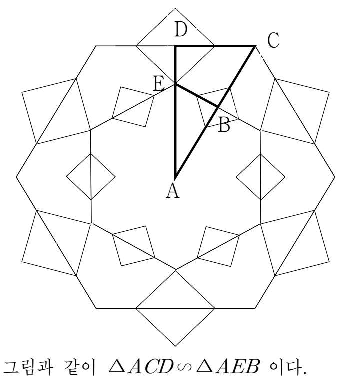
따라서, $l_n = 50\sqrt{2}\times\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$ 이다.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} l_n = \frac{50\sqrt{2}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = 100+100\sqrt{2}$

$\therefore\ a+b = 200$

42) ①

[출제의도] 무한등비급수의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.



그림과 같이 $\triangle ACD \backsim \triangle AEB$ 이다.

$\overline{\mathrm{CD}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\angle\mathrm{ACD} = 60^\circ$, $\overline{\mathrm{AD}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$, $\overline{\mathrm{DE}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AE}} = \dfrac{2\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

주어진 정육각형과 첫 번째 만들어진 정육각형의 닮음비는

$1\ :\ \dfrac{2\sqrt{3}-1}{4}$ 이므로

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} l_n = 6\times\frac{2}{1-\frac{2\sqrt{3}-1}{4}} = \frac{48(5+2\sqrt{3})}{13}$

43) ②

문제의 그림에서 $\overline{\mathrm{M_1M_2}} = 1$, $\overline{\mathrm{B_2M_2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{A_1B_2}} = 1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$S_1 = 2\times\left(\dfrac{1}{2}\times\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\times 1\right) = 1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

또, 그림에서 나타나는 직사각형들은 모두 닮음이고 닮음비를 구하면

$\overline{\mathrm{B_nC_n}}\ :\ \overline{\mathrm{B_{n+1}C_{n+1}}} = 1\ :\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore$ 넓이비 $S_n : S_{n+1} = 1 : \dfrac{1}{3}$

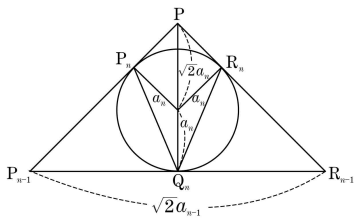
따라서, S_n은 첫항이 $1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, 공비가 $\dfrac{1}{3}$인 등비수열이다.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$

44) ④

삼각형 PQR 의 내접원의 반지름을 a_1이라 하면 $\sqrt{2}a_1 + a_1 = \sqrt{2}$ 에서

$a_1 = 2-\sqrt{2}$ 이고 $S_1 = \dfrac{1}{2}\times(2\sqrt{2}-2)\times 1 = \sqrt{2}-1$



삼각형 $\mathrm{PP}_{n-1}\mathrm{R}_{n-1}$의 내접원의 반지름을 a_n이라 하면

$\sqrt{2}a_n + a_n = \dfrac{\sqrt{2}a_{n-1}}{2}$

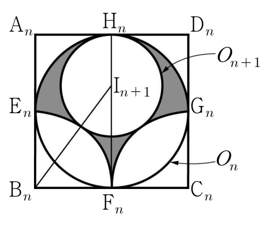
$\therefore\ a_n = \dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}a_{n-1}$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 이 공비가 $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$ 인 등비수열을 이루므로 수열 $\{S_n\}$은 공비가 $\left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \dfrac{3-2\sqrt{2}}{2}$ 인 등비수열을 이룬다.

$\therefore\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\sqrt{2}-1}{1-\frac{3-2\sqrt{2}}{2}} = \frac{6-2\sqrt{2}}{7}$

$\therefore\ p+q = \dfrac{4}{7}$

45) ②



원 O_{n+1}의 중심을 I_{n+1}이라 하고 반지름의 길이를 r_{n+1}이라 하면

직각삼각형 $\mathrm{I}_{n+1}\mathrm{B}_n\mathrm{F}_n$에서 피타고라스의 정리에 의해

$(r_n + r_{n+1})^2 = (2r_n - r_{n+1})^2 + r_n^2$

$2r_n r_{n+1} = 4r_n^2 - 4r_n r_{n+1}$

$\dfrac{r_{n+1}}{r_n} = \dfrac{2}{3}$ 이므로 $\dfrac{S_{n+1}}{S_n} = \dfrac{4}{9}$

$\dfrac{r_2}{r_1} = \dfrac{2}{3}$ 이므로

$S_1 = 4 - \left(2 + \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 \pi\right) = 2 - \dfrac{4}{9}\pi$

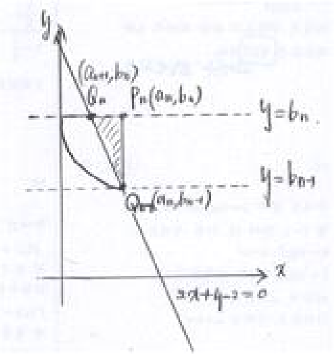
$\therefore$ $\{S_n\}$은 첫째항이 $2 - \dfrac{4}{9}\pi$, 공비가 $\dfrac{4}{9}$인 무한등비수열이다.

따라서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \dfrac{2 - \frac{4}{9}\pi}{1 - \frac{4}{9}} = \dfrac{18 - 4\pi}{5}$

46) ③

n번째 사분원의 방정식은,

$(x - a_n)^2 + (y - b_n)^2 = a_n^2$이다.



y축의 오른쪽 영역에서의 n번째 도형의 넓이는 사분원에서 직각삼각형의 넓이를 빼면 되므로, 먼저, 삼각형$P_n Q_n Q_{n-1}$의 넓이를 구하면,

$= \dfrac{1}{2}\overline{P_n Q_n} \times \overline{P_n Q_{n-1}}$

$= \dfrac{1}{2}(a_n - a_{n+1})(b_n - b_{n-1})$

$= \dfrac{1}{2}((\dfrac{1}{2})^{n-1} - (\dfrac{1}{2})^n)(\dfrac{1}{2})^{n-1}$

$= \dfrac{1}{4}(\dfrac{1}{4})^{n-1}$

$\because$ $a_n = (\dfrac{1}{2})^{n-1}$, $b_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(\dfrac{1}{2})^{k-1}$

그러므로, 구하고자 하는 n번째 넓이는 사분원에서 삼각형$P_n Q_n Q_{n-1}$의 넓이를 빼서 구하면,

$\dfrac{1}{4}\pi(\dfrac{1}{4})^{n-1} - \dfrac{1}{4}(\dfrac{1}{4})^{n-1}$가 된다.

무한등비급수를 적용하면,

$\dfrac{\frac{1}{4}\pi}{1 - \frac{1}{4}} - \dfrac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \dfrac{\pi - 1}{3}$

그러므로, 구하는 정답은 $\dfrac{2(\pi - 1)}{3}$

47) ②

원 A_n의 반지름의 길이를 a_n, 원 O_n의 반지름의 길이를 r_n라 하면

$r_1 = 3$, $a_n = \dfrac{\sqrt{3}}{2} r_{n+1}$, $r_n - r_{n+1} = a_n$ 이므로

$r_n - r_{n+1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} r_{n+1}$, $r_{n+1}\left(1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = r_n$

$r_{n+1} = \dfrac{2}{2 + \sqrt{3}} r_n$, $r_{n+1} = 2(2 - \sqrt{3}) r_n$

따라서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} l_n = \dfrac{6\pi}{1 - (4 - 2\sqrt{3})} = (6 + 4\sqrt{3})\pi$

48) ④

R_1에서 주어진 원의 반지름의 길이가 1이므로 넓이는 π 이고 긴 대각선의 길이는 8이다. 이 때 R_2에서 새로 생긴 마름모의 긴 대각선의 길이가 3이므로 짧은 대각선의 길이는 $\dfrac{3}{2}$ 이다. 따라서 이 마름모 안에 새로 생긴 원의 반지름의 길이는 $\dfrac{3}{8}$이므로 R_2에 들어 있는 원의 넓이의 합은

$\pi + 2 \times \left(\dfrac{3}{8}\right)^2 \pi$ 이다.

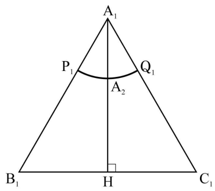
같은 방법으로 R_n에 들어 있는 모든 원의 넓이의 합S_n을 구하면

$S_n = \pi + 2 \times \dfrac{9}{64}\pi + 4 \times \left(\dfrac{9}{64}\right)^2 \pi + \cdots + 2^{n-1} \times \left(\dfrac{9}{64}\right)^n \pi$

$= \dfrac{\pi\left(1 - \left(\frac{9}{32}\right)^n\right)}{1 - \frac{9}{32}}$

$\therefore \displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \dfrac{\pi}{1 - \frac{9}{32}} = \dfrac{32}{23}\pi$

49) ①



$\overline{\mathrm{A_1P_1}} = \overline{\mathrm{A_1A_2}} = 2$ 이므로 $l_1 = \dfrac{2}{3}\pi$이다.

한편, 꼭짓점 A_1에서 선분 $\mathrm{B_1C_1}$에 내린 수선의 발을 H로 놓으면

$\overline{\mathrm{A_1H}} = 3\sqrt{3}$

$\overline{\mathrm{A_2H}} = \overline{\mathrm{A_1H}} - \overline{\mathrm{A_1A_2}} = 3\sqrt{3} - 2$

그러므로 수열 $\{l_n\}$은 첫째항이 $\dfrac{2}{3}\pi$이고 공비가 $1 - \dfrac{2\sqrt{3}}{9}$인 등비수열을 이룬다.

$\therefore \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} l_n = \dfrac{\frac{2}{3}\pi}{1 - \left(1 - \frac{2\sqrt{3}}{9}\right)} = \sqrt{3}\pi$

50) ⑤

[출제의도] 무한등비급수의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

원 O_1에 외접하는 정사각형의 한 변의 길이는 2이다.

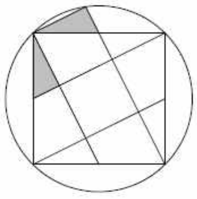
원 O_1에 내접하는 정사각형의 넓이는 2이다.

그림에서 삼각형의 넓이는 같으므로 원 O_2에 외접하는 정사각형의 넓이는

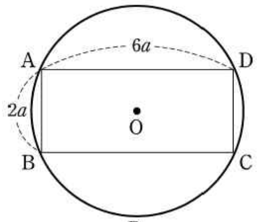
원 O_1에 내접하는 정사각형의 넓이는 $\dfrac{1}{5}$이다. 원 O_2에 외접하는

정사각형의 넓이는 $\frac{2}{5}$이므로 한 변의 길이는 $\sqrt{\frac{2}{5}}$이다. 길이의 비는 $\frac{1}{\sqrt{10}}$이므로 공비인 넓이의 비는 $\frac{1}{10}$이다. 따라서

$\sum_{n-1}^{\infty} S_n = \frac{S_1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{10\pi - 20}{9}$ 이다.



51) ②



R_1

R_1의 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이를 각각 $6a$, $2a$라 하면

$\overline{\mathrm{OA}} = \sqrt{a^2 + 9a^2} = \sqrt{10}\,a = 1$

$\therefore\ a = \frac{1}{\sqrt{10}}$

R_n의 가장 작은 원의 반지름의 길이를 r_n이라 하면

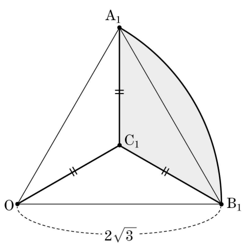
$r_1 = 1,\ r_2 = \frac{1}{\sqrt{10}},\ r_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{10}} r_n$

각 원에서 색칠된 부분의 넓이는 첫 항이 $\pi - \frac{12}{10}$, 공비가 $\frac{1}{10}$인 등비수열이고, 개수는 1개, 2개, 4개, …의 등비수열을 이루므로

$$S_n = \left(\pi - \frac{6}{5}\right) + 2 \cdot \frac{1}{10} \cdot \left(\pi - \frac{6}{5}\right) + 2^2 \cdot \frac{1}{10} \cdot \left(\pi - \frac{6}{5}\right) + \cdots + 2^{n-1} \frac{1}{10^{n-1}} \cdot \left(\pi - \frac{6}{5}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\pi - \frac{6}{5}}{1 - \frac{2}{10}} = \frac{5\pi - 6}{4} = \frac{5}{4}\pi - \frac{3}{2}$$

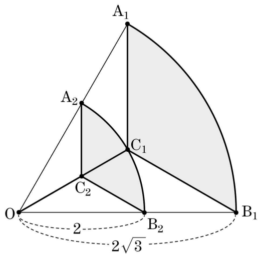
52) ④



점 C_1은 정삼각형 A_1OB_1의 무게중심이므로 삼각형 A_1OC_1의 넓이와 삼각형 C_1OB_1의 넓이는 각각 삼각형 A_1OB_1의 넓이의 $\frac{1}{3}$이다. 따라서 삼각형 C_1OB_1의 넓이는 $\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (2\sqrt{3})^2 = \sqrt{3}$ 이다.

S_1은 부채꼴 A_1OB_1의 넓이에서 두 삼각형 A_1OC_1, C_1OB_1의 넓이를 뺀 값이므로

$S_1 = \frac{1}{2} \cdot (2\sqrt{3})^2 \cdot \frac{\pi}{3} - 2\sqrt{3} = 2\pi - 2\sqrt{3}$



부채꼴 A_1OB_1과 부채꼴 A_2OB_2의 닮음비는

$2\sqrt{3} : 2 = \sqrt{3} : 1$이므로 넓이의 비는 $3:1$이다.

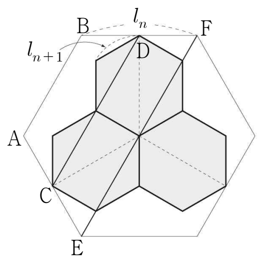
따라서 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $2\pi - 2\sqrt{3}$, 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열이다.

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{2\pi - 2\sqrt{3}}{1 - \frac{1}{3}} = 3\pi - 3\sqrt{3}$

53) ④

H_n의 한 정육각형의 한 변의 길이를 l_n이라 하고

H_{n+1}의 한 정육각형의 한 변의 길이를 l_{n+1}이라 하자.



$2\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{EF}}$이므로 $\frac{3}{2}\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{CD}}$이다.

$\frac{3}{2} l_n = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} l_{n+1}$이 성립하므로, $l_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{4} l_n$에서

$S_{n+1} = 3 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 S_n = \frac{9}{16} S_n$

수열 $\{S_n\}$은

$S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 \times 6 \times 3 = \frac{27}{32}\sqrt{3}$이고, 공비가 $\frac{9}{16}$인 무한등비수열이다.

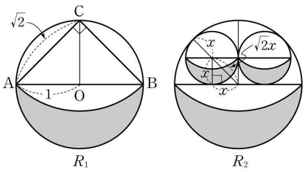
따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{27}{32}\sqrt{3}}{1 - \frac{9}{16}} = \frac{27}{14}\sqrt{3}$

54) ②

$S_1 = \frac{1}{6}\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}$, 넓이의 비 $9 : 4$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{1}{6}\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{6\pi - 9\sqrt{3}}{20}$$

55) ③



R_n에서 새로 만들어지는 모든 ◡ 모양의 넓이의 합을 a_n이라 하면

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$

a_1은 반원의 넓이에서 활꼴의 넓이를 빼면 되므로

$a_1=\frac{1}{2}\cdot 1^2\pi-\left\{\frac{1}{4}(\sqrt{2})^2\pi-\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{2})^2\right\}=1$

위의 그림과 같이 R_2에서 새로 생긴 원의 반지름의 길이를 x라 하면

$x+\sqrt{2}x=1$에서 $x=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$

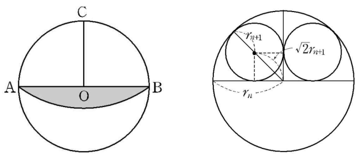
$\therefore\ a_2=2\times(\sqrt{2}-1)^2=6-4\sqrt{2}$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1이고, 공비가 $6-4\sqrt{2}$인 등비수열이다.

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{1}{1-(6-4\sqrt{2})}=\frac{1}{4\sqrt{2}-5}=\frac{5+4\sqrt{2}}{7}$

[다른 풀이]

R_n에서 새로 생긴 작은 원의 반지름을 r_n이라 하고 새로 생긴 작은 원의 색칠된 부분의 넓이를 a_n이라 하자.



[그림 1] [그림 2]

a_1은 반원에서 [그림 1]의 색칠된 부분의 넓이를 빼면 되므로

$a_1=\frac{1}{2}\pi\cdot 1^2-\left(\frac{1}{4}\pi(\sqrt{2})^2-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1\right)=1$

[그림 2]에서

$\sqrt{2}\,r_{n+1}+r_{n+1}=r_n$

$\frac{r_{n+1}}{r_n}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$

$\therefore\ \left(\frac{r_{n+1}}{r_n}\right)^2=(\sqrt{2}-1)^2$

새로 생기는 작은 원들은 직전 원의 개수의 2배씩 생기므로

(공비)$=\frac{a_{n+1}}{a_n}=2\cdot\left(\frac{r_{n+1}}{r_n}\right)^2=2(\sqrt{2}-1)^2$

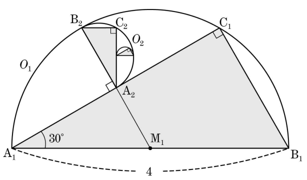
$\therefore\ \frac{a_1}{r-1}=\frac{1}{1-2(\sqrt{2}-1)^2}=\frac{4\sqrt{2}+5}{7}$

56) ②

점 C_1이 반원 O_1 위에 있으므로 삼각형 $A_1B_1C_1$은 선분 A_1B_1이 빗변인 직각삼각형이다.

따라서 $\overline{A_1C_1}=4\cos 30°=2\sqrt{3}$, $\overline{B_1C_1}=4\sin 30°=2$이다.

$\therefore\ S_1=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 2=2\sqrt{3}$



이때 반원 O_1의 지름의 중점을 M_1이라 하면 선분 A_2B_2는 선분 A_1C_1의 수직이등분선이고 현의 수직이등분선은 원의 중심을 지나므로 선분 A_2B_2의 연장선은 반원 O_1의 지름의 중점 M_1을 지난다.

$\overline{M_1A_2}=2\sin 30°=1$이므로 $\overline{A_2B_2}=2-1=1$

$S_2=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{8}$

마찬가지로, 삼각형 $A_nB_nC_n$은 $\overline{A_nB_n}$이 빗변인 직각삼각형이고, 삼각형 $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$의 빗변은

$\overline{A_{n-1}B_{n-1}}=\frac{1}{4}\times\overline{A_nB_n}$

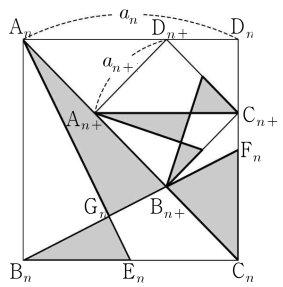
두 닮은 삼각형의 길이의 비는 $4:1$이므로 넓이의 비는 $16:1$이다.

따라서 $\{S_n\}$은 첫째항이 $2\sqrt{3}$이고 공비가 $\frac{1}{16}$인 등비수열이다.

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{2\sqrt{3}}{1-\frac{1}{16}}=\frac{32\sqrt{3}}{15}$

57) ④

그림과 같이 n번째 정사각형 $A_nB_nC_nD_n$의 한 변의 길이를 a_n이라 하자.



$3a_{n+1}=\sqrt{2}\,a_n$, $a_{n+1}=\frac{\sqrt{2}}{3}a_n$이므로 $S_{n+1}=\frac{2}{9}S_n$

$\triangle A_1B_1E_1 \backsim \triangle B_1G_1E_1$에서 $\overline{A_1E_1}:\overline{B_1E_1}=\sqrt{5}:1$이므로

$\triangle A_1B_1E_1:\triangle B_1G_1E_1=5:1$

$\therefore\ \triangle B_1G_1E_1=\frac{1}{5}$

점 B_2는 $\triangle B_1C_1D_1$의 무게중심이므로

$\triangle C_1F_1B_2=\frac{1}{6}\triangle B_1C_1D_1=\frac{1}{3}$

$\triangle A_1E_1C_1$과 $\triangle B_1C_1F_1$의 공통부분이 $\square E_1C_1B_2G_1$이고,

$\triangle A_1E_1C_1=\triangle B_1C_1F_1$이므로

$\triangle A_1G_1B_2=\triangle B_1E_1G_1+\triangle C_1F_1B_2=\frac{1}{5}+\frac{1}{3}=\frac{8}{15}$

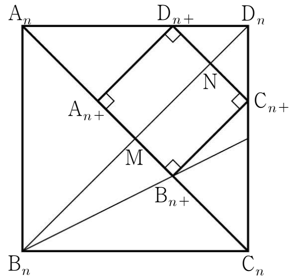
$S_1=\triangle A_1G_1B_2+\triangle B_1E_1G_1+\triangle C_1F_1B_2$

$\quad=2\triangle A_1G_1B_2=\frac{16}{15}$

따라서 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\frac{16}{15}$이고 공비가 $\frac{2}{9}$인 등비수열이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{16}{15}}{1-\frac{2}{9}}=\frac{48}{35}$이다.

[참고] $\square A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$은 정사각형이다.



정사각형 $A_nB_nC_nD_n$에서 두 선분 A_nC_n, $C_{n+1}D_{n+1}$이 선분 B_nD_n과 만나는 점을 각각 M, N이라 하자.

$\triangle B_{n+1}C_nC_{n+1}$이 직각이등변삼각형이므로

$\overline{B_{n+1}C_{n+1}}=\overline{C_nB_{n+1}}$이고

점 B_{n+1}은 $\triangle B_nC_nD_n$의 무게중심이므로

$\overline{C_nB_{n+1}}=2\overline{B_{n+1}M}$

$\therefore\ \overline{B_{n+1}C_{n+1}}=2\overline{B_{n+1}M}$ ⋯⋯ ㉠

$\angle B_{n+1}=\angle C_{n+1}=90^\circ$, $\overline{A_nC_n}\perp\overline{B_nD_n}$로

$\square MB_{n+1}C_{n+1}N$이 직사각형이므로

$\overline{B_{n+1}M}=\overline{C_{n+1}N}$,

$\triangle NC_{n+1}D_n$과 $\triangle ND_nD_{n+1}$이 직각이등변삼각형이므로

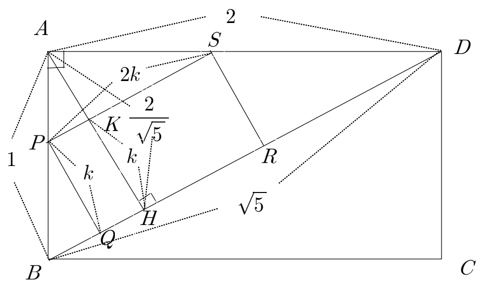
$\overline{C_{n+1}N}=\overline{ND_{n+1}}$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $\overline{B_{n+1}C_{n+1}}=\overline{C_{n+1}D_{n+1}}$

따라서 $\square A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$은 정사각형

58) ④

그림과 같이 삼각형 ABD에 내접하는 직사각형을 $PQRS$ 라고 할 때,



주어진 조건에 의해 직사각형의 두 변의 길이가 $1:2$이므로

$\overline{PQ}=k$, $\overline{PS}=2k$가 된다.

직각삼각형 ABD에서 $\overline{BD}=\sqrt{5}$

A에서 $\overline{BD}$에 내린 수선의 발을 H라 두면

삼각형 ABD의 넓이는

$\frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{AD}=\frac{1}{2}\overline{BD}\times\overline{AH}$

$\overline{AB}\times\overline{AD}=\overline{BD}\times\overline{AH}$

$1\times2=\sqrt{5}\times\overline{AH}$

$\therefore\ \overline{AH}=\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\overline{AH}$와 $\overline{PS}$의 교점을 K라 하면

$\overline{AK}=\frac{2}{\sqrt{5}}-k$

삼각형 ABD와 삼각형 APS는 닮음이므로

$\overline{PS}:\overline{BD}=\overline{AK}:\overline{AH}$

$2k:\sqrt{5}=(\frac{2}{\sqrt{5}}-k):\frac{2}{\sqrt{5}}$

$k=\frac{2\sqrt{5}}{9}$

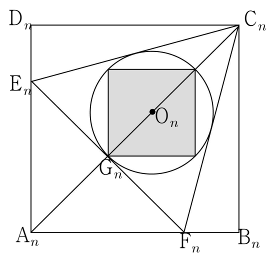
그러므로 직사각형 $ABCD$의 짧은 변의 길이 1이 직사각형 $PQRS$의 짧은 변 k로 줄었기 때문에 길이가 줄어드는 비율은 k이고 넓이가 줄어드는 비율은 $k^2=\frac{40}{81}$이다.

$\lim_{n\to\infty}S_n$이 의미하는 것은 발생하는 모든 직사각형의 합이므로 무한등비급수의 공식에 의해서

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{2k^2}{1-k^2}=\frac{2\times\frac{20}{81}}{1-\frac{20}{81}}=\frac{40}{61}\text{이다.}$$

59) 9

그림과 같이 정사각형 R_n의 꼭짓점을 각각 A_n, B_n, C_n, D_n이라 하고, 문제의 조건에 따라 그린 정삼각형의 꼭짓점을 각각 C_n, E_n, F_n이라 하자.



정사각형 R_n의 한 변의 길이를 a_n, 정삼각형 $C_nE_nF_n$의 한 변의 길이를 b_n이라 하자.

$\overline{C_nG_n}+\overline{G_nA_n}=\sqrt{2}\,a_n$

$\frac{\sqrt{3}}{2}b_n+\frac{1}{2}b_n=\sqrt{2}\,a_n$

$b_n=(\sqrt{6}-\sqrt{2})a_n$

원 O_n의 반지름의 길이 r_n은

$r_n=\frac{\sqrt{3}}{2}b_n\times\frac{1}{3}$

정사각형 R_{n+1}의 한 변의 길이는 $\sqrt{2}\,r_n$이므로

$a_{n+1}=\sqrt{2}\,r_n=\frac{\sqrt{6}}{6}b_n=\frac{\sqrt{6}}{6}(\sqrt{6}-\sqrt{2})a_n$

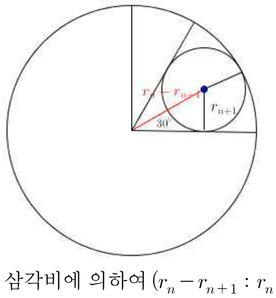
$\therefore a_{n+1}=\frac{3-\sqrt{3}}{3}a_n$

수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 1, 공비가 $\frac{4-2\sqrt{3}}{3}$인 등비수열이다.

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{1}{1-\frac{4-2\sqrt{3}}{3}}=\frac{3+6\sqrt{3}}{11}$

$\therefore a+b=9$

60) ③



삼각비에 의하여 $(r_n-r_{n+1}:r_{n+1})=2:1$이므로

$r_{n+1} = \frac{1}{3} r_n \quad , r_1 = 1$

$r_n = \frac{1}{3^{n-1}} \Rightarrow S_n = \left(\frac{1}{3^{n-1}}\right)^2 \cdot 4^{n-1}\pi = \frac{\pi}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$

$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{\pi}{3}}{\frac{1-4}{9}} = \frac{3}{5}\pi$

$\therefore \frac{3}{5}\pi$

61) ③

R_1 에 있는 원의 반지름의 길이는 $2-\sqrt{2}$ 이므로

$S_1 = (2-\sqrt{2})^2 \pi$

R_2 에 있는 작은 정사각형의 한 변의 길이를 x 라 하면

$\overline{\mathrm{AC}} = 2\sqrt{2}x + 2(2-\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$

$x = 2-\sqrt{2}$

R_1 에 있는 원과 R_2 에 있는 작은 원의 넓이의 비는

$2^2 : (2-\sqrt{2})^2 = 1 : \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

따라서 R_n 과 R_{n+1} 에서 각각 새로 그려지는 두 원의 넓이의 비는

$1 : \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$ 이고 원의 개수의 비는 $1 : 2$ 이다.

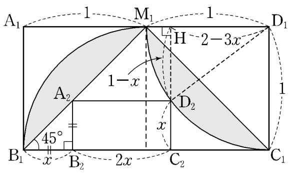
그러므로 구하는 무한급수의 합은 첫째항이 $S_1 = (2-\sqrt{2})^2\pi$ 이고, 공비가

$2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 3-2\sqrt{2}$ 인 무한등비급수의 합과 같다.

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{(2-\sqrt{2})^2\pi}{1-(3-2\sqrt{2})} = (\sqrt{2}-1)\pi$

62) ③

무한등비급수 $S = \frac{a}{1-r}$ 를 구한다.



R_1 의 넓이 $a = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) \times 2 = \frac{\pi}{2} - 1$

공비 r 를 구하기 위해 먼저 길이의 닮음비 $\frac{\overline{\mathrm{C_2D_2}}}{\overline{\mathrm{C_1D_1}}}$ 를 구한다.

$\overline{\mathrm{C_2D_2}} = x$ 라 두면 $\mathrm{D_2}$ 에서 $\overline{\mathrm{A_1D_1}}$ 에서 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\overline{\mathrm{B_1M_1}}$ 과 $\overline{\mathrm{B_1C_1}}$ 이 이루는 각이 $45°$ 이므로

$\overline{\mathrm{B_1B_2}} = \overline{\mathrm{A_2B_2}} = x, \quad \overline{\mathrm{B_2C_2}} = 2x, \quad \overline{\mathrm{HD_1}} = 2-3x, \quad \overline{\mathrm{HD_2}} = 1-x$ 가 되고

$\overline{\mathrm{HD_1}}^2 + \overline{\mathrm{HD_2}}^2 = \overline{\mathrm{D_1D_2}}^2 = 1$ 에서

$(2-3x)^2 + (1-x)^2 = 1$

$5x^2 - 7x + 2 = 0$

$(5x-2)(x-1) = 0 \quad \therefore\ x = \frac{2}{5}, 1$

$x \neq 1$ 이므로 $\quad x = \frac{2}{5}$

따라서, 넓이의 비는 $\frac{4}{25}$ 이고, 이것이 공비가 된다.

$\therefore\ S = \frac{\frac{\pi}{2}-1}{1-\frac{4}{25}} = \frac{25}{21}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$

63) ④

$\overline{\mathrm{P_1B_1}} = \overline{\mathrm{B_1Q_1}} = 2$, $\angle \mathrm{P_1B_1Q_1} = 90°$ 이므로

직각이등변삼각형 $\mathrm{P_1B_1Q_1}$ 의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 2^2 = 2$ 이다.

$\overline{\mathrm{B_1D_1}}$ 이 정사각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$ 의 두 변 $\mathrm{B_2C_2}$, $\mathrm{D_2A_2}$ 와 만나는 점을 각각 $\mathrm{M_1}$, $\mathrm{N_1}$ 이라 하고, 정사각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$ 의 한 변의 길이를 x 라 하면

$\overline{\mathrm{B_1M_1}} = \sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{M_1N_1}} = x$, $\overline{\mathrm{N_1D_1}} = \overline{\mathrm{A_2N_1}} = \frac{x}{2}$

이고 $\overline{\mathrm{B_1D_1}} = 3\sqrt{2}$ 이므로

$\overline{\mathrm{B_1D_1}} = \overline{\mathrm{B_1M_1}} + \overline{\mathrm{M_1N_1}} + \overline{\mathrm{N_1D_1}} = \sqrt{2} + x + \frac{x}{2} = 3\sqrt{2}$

$\therefore\ x = \frac{4\sqrt{2}}{3}$

따라서 두 정사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$ 과 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$ 의 닮음비는

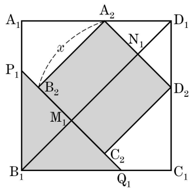
$\overline{\mathrm{A_1B_1}} : \overline{\mathrm{A_2B_2}} = 3 : \frac{4\sqrt{2}}{3} = 9 : 4\sqrt{2}$ 이다.

모든 자연수 n 에 대하여 그림 R_n 은 정사각형과 직각이등변삼각형으로 이루어진 닮음인 도형이므로

그림 R_1 에 색칠되어 있는 부분의 넓이 S_1 과

그림 R_2 에 색칠되어 있는 부분의 넓이 S_2 의 비는

$S_1 : S_2 = 9^2 : (4\sqrt{2})^2 = 81 : 32$



그림에서 그림 R_1 에 색칠되어 있는 부분의 넓이 S_1 은 정사각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$ 의 넓이와 직각이등변삼각형 $\mathrm{P_1B_1Q_1}$ 의 넓이의 합이므로 수열 $\{S_n\}$ 은

첫째항이 $S_1 = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 + \left(\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{50}{9}$ 이고

공비가 $\frac{32}{81}$ 인 등비수열이다.

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{50}{9}}{1-\frac{32}{81}} = \frac{450}{49}$

[다른 풀이]

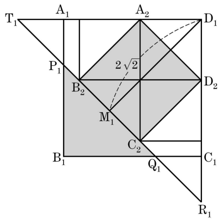
정사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$ 의 한 변의 길이가 3 이므로 $\overline{\mathrm{B_1D_1}} = 3\sqrt{2}$

꼭짓점 $\mathrm{D_1}$ 에서 선분 $\mathrm{P_1Q_1}$ 에 내린 수선의 발을 $\mathrm{M_1}$ 이라 하면

$\overline{\mathrm{D_1M_1}} = 2\sqrt{2}$ 이다.

직선 $\mathrm{D_1A_1}$ 과 직선 $\mathrm{P_1Q_1}$ 의 교점을 $\mathrm{T_1}$, 직선 $\mathrm{C_1D_1}$ 과 직선 $\mathrm{P_1Q_1}$ 의 교점을 $\mathrm{R_1}$ 이라 하자.

이때 정사각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$ 의 넓이는 직각이등변삼각형 $\mathrm{T_1R_1D_1}$ 의 넓이의 $\frac{4}{9}$ 이다.



직각이등변삼각형 $T_1R_1D_1$ 은 높이가 $2\sqrt{2}$ 이고, 밑변의 길이가 $4\sqrt{2}$ 이므로 직각이등변삼각형 $T_1R_1D_1$ 의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times 4\sqrt{2}=8$

이고, 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 의 넓이는

$8\times\frac{4}{9}=\frac{32}{9}$

이다. 따라서 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 의 한 변의 길이는

$\overline{A_2B_2}=\sqrt{\frac{32}{9}}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$

$\therefore\ \overline{A_1B_1}:\overline{A_2B_2}=3:\frac{4\sqrt{2}}{3}=9:4\sqrt{2}$

모든 자연수 n에 대하여 그림 R_n 은 정사각형과 직각이등변삼각형으로 이루어진 닮음인 도형이므로

그림 R_1에 색칠되어 있는 부분의 넓이 S_1과

그림 R_2에 색칠되어 있는 부분의 넓이 S_2의 비는

$S_1:S_2=9^2:(4\sqrt{2})^2=81:32$

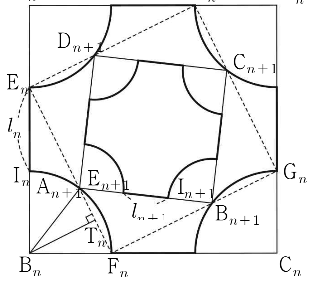
그림에서 그림 R_1에 색칠되어 있는 부분의 넓이 S_1은 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 넓이와 직각이등변삼각형 $P_1B_1Q_1$의 넓이의 합이므로 수열 $\{S_n\}$은

첫째항이 $S_1=\frac{1}{2}\times 2\times 2+\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)^2=\frac{50}{9}$ 이고 공비가 $\frac{32}{81}$ 인 등비수열이다.

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{50}{9}}{1-\frac{32}{81}}=\frac{450}{49}$$

64) ⑤

그림과 같이 정사각형 $A_nB_nC_nD_n$에서 점 B_n을 중심으로 하고 선분 B_nF_n을 반지름으로 하는 사분원이 선분 A_nB_n과 만나는 점을 I_n이라 하고, $\overline{E_nI_n}=l_n$이라 하자.



$\overline{B_nF_n}=l_n$, $\overline{E_nB_n}=2l_n$이므로 $\overline{E_nF_n}=\sqrt{5}\,l_n$

점 B_n에서 선분 F_nA_{n+1}에 내린 수선의 발을 T_n이라 하자.

$\triangle B_nF_nT_n \backsim \triangle E_nF_nB_n$이므로

$\overline{B_nF_n}:\overline{F_nT_n}=\overline{E_nF_n}:\overline{F_nB_n}$

$$\therefore\ \overline{F_nT_n}=\frac{(\overline{B_nF_n})^2}{\overline{E_nF_n}}=\frac{\sqrt{5}}{5}l_n$$

$\triangle B_nF_nA_{n+1}$이 이등변삼각형이므로

$\overline{F_nA_{n+1}}=2\overline{F_nT_n}=\frac{2\sqrt{5}}{5}l_n$

$\overline{A_{n+1}E_n}=\overline{E_nF_n}-\overline{F_nA_{n+1}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}l_n$

$\triangle A_{n+1}E_nD_{n+1}\equiv\triangle B_{n+1}F_nA_{n+1}$이므로

$\overline{F_nB_{n+1}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}l_n$

$\overline{A_{n+1}B_{n+1}}=\frac{\sqrt{65}}{5}l_n$

$l_{n+1}=\frac{1}{3}\overline{A_{n+1}B_{n+1}}=\frac{\sqrt{65}}{15}l_n$이므로

$S_{n+1}=\frac{13}{45}S_n$

그러므로 수열 $\{S_n\}$은 $S_1=9-\pi$이고, 공비가 $\frac{13}{45}$인 등비수열이다.

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{9-\pi}{1-\frac{13}{45}}=\frac{45}{32}(9-\pi)$

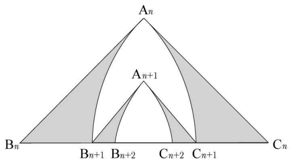
65) 5

$S_1=2\{$(삼각형 $A_1B_1C_1$의 넓이) $-$(부채꼴 $B_1A_1C_2$의 넓이)$\}$

$=2\left(4-\frac{1}{2}\cdot 8\cdot\frac{\pi}{4}\right)=2(4-\pi)$

$S_2=2\{$(삼각형 $A_2B_2C_2$의 넓이)$-$(부채꼴 $B_2A_2C_3$의 넓이)$\}$

$=2(4-\pi)(\sqrt{2}-1)^2$



$\overline{B_nC_n}=2l_n$, $\overline{B_{n+1}C_{n+1}}=2l_{n+1}$이라 하면

$\overline{A_nB_n}=\overline{B_nC_{n+1}}=\sqrt{2}\,l_n$ 이고 $\frac{1}{2}\overline{B_nC_n}+\frac{1}{2}\overline{B_{n+1}C_{n+1}}=\overline{B_nC_{n+1}}$ 이므로

$l_n+l_{n+1}=\sqrt{2}\,l_n$

$l_{n+1}=(\sqrt{2}-1)l_n$

$S_{n+1}=(\sqrt{2}-1)^2S_n$

$\frac{1}{4-\pi}\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{1}{4-\pi}\cdot\frac{2(4-\pi)}{1-(\sqrt{2}-1)^2}=1+\sqrt{2}$

$a=1$, $b=2$

따라서 $a^2+b^2=5$

66) ①

원의 중심을 O라 하면

$S_1=$(직사각형$A_1B_1C_1D_1$)$+$(삼각형$\triangle OA_1C_1$)$-$(부채꼴OA_1C_1)

이 됨을 알 수 있다. 즉,

$S_1=(2\sqrt{3}\times 1)+(\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 1)-(\frac{1}{2}\times 2\times 2\times\frac{2\pi}{3})=3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi$

또한 O_2의 반지름의 길이는 O_1의 반지름의 $\frac{1}{2}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}\left(3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi\right)=4\sqrt{3}-\frac{16}{9}\pi$$

67) ①

[출제의도] 무한급수를 활용하여 추론하기

마름모의 성질에 의하여 마름모 ADEF의 두 대각선이 만나는 점과 원의 중심이 일치하므로

$\overline{\mathrm{OE}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AE}}=2\sqrt{3}$

$\angle \mathrm{EOP}=60^{\circ}$ 이므로 $\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{PE}}=3$

사각형 OPEQ의 넓이 $S_1=3\sqrt{3}$

그림 R_n에서 새로 그려진 정삼각형의 한 변의 길이를 a_n이라 하면

$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$

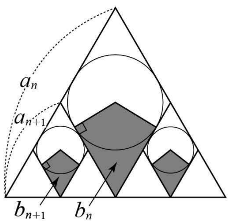


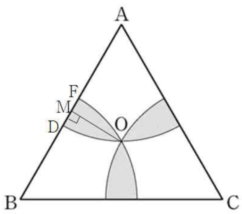
그림 R_n에 색칠한 한 개의 사각형의 넓이를 b_n이라 하면 $b_{n+1}=\frac{1}{4}b_n$

그림 R_{n+1}에서 새로 그려진 사각형의 개수는 그림 R_n에서 새로 그려진 사각형의 개수의 2배이다.

그러므로 S_n은 첫째항이 $3\sqrt{3}$ 이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이다.

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{3\sqrt{3}}{1-\frac{1}{2}}=6\sqrt{3}$

68) ③



O가 정삼각형의 외심이므로 무게중심과 일치한다.

$\overline{DF}$의 중점을 M이라 하자.

$S_1=6\times$(부채꼴$AOD-$삼각형AOM)

부채꼴$AOD-$삼각형$AOM=a$ 라 하면

$\overline{AO}=2\sqrt{3}$, $\overline{AM}=3$

$a=\frac{1}{2}(2\sqrt{3})^2\times\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\times3\times\sqrt{3}=\pi-\frac{3}{2}\sqrt{3}$

$\therefore S_1=6(\pi-\frac{3}{2}\sqrt{3})$

$\overline{AF}=6-\overline{BF}=6-2\sqrt{3}$ 이므로

한 변의 길이가 6인 정삼각형ABC가 삼각형 AFI 로 축소되므로

길이의 비는 $\frac{6-2\sqrt{3}}{6}$, 넓이의 비는 $(\frac{6-2\sqrt{3}}{6})^2$,

개수는 3배로 증가하므로,

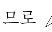
$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{6(\pi-\frac{3}{2}\sqrt{3})}{1-3(\frac{6-2\sqrt{3}}{6})^2}=(2\pi-3\sqrt{3})(2\sqrt{3}+3)$$

69) ①

[출제의도] 등비수열의 일반항을 추측하여 무한등비급수의 합을 구한다.

점 $\mathrm{A_2}$를 지나고 선분 $\mathrm{B_1C_1}$에 평행한 직선과 선분 $\mathrm{A_1B_1}$, 선분 $\mathrm{A_1C_1}$의 교점을 각각 P, Q라 하자.

두 삼각형 $\mathrm{A_1B_1C_1}$, $\mathrm{A_1PQ}$의 닮음비는 $3:2$, 두 삼각형 $\mathrm{A_1PQ}$, $\mathrm{A_2B_2C_2}$의 닮음비는 $2:1$이므로 삼각형 $\mathrm{A_1B_1C_1}$과 삼각형 $\mathrm{A_2B_2C_2}$의 닮음비는 $3:1$

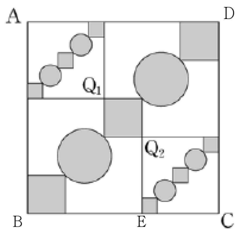
그러므로 과 의 넓이의 비는 $9:1$

$$S_1=\left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\times2^2-\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\right\}\times\frac{2}{3}+2\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{7}{6}\sqrt{3}-\frac{2}{9}\pi \quad \therefore \frac{S_1}{1-\frac{1}{9}}=\frac{1}{16}(21\sqrt{3}-4\pi)$$

70) ②

[출제의도] 무한등비급수를 이용하여 반복되는 도형에서 넓이의 합에 대한 극한값을 구할 수 있는가?



$\overline{\mathrm{BE}}$: $\overline{\mathrm{EC}}=3$: 2이므로 닮음비는 $\frac{2}{5}$이다.

따라서 넓이의 비는 $\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{4}{25}$이고 도형의 개수는 2배씩 늘어나므로

무한등비급수의 공비는 $\frac{4}{25}\times2=\frac{8}{25}$

또한, 그림 R_1에서 $\overline{\mathrm{BD}}=5\sqrt{2}$ 이므로

$S_1=3\times1+2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\pi \ =3+\pi$

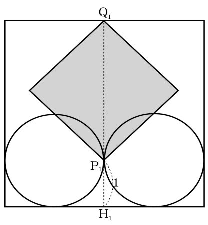
$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{3+\pi}{1-\frac{8}{25}} \ =\frac{25}{17}(\pi+3)$

71) ①

[출제의도] 도형의 성질을 이용하여 등비급수의 합을 구하는 문제를 해결한다.

정사각형 R_1의 한 변의 길이를 구하기 위해 점 $\mathrm{P_1}$에서 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형의 한 변에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H_1}$이라 하면,

$\overline{\mathrm{P_1H_1}}=1$이므로 $\overline{\mathrm{P_1Q_1}}=3$이다.



이때, 피타고라스의 정리에 의해 정사각형 R_1의 한 변의 길이는

$\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 이다.

(최초의 정사각형의 한 변의 길이) : (정사각형 R_1의 한 변의 길이)

$=4:\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 이므로

수열 $\{l_n\}$의 공비는 $\frac{3\sqrt{2}}{8}$, 정사각형 R_1의 한 변의 길이는 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$이므로 $l_1=\frac{3\sqrt{2}}{2}$이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} l_k=\frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{3\sqrt{2}}{8}}=\frac{12\sqrt{2}}{8-3\sqrt{2}}=\frac{12(3+4\sqrt{2})}{23}$

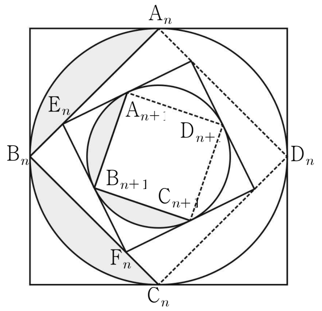
72) ①

[출제의도] 등비급수를 활용하여 문제해결하기

그림 R_1에서

$S_1=2\times\left(\frac{1}{4}\times 2^2\times\pi-\frac{1}{2}\times 2\times 2\right)=2(\pi-2)$

다음은 그림 R_{n+1}의 일부이다.



그림에서 $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=a$라 하자. 두 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$, $\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$을 각각 $3:1$로 내분하는 두 점을 E_n, F_n이라 하면,

$\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{E}_n}=\frac{1}{4}a$, $\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{F}_n}=\frac{3}{4}a$

$\overline{\mathrm{E}_n\mathrm{F}_n}=\sqrt{\left(\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{E}_n}\right)^2+\left(\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{F}_n}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{4}a$

$\therefore\ \overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\overline{\mathrm{E}_n\mathrm{F}_n}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{10}}{4}a=\frac{\sqrt{5}}{4}\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}$

두 정사각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$, $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{D}_{n+1}$은 서로 닮음이고, 닮음비는 $1:\frac{\sqrt{5}}{4}$이다.

그러므로 그림 R_n에서 새로 얻어진 모양의 도형과 그림 R_{n+1}에서 새로 얻어진 모양의 도형도 서로 닮음이고 닮음비가 $1:\frac{\sqrt{5}}{4}$이다.

따라서 S_n은 첫째항이 $2(\pi-2)$이고 공비가 $\left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)^2=\frac{5}{16}$인 등비수열의 첫째항부터 제$n$항까지의 합이다.

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{2(\pi-2)}{1-\frac{5}{16}}=\frac{32}{11}(\pi-2)$

73) ⑤

$S_1=$ ($\triangle\mathrm{A}_1\mathrm{E}_1\mathrm{D}_1$의 넓이)+($\triangle\mathrm{E}_1\mathrm{B}_1\mathrm{F}_1$의 넓이)+($\triangle\mathrm{D}_1\mathrm{F}_1\mathrm{C}_1$의 넓이)

$=1+\frac{1}{2}+1=\frac{5}{2}$

$\triangle\mathrm{E}_1\mathrm{F}_2\mathrm{D}_1$으로부터 $\overline{\mathrm{E}_1\mathrm{F}_2}:\overline{\mathrm{D}_1\mathrm{F}_2}=1:3$이므로

정사각형 $\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2\mathrm{C}_2\mathrm{D}_2$의 한 변의 길이를 x라 두면

$\triangle\mathrm{A}_2\mathrm{E}_1\mathrm{B}_2$로부터 $\overline{\mathrm{E}_1\mathrm{B}_2}:\overline{\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{x}{2}:x=1:3$

따라서 $x=\frac{3\sqrt{2}}{5}$

$\square\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1\mathrm{D}_1$과 $\square\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2\mathrm{C}_2\mathrm{D}_2$의 길이 비는 $1:\frac{3\sqrt{2}}{10}$

$\lim_{x\to\infty}S_n=\frac{\frac{5}{2}}{1-\left(\frac{3\sqrt{2}}{10}\right)^2}=\frac{\frac{5}{2}}{\frac{82}{100}}=\frac{125}{41}$

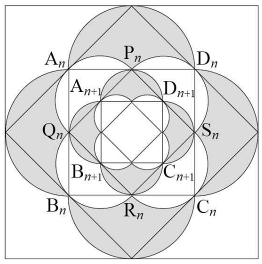
74) ①

[출제의도] 등비급수를 활용하여 추론하기

$T_1=$(도형 E_1의 넓이)$-$(도형 F_1의 넓이)

$=(2\pi+4)-(\pi+2)=\pi+2$

그림은 G_{n+1}의 일부이다.



정사각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$의 한 변의 길이를 a_n이라 하면

$\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n}=\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}}+\overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}}+\overline{\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{C}_n}$

$\sqrt{2}a_n=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{a_n}{2}+\sqrt{2}a_{n+1}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{a_n}{2}$

$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$

그림 G_{n+1}의 새로 색칠된 부분의 넓이를 b_{n+1}이라 하면

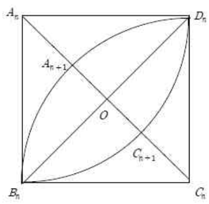
$b_{n+1}=\frac{1}{4}b_n$, $b_1=T_1$

그러므로 T_n은 첫째항이 $\pi+2$이고 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}T_n=\frac{\pi+2}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}(\pi+2)$

75) ③

[출제의도] 규칙적으로 무한히 반복되는 도형에서 급수를 이용하여 넓이의 합을 구할 수 있는가?



정사각형 $\mathrm{A_nB_nC_nD_n}$의 한 변의 길이를 x_n, 두 대각선의 교점을 O라 하면

$\overline{\mathrm{OA_n}}=\frac{\sqrt{2}}{2}x_n$

따라서, $\overline{\mathrm{A_nC_{n+1}}}=x_n$이므로

$\overline{\mathrm{OC_{n+1}}}=x_n-\frac{\sqrt{2}}{2}x_n=\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)x_n$

따라서,

$\overline{A_nC_n} : \overline{A_{n+1}C_{n+1}} = \sqrt{2}x_n : 2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)x_n = \sqrt{2} : (2-\sqrt{2})$

이므로 닮음비는 $\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}-2}{2} = \sqrt{2}-1$ 이고,

공비는 $(\sqrt{2}-1)^2$이다.
또한, $x_1 = 1$이므로

$\overline{A_1A_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}-1$ 이므로

$S_1 = 2\times\frac{1}{4}(\sqrt{2}-1)^2 = \frac{1}{2}(3-2\sqrt{2})$

따라서,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{1}{2}(3-2\sqrt{2})}{1-(\sqrt{2}-1)^2} = \frac{\frac{1}{2}(3-2\sqrt{2})}{2\sqrt{2}-2} = \frac{1}{4}(\sqrt{2}-1)$$

76) ⑤

[출제의도] 등비수열의 일반항을 추측하여 등비급수의 활용문제를 해결한다.

선분 BC 를 1 : 3 으로 내분하므로 $\overline{BE} = 1$
선분 DA 를 1 : 3 으로 내분하므로 $\overline{DF} = 1$
따라서 그림 R_1 에서 색칠된 평행사변형 BEDF 의 넓이는 $1\times4 = 4$ 이다.
그림 R_2 에서 삼각형 ECD 안의 정사각형의 한 변의 길이를 x 라 하자.
삼각형 ECD 에서 정사각형을 제외한 두 직각삼각형은 정사각형의 마주보는 두 변이 평행하므로 삼각형 ECD 와 닮음이다. 이 중 좌측 직각삼각형의 밑변의 길이는 삼각형 ECD 의 밑변과 높이의 비가 3 : 4 이므로 $\frac{3}{4}x$ 가 된다. 따라서 $\overline{EC} = \frac{3}{4}x + x = \frac{7}{4}x = 3$

그러므로 $x = \frac{12}{7}$

한 변의 길이가 $\frac{12}{7}$ 인 정사각형과 한 변의 길이가 4 인 정사각형의

닮음비는 $\frac{12}{7} : 4 = 3 : 7$ 이므로 넓이의 비는 $9 : 49$ 이다.

그런데 두 개의 평행사변형이 그려지므로 그림 R_1 에서 색칠된 도형의

넓이의 $\frac{9}{49}\times2 = \frac{18}{49}$ 이 그림 R_2 에서 새로 색칠된다. 따라서 그림 R_n 에

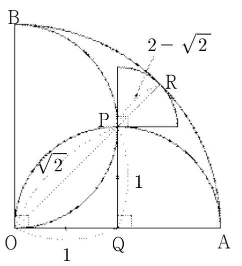
색칠되어 있는 도형의 넓이는 첫째항이 4 이고 공비가 $\frac{18}{49}$ 인 등비수열의

첫째항부터 제n 항까지의 합이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{4}{1-\frac{18}{49}} = \frac{4\times49}{49-18} = \frac{196}{31}$

77) ②

[출제의도] 도형에서 등비급수의 성질을 이용하여 관련 문항을 해결할 수 있다.



그림과 같이 두 반원의 호가 만나는 점을 P 라 하고
점 P 에서 선분 OA 에 내린 수선의 발을 Q ,
직선 OP 와 부채꼴 OAB 의 호 AB 가 만나는 점을 R 라 하면
$\overline{PQ} = \overline{OQ} = 1$, $\overline{OP} = \sqrt{2}$, $\overline{PR} = 2-\sqrt{2}$

그림 R_1 에서 그려진 도형의 넓이 S_1 은 부채꼴 QOP 의 넓이에서 삼각형 QOP 의 넓이를 뺀 값의 2 배이므로 $S_1 = 2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}-1$

중심각이 O 이고 반지름의 길이가 2 인 부채꼴과
중심각이 P 이고 반지름의 길이가 $2-\sqrt{2}$ 인 부채꼴은 중심각이 90° 이므로 닮은 도형이다. 닮음의 비가 $m : n$ 이면 넓이의 비가 $m^2 : n^2$ 이므로
구하는 등비급수의 공비를 r 라 하면

$r = \left(\frac{\overline{PR}}{\overline{OR}}\right)^2 = \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{3-2\sqrt{2}}{2}$ 이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{S_1}{1-r}$

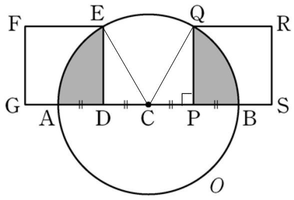
$$= \frac{\frac{\pi-2}{2}}{1-\frac{3-2\sqrt{2}}{2}} = \frac{\pi-2}{2\sqrt{2}-1}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}+1}{7}(\pi-2)$$

78) ③

[출제의도] 도형의 넓이를 등비급수의 합을 이용하여 구할 수 있는가?

그림 R_1에서 아래 그림과 같이 두 점 C, Q를 연결하여 직각삼각형 QCP를 만든다.



직각삼각형 QCP에서 $\overline{CQ} = 2$, $\overline{CP} = 1$이므로

$\overline{PQ} = \sqrt{\overline{CQ}^2 - \overline{CP}^2}$
$= \sqrt{2^2-1^2}$
$= \sqrt{3}$

이때, $\angle QCP = \frac{\pi}{3}$ 이다.

그러므로 도형 R_1에 색칠된 부분의 넓이는
$2\{(\text{부채꼴 QCB의 넓이}) - (\triangle\text{QCP의 넓이})\}$

$= 2\left\{\frac{1}{2}\times2^2\times\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}\right\}$

$= \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$ .... ㉠

한편 그림 R_2에서 새로 그려진 원의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{PQ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

그러므로 그림 R_1에 있는 원과 그림 R_2에 있는 원의 반지름의 길이의 비는

$2 : \frac{\sqrt{3}}{2}$ 즉, $1 : \frac{\sqrt{3}}{4}$ 이다.

이때 넓이의 비는 $1 : \frac{3}{16}$ 이다.

한편, 그림 R_1의 원의 개수와 그림 R_2의 원의 개수의 비는 $2 : 4$ 즉, $1 : 2$이므로 공비는

$\frac{3}{16}\times2 = \frac{3}{8}$

이다. 따라서, 구하는 극한값은

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}}{1-\frac{3}{8}} = \frac{32\pi - 24\sqrt{3}}{15}$$

휴~ 수고하셨습니다!

너무 쉽지만 자칫하면 멘탈이 깨질 수도 있는 무한등비급수였습니다.

안 풀리면 넘어가고! 멘탈 꼭 잡도록 합시다.

이건 약간의 팁인데, 결국 답은 $\frac{a}{1-r}$이고, 답을 못 구한다는 것은 $1-r$과, a중 하나의 값밖에 못 구했다는 뜻이니까.

객관식 보기를 $1-r$ 또는 a로 나눴을 때 나누어떨어지는 것으로 찍어주시면 정답 확률이 훨씬 높습니다.

특히나 보기가

① $\frac{12\pi-9\sqrt{3}}{10}$ ② $\frac{8\pi-6\sqrt{3}}{5}$ ③ $\frac{32\pi-24\sqrt{3}}{15}$

④ $\frac{28\pi-21\sqrt{3}}{10}$ ⑤ $\frac{16\pi-12\sqrt{3}}{5}$

와 같이 2개의 덩어리 형태이면 더욱 그렇습니다.

다들 9평 대박나세요!