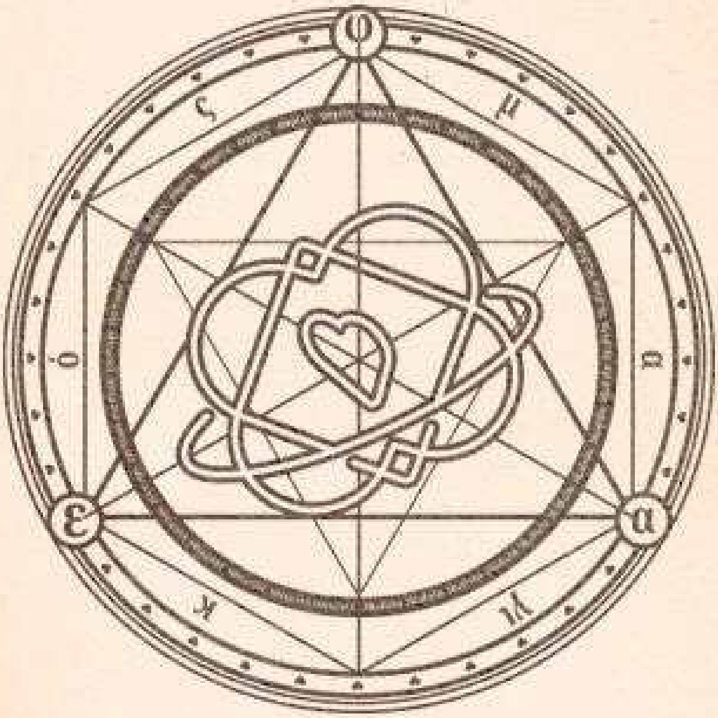
우주설 수학자료

9평전 약점체크+몸풀기

WJSN

Dream your dream

도형을 활용한 극한



2018. 02. 27

Coming Soon

by우주설

*1.*오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 ABCD에서 변 AB의 중점을 E, 변 CD의 중점을 F라 하자.
선분 AD 위의 양 끝점이 아닌 임의의 점 P에 대하여 선분 BP와 선분 EF의 교점을 G, 선분 CP와 선분 EF의 교점을 H라 하자. $\angle \mathrm{BGE} = \alpha$, $\angle \mathrm{CHF} = \beta$ 라 할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

[4점][2005년 6월]

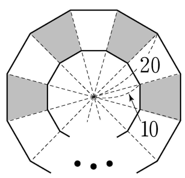
<보 기>

ㄱ. $\overline{\mathrm{GH}}$는 점 P의 위치에 관계없이 일정하다.
ㄴ. $\alpha+\beta$는 점 P의 위치에 관계없이 일정하다.
ㄷ. $\lim_{\alpha \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\overline{\mathrm{AP}}}{\frac{\pi}{2}-\alpha} = 2$

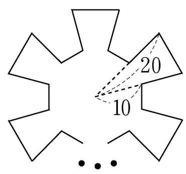
① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄷ

2. [그림1]은 중심이 같은 두 개의 정 $2n$각형에서 큰 정 $2n$각형의 꼭지점, 작은 정 $2n$각형의 꼭지점과 중심이 한 직선 위에 있도록 연결한 것이다. 중심에서 두 개의 정 $2n$각형의 꼭지점까지의 거리는 각각 10, 20이다. [그림1]의 어두운 부분을 잘라내어 만든 [그림2]와 같은 도형의 넓이를 S_n이라 하자. $\dfrac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty} S_n$의 값을 구하시오.

[4점][2005년 6월]



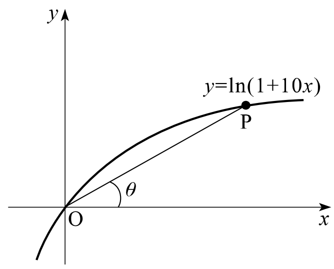
[그림1]



[그림2]

3. 곡선 $y=\ln(1+10x)$ 위를 움직이는 점 P와 원점 O를 이은 선분이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라 한다. 점 P가 원점 O에 한없이 가까워질 때, $\tan\theta$의 극한값은?

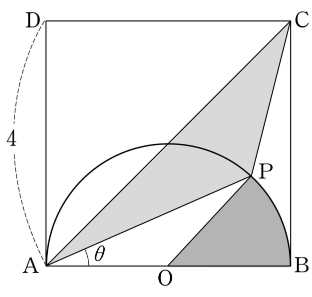
[3점][2005년 7월]



① 1 ② 5 ③ 10 ④ e ⑤ ln10

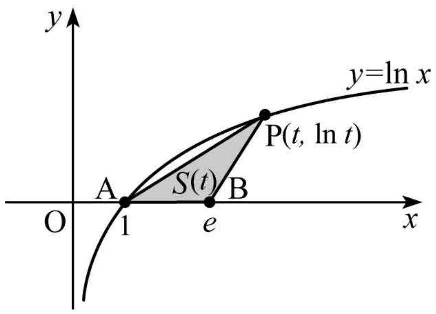
4. 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형 ABCD에서 변 AB의 중점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 반원 위에 점 P가 있다. $\angle \mathrm{BAP} = \theta$일 때 삼각형 APC의 넓이를 $f(\theta)$, 부채꼴 OBP의 넓이를 $g(\theta)$라 하자.
$\lim_{\theta\to 0}\dfrac{8-f(\theta)}{g(\theta)} = \alpha$라 할 때, 10α의 값을 구하시오.
(단, $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$이다.)

[4점][2005년 9월]



5. 곡선 $y=\ln x$ 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}(t, \ln t)$ 와 두 점 $\mathrm{A}(1, 0)$, $\mathrm{B}(e, 0)$ 에 대하여 삼각형 PAB 의 넓이를 $S(t)$ 라 할 때, $\displaystyle\lim_{t\to 1+}\frac{S(t)}{t-1}$ 의 값은? (단, e 는 자연로그의 밑)

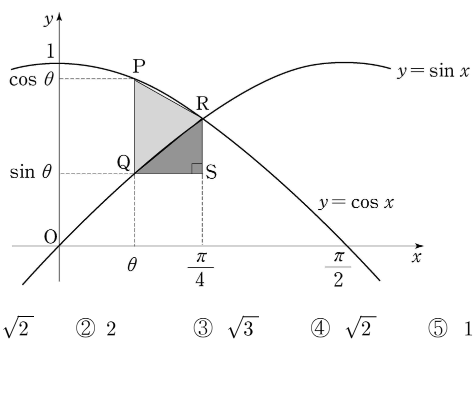
[4점][2005년 10월]



① $e-1$ ② $2(e-1)$ ③ $\frac{e-1}{2}$
④ $\frac{e-1}{2e}$ ⑤ $\frac{e(e-1)}{2}$

6. $0<\theta<\frac{\pi}{2}$, $\theta \neq \frac{\pi}{4}$ 일 때, 곡선 $y=\cos x$ 위의 점 $P(\theta, \cos\theta)$를 지나고 x축에 수직인 직선과 곡선 $y=\sin x$의 교점을 Q라 하자. 점 Q를 지나고 x축에 평행한 직선과 점 $\mathrm{R}\left(\frac{\pi}{4}, \sin\frac{\pi}{4}\right)$를 지나고 x축에 수직인 직선의 교점을 S라 하자. 삼각형 PQR의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 QSR의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때, $\displaystyle\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}}\frac{f(\theta)}{g(\theta)}$ 의 값은?

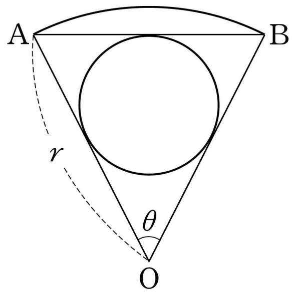
[4점][2006년 6월]



① $2\sqrt{2}$ ② 2 ③ $\sqrt{3}$ ④ $\sqrt{2}$ ⑤ 1

7. 그림과 같이 중심각의 크기가 θ이고 반지름의 길이가 r인 부채꼴 OAB가 있다. 부채꼴의 호 AB의 길이를 l_1, 삼각형 OAB에 내접하는 원의 둘레의 길이를 l_2라 할 때, $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{l_2}{l_1}$의 값은?

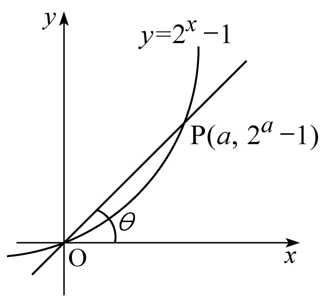
[4점][2006년 9월]



① $\frac{\pi}{4}$ ② $\frac{\pi}{2}$ ③ π ④ $\frac{3}{2}\pi$ ⑤ 2π

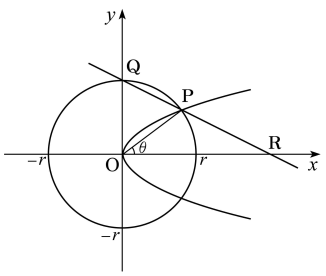
8. 곡선 $y=2^x-1$ 위의 점 $\mathrm{P}(a, 2^a-1)$과 원점 O에 대하여 직선 OP와 x축의 양의 방향이 이루는 각의 크기를 θ라고 하자. 이 때, $\displaystyle\lim_{a\to 0}\tan\theta$의 값은?

[3점][2006년 10월]



① $\ln 2$ ② $\ln 2+1$ ③ $2\ln 2$
④ $2\ln 2+1$ ⑤ $\ln 2+2$

9. 좌표평면에서 원 $x^2+y^2=r^2\ (r>0)$ 과 포물선 $y^2=x$ 의 교점 중 제1사분면 위에 있는 점을 P 라 하고, 두 점 P, $\mathrm{Q}(0,\,r)$ 를 지나는 직선이 x 축과 만나는 점을 R 라 하자. 다음은 r 의 값이 0 에 한없이 가까워질 때, 점 R 가 한없이 가까워지는 점의 좌표를 구하는 과정이다.



선분 OP 와 x 축이 이루는 각의 크기를 θ 라 하면 점 P 는 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점이므로 $\mathrm{P}(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ 로 놓을 수 있다. 이때, 점 P는 포물선 $y^2=x$ 위의 점이므로

$r=$ $\boxed{\text{(가)}}$ 이다. … ㉠

두 점 $\mathrm{P}(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$, $\mathrm{Q}(0,\,r)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$y=\dfrac{\sin\theta-1}{\cos\theta}x+r$

이므로 점 R 의 좌표를 $\mathrm{R}(a,\,0)$ 으로 놓으면

$a=\dfrac{r\cos\theta}{1-\sin\theta}$ 이다. … ㉡

$r\to 0$ 일 때, $\theta\to\dfrac{\pi}{2}$ 이므로 ㉠, ㉡에서

$\lim\limits_{r\to 0}a=\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{r\cos\theta}{1-\sin\theta}=$ $\boxed{\text{(나)}}$ 이다.

따라서 r 의 값이 0 에 한없이 가까워질 때,

점 R는 점 ($\boxed{\text{(나)}}$, 0)에 한없이 가까워진다.

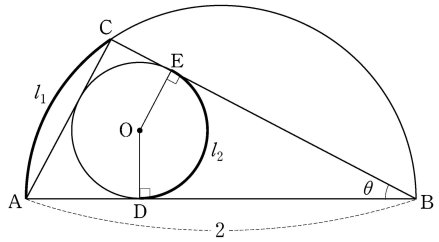
위 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

[4점][2007년 10월]

	(가)	(나)
①	$\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$	1
②	$\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$	2
③	$\dfrac{\cos\theta}{\sin^2\theta}$	1
④	$\dfrac{\cos\theta}{\sin^2\theta}$	2
⑤	$\dfrac{\cos\theta}{\sin^2\theta}$	4

10. 그림과 같이 지름의 길이가 2이고, 두 점 A, B를 지름의 양 끝점으로 하는 반원 위에 점 C가 있다. 삼각형 ABC의 내접원의 중심을 O, 중심 O에서 선분 AB와 선분 BC에 내린 수선의 발을 각각 D, E라 하자. $\angle\mathrm{ABC}=\theta$ 이고, 호 AC의 길이를 l_1, 호 DE의 길이를 l_2라 할 때, $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{l_1}{l_2}$의 값은? (단, $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$이다.)

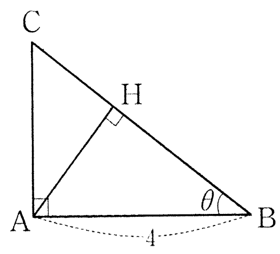
[3점][2007년 6월]



① 1　② $\dfrac{\pi}{4}$　③ $\dfrac{\pi}{3}$　④ $\dfrac{2}{\pi}$　⑤ $\dfrac{3}{\pi}$

11. 그림과 같은 직각삼각형 ABC 에서 $\angle\mathrm{A}=90^\circ$, $\overline{\mathrm{AB}}=4$ 이다. 꼭지점 A 로부터 빗변 BC 에 내린 수선의 발을 H, $\angle\mathrm{B}=\theta$ 라 할 때, $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\overline{\mathrm{CH}}}{\theta\cdot\ln(1+2\theta)}$ 의 값은?

[3점][2007년 10월]

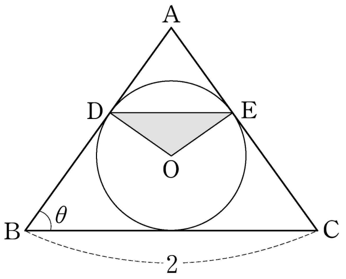


① 0　② 1　③ $\dfrac{\pi}{2}$　④ 2　⑤ π

12. 그림과 같이 양수 θ에 대하여 $\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{ACB}=\theta$이고 $\overline{\mathrm{BC}}=2$인 이등변삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 내접원의 중심을 O, 선분 AB와 내접원이 만나는 점을 D, 선분 AC와 내접원이 만나는 점을 E라 하자.

삼각형 OED의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\displaystyle\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}$의 값은?

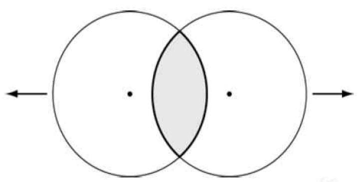
[3점][2008학년도 수능]



① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

13. 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 두 원이 서로 다른 두 점에서 만나고 있다. 이 두 원 내부의 공통부분의 길이를 l, 두 원의 교점을 잇는 선분의 길이를 m이라 하자. 두 원의 중심사이의 거리가 2에 한없이 가까워질 때, $\frac{l}{m}$의 극한값은?

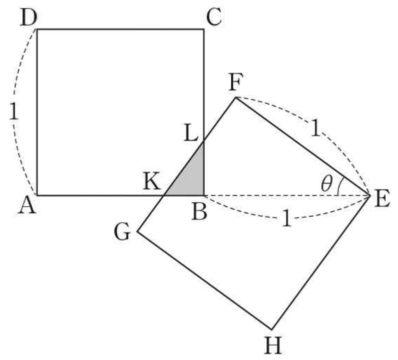
[4점][2008년 5월]



① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

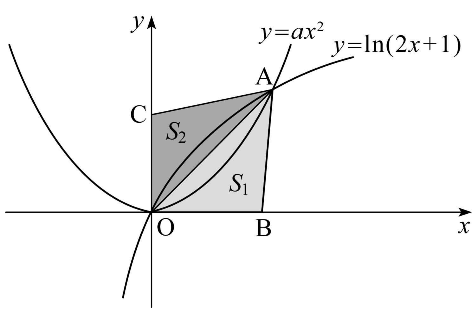
14. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD에서 변 AB를 연장한 직선 위에 $\overline{\mathrm{BE}}=1$인 점 E가 있다. 점 E를 꼭짓점으로 하고 한 변의 길이가 1인 정사각형 EFGH에 대하여 $\angle\mathrm{BEF}=\theta$일 때, 변 FG와 변 AB의 교점을 K, 변 FG와 변 BC의 교점을 L이라 하자. 삼각형 KBL의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\frac{q}{p}$이다. p^2+q^2의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$이고, p, q는 서로소인 자연수이다.)

[4점][2008년 6월]



15. 그림과 같이 두 곡선 $y=ax^2$ $(a>0)$, $y=\ln(2x+1)$이 제1사분면에서 만나는 점을 A라 하자. 원점 O와 두 점 B$(1,\ 0)$, C$(0,\ 1)$에 대하여 삼각형 OAB의 넓이를 S_1, 삼각형 OAC의 넓이를 S_2라 하자. a의 값이 한없이 커질 때, $\frac{S_1}{S_2}$의 값은 α에 한없이 가까워진다. α의 값은?

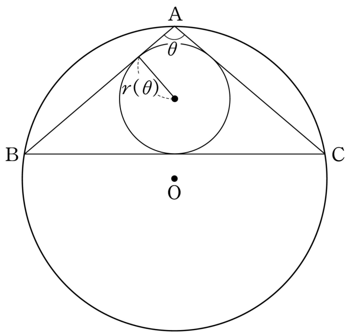
[3점][2008년 10월]



① $\frac{1}{e}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ e

16. 반지름의 길이가 1인 원 O 위에 점 A가 있다. 그림과 같이 양수 θ에 대하여 원 O 위의 두 점 B, C를 $\angle BAC = \theta$이고 $\overline{AB} = \overline{AC}$가 되도록 잡는다. 삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$라 할때, $\lim_{\theta \to \pi-} \frac{r(\theta)}{(\pi - \theta)^2} = \frac{q}{p}$이다. $p^2 + q^2$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

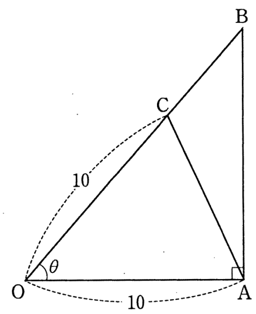
[4점][2009학년도 수능]



17. 그림과 같이 양수 θ에 대하여

$\angle AOB = \theta$, $\angle OAB = \frac{\pi}{2}$, $\overline{OA} = 10$인 직각삼각형 OAB가 있다. 변 OB 위에 있는 $\overline{OC} = 10$인 점 C에 대하여 삼각형 ABC의 둘레의 길이를 $f(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{f(\theta)}{\theta}$의 값을 구하시오.

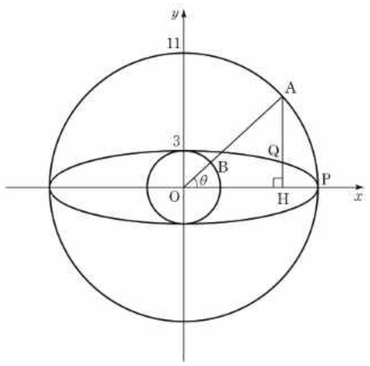
[4점][2009년 6월]



18. 좌표평면 위에 타원 $\frac{x^2}{11^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$과 점 P(11, 0)이 있고, 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 11인 원 C_1과 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 원 C_2가 있다. 제 1사분면에 있는 원 C_1 위의 점 A에 대하여 선분 OA와 원 C_2의 교점을 B, 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H, 선분 AH와 타원의 교점을 Q, 선분 OA가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라 하자. 삼각형 ABQ의 넓이를 S_1이라 하고, 삼각형 APQ의 넓이를 S_2라 하자.

$\lim_{\theta \to 0} \frac{S_2}{\theta^2 \cdot S_1} = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

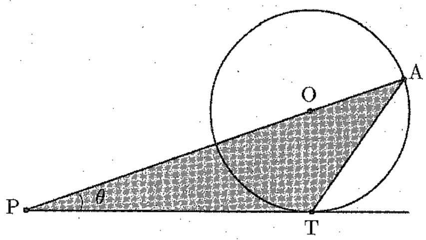
[4점][2009년 9월]



19. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심이 점 O인 원이 있다. 원 밖의 한 점 P에서 원에 그은 한 접선의 접점을 T라 하자. 선분 PO의 연장선이 원과 만나는 점을 A라 하고, $\angle APT = \theta$라 하자. $\triangle APT$의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때,

$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}-} \frac{S(\theta)}{\theta - \frac{\pi}{2}}$의 값은?

[4점][2009년 10월]

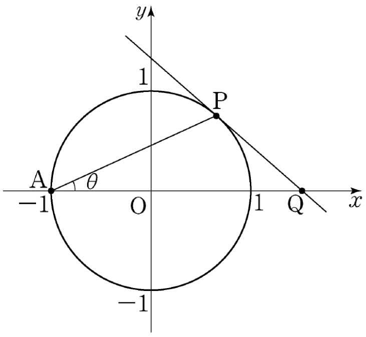


① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

20. 그림과 같이 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 P 에서의 접선이 x 축과 만나는 점을 Q 라 하자. 점 A$(-1, 0)$과 원점 O에 대하여 $\angle \mathrm{PAO}=\theta$라 할 때, $\displaystyle\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{\overline{\mathrm{PQ}}-\overline{\mathrm{OQ}}}{\theta-\frac{\pi}{4}}$ 의 값은?

(단, 점 P는 제 1사분면 위의 점이다.)

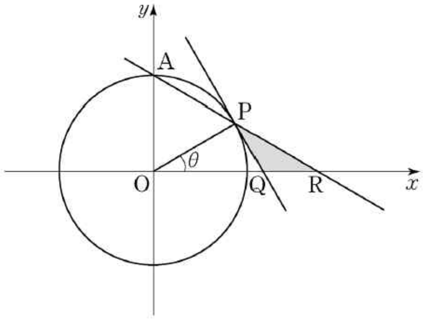
[3점][2010학년도 수능]



① 2 ② $\sqrt{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ 1 ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

21. 좌표평면에서 중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 1인 원 위의 점 P에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q, 점 $A(0,1)$과 점 P를 지나는 직선이 x축과 만나는 점을 R라 하자.
$\angle QOP=\theta$라 하고 삼각형 PQR의 넓이를 $S(\theta)$라고 하자.
$\displaystyle\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta^2}=\alpha$일 때, 100α의 값을 구하시오.
(단, 점 P는 제1사분면 위의 점이다.)

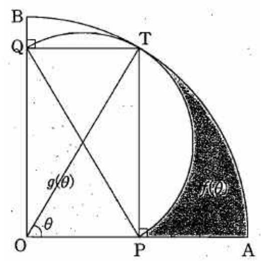
[4점][2010년 6월]



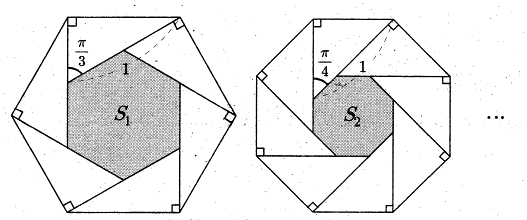
22. 그림과 같이 반지름의 길이가 2이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 T에서 선분 OA와 선분 OB에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라 하고 $\angle T=\theta$라 하자. 점 P와 점 Q를 지름의 양끝으로 하고 점 T를 지나는 반원을 C라 할 때, 반원 C의 호 TP, 선분 PA, 부채꼴 OAT의 호 AT로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 OPQ의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\displaystyle\lim_{\theta\to 0+}\frac{\theta+f(\theta)}{g(\theta)}=a$일 때, $100a$의 값을 구하시오.

(단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$)

[4점][2010년 9월]



23. [그림 1]과 같이 빗변의 길이가 1이고, 한 내각이 $\frac{\pi}{3}$인 6개의 합동인 직각삼각형들로 둘러싸인 어두운 부분의 넓이를 S_1이라 하자. [그림 2]와 같이 빗변의 길이가 1이고, 한 내각이 $\frac{\pi}{4}$인 8개의 합동인 직각삼각형들로 둘러싸인 어두운 부분의 넓이를 S_2라 하자.



[그림 1] [그림 2]

이와 같이 빗변의 길이가 1이고, 한 내각이 $\frac{\pi}{n}$인 $2n$개의 합동인 직각삼각형들로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_n이라 할 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^2S_n$의 값은?

[4점][2010년 11월]

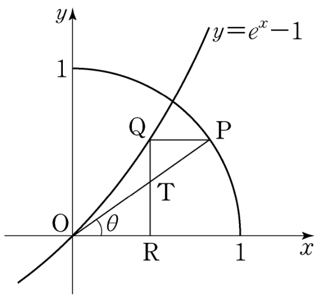
① $\frac{1}{10}\pi^3$ ② $\frac{1}{8}\pi^3$ ③ $\frac{1}{6}\pi^3$ ④ $\frac{1}{4}\pi^3$ ⑤ $\frac{1}{2}\pi^3$

24. 좌표평면에서 그림과 같이 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 P에 대하여 선분 OP가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 $\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{4}\right)$라 하자.

점 P를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=e^x-1$과 만나는 점을 Q라 하고, 점 Q에서 x축에 내린 수선의 발을 R라 하자. 선분 OP와 선분 QR의 교점을 T라 할 때, 삼각형 OTR의 넓이를 $S(\theta)$라 하자

$\displaystyle\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=a$일 때, $60a$의 값을 구하시오.

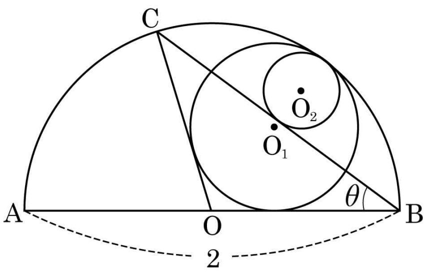
[4점][2011학년도 수능]



25. 그림과 같이 길이가 2 인 선분 AB 를 지름으로 하는 반원이 있다. 선분 AB 의 중점 O 와 반원 위를 움직이는 점 C 에 대하여 부채꼴 OBC 에 내접하는 원을 O_1, 현 BC 와 호 BC 로 둘러싸인 부분에 내접하는 원 중 반지름의 길이가 가장 큰 원을 O_2 라 하자. $\angle ABC=\theta$ 라 하고 두 원 O_1, O_2 의 반지름의 길이를 각각 $f(\theta)$, $g(\theta)$ 라 할 때, $\displaystyle\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-}\frac{g(\theta)}{\{f(\theta)\}^2}=\frac{q}{p}$ 이다.

p^2+q^2 의 값을 구하시오. (단, p, q 는 서로소인 자연수이다.)

[4점][2011년 3월]

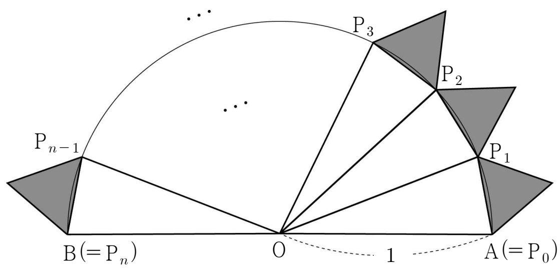


26. 그림과 같이 중심각의 크기가 π이고 반지름의 길이가 1인 부채꼴 OAB 에서 호 AB 를 n등분한 각 점(양 끝점도 포함)을 차례로

$$\mathrm{A}=\mathrm{P}_0,\ \mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2,\ \mathrm{P}_3,\ \ \cdots,\ \mathrm{P}_{n-1},\ \mathrm{P}_n=\mathrm{B}$$

라 하자. $\overline{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1}$, $\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}$, $\overline{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3}$, $\cdots$, $\overline{\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n}$을 각각 밑변으로 하는 정삼각형 n개의 넓이의 합을 $S(n)$이라 할 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n\cdot S(n)$의 값은?

[3점][2011년 4월]



① $\dfrac{\sqrt{2}}{8}\pi^2$　② $\dfrac{\sqrt{6}}{8}\pi^2$　③ $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\pi^2$

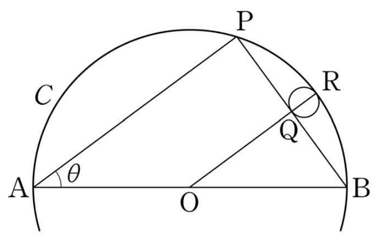
④ $\dfrac{\sqrt{5}}{4}\pi^2$　⑤ $\dfrac{\sqrt{7}}{4}\pi^2$

27. 중심이 O이고, 두 점 A, B를 지름의 양 끝으로 하며 반지름의 길이가 1인 원 C가 있다. 그림과 같이 원 C 위의 점 P에 대하여 점 O를 지나고 직선 AP와 평행한 직선이 선분 PB와 만나는 점을 Q, 호 PB와 만나는 점을 R라 하자.

$\angle\mathrm{PAB}=\theta\ \left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$라 하고, 점 Q와 점 R를 지름의 양 끝으로 하는 원의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\displaystyle\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^4}=\frac{q}{p}\pi$이다.

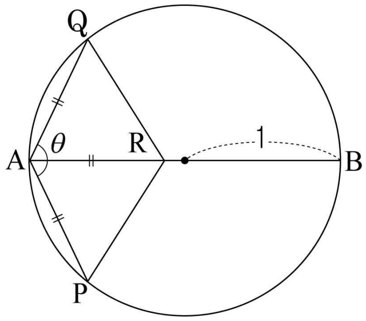
$p+q$의 값을 구하시오. (단, $\overline{\mathrm{QR}}<1$이고, p와 q는 서로소인 정수이다.)

[4점][2011년 6월]



28. 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원 위에 한 점 A가 있다. $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{AQ}}=\overline{\mathrm{AR}}$이 되는 원 위의 두 점을 P, Q, 지름 AB 위의 점을 R라 하자. $\angle\mathrm{PAQ}=\theta$에 대하여 사각형 APRQ의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{S(\theta)}{\tan\theta}$의 값은?

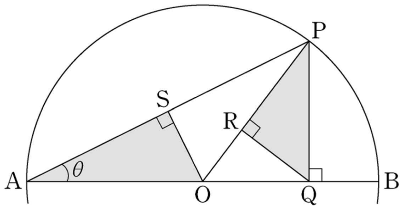
[4점][2011년 7월]



① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

29. 그림과 같이 중심이 O이고 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점 P에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 Q, 점 Q에서 선분 OP에 내린 수선의 발을 R, 점 O에서 선분 AP에 내린 수선의 발을 S라 하자.

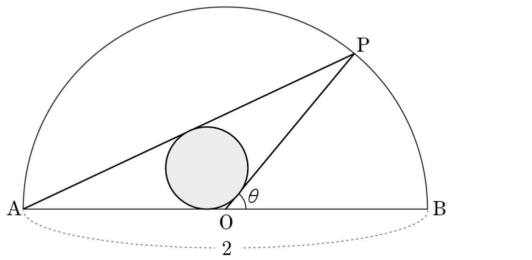
$\angle\mathrm{PAQ}=\theta\ \left(0<\theta<\dfrac{\pi}{4}\right)$일 때, 삼각형 AOS의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 PRQ의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{\theta^2 f(\theta)}{g(\theta)}=\dfrac{q}{p}$ 일 때, p^2+q^2의 값을 구하시오.(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



[4점][2012학년도 수능]

30. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하고 중심이 O인 반원이 있다. 호 AB 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\angle\mathrm{POB}=\theta$일 때, 삼각형 PAO에 내접하는 원의 넓이를 $f(\theta)$라 하자. $\lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{f(\theta)}{\theta^2}$의 값은? (단, $0<\theta<\pi$이다.)

[4점][2012년 3월]



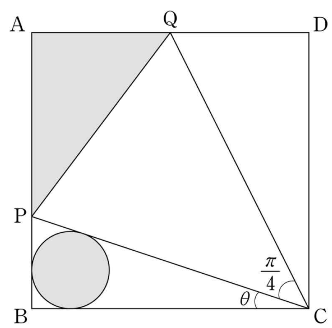
① $\dfrac{\pi}{2}$　② $\dfrac{\pi}{4}$　③ $\dfrac{\pi}{8}$　④ $\dfrac{\pi}{16}$　⑤ $\dfrac{\pi}{32}$

31. 한 변의 길이가 1인 정사각형 $ABCD$의 변 AB위의 점 P에 대하여 $\angle BCP=\theta$라 하고, 변 AD위의 점 Q를 $\angle PCQ=\dfrac{\pi}{4}$가 되도록 잡는다. 삼각형 APQ의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 BCP의 내접원의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때,

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{g(\theta)}{\theta\times f(\theta)}=\frac{q}{p}\pi$$

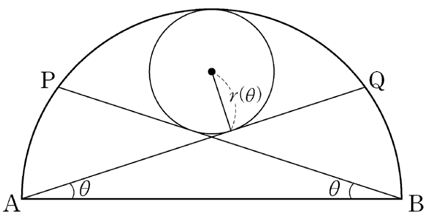
이다. $10p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[4점][2012년 5월]



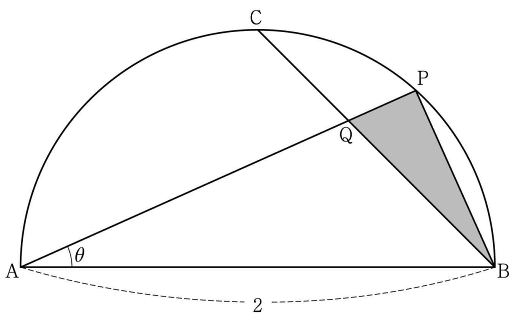
32. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위에 두 점 P, Q를 $\angle ABP=\angle BAQ=\theta$ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$가 되도록 잡는다. 두 선분 AQ, BP와 호 PQ에 내접하는 원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{r(\theta)}{\frac{\pi}{4}-\theta}=p\sqrt{2}+q$이다. p^2+q^2의 값을 구하시오. (단, p와 q는 유리수이다.)

[4점][2012년 6월]



33. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위의 점 C를 $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$가 되도록 잡는다. 호 BC 위를 움직이는 점 P에 대하여 선분 AP와 선분 BC가 만나는 점을 Q라 하고, $\angle PAB=\theta$라 하자. 삼각형 BPQ의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta^2}$의 값은? $\left(단,\ 0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$

[4점][2012년 10월]

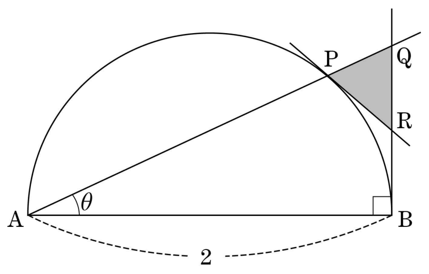


① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② 1 ③ $\sqrt{2}$ ④ 2 ⑤ $2\sqrt{2}$

34. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위에 점 P가 있다. 점 B를 지나고 선분 AB에 수직인 직선이 직선 AP와 만나는 점을 Q라 하고, 점 P에서 이 반원에 접하는 직선과 선분 BQ가 만나는 점을 R라 하자. $\angle PAB=\theta$라 하고 삼각형 PRQ의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}$의 값은?

(단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$이다.)

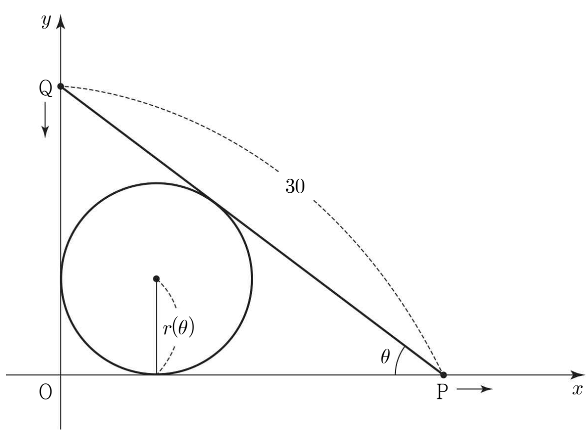
[4점][2013년 3월]



① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ 2

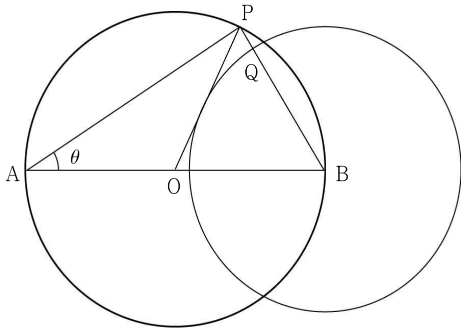
35. 그림과 같이 좌표평면에서 점 P가 원점 O를 출발하여 x축을 따라 양의 방향으로 이동할 때, 점 Q는 점 $(0, 30)$을 출발하여 $\overline{PQ}=30$을 만족시키며 y축을 따라 음의 방향으로 이동한다. $\angle OPQ=\theta$ $(0<\theta<\frac{\pi}{2})$일 때, 삼각형 OPQ의 내접원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$라 하자. 이때, $\lim_{\theta\to 0+}\frac{r(\theta)}{\theta}$의 값을 구하시오.

[3점][2013년 4월]



36. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하고 중심이 점 O인 원 C_1이 있다. 원 C_1 위의 점 P에 대하여 $\angle \mathrm{PAB}=\theta$라 하고, 선분 OP에 접하고 중심이 점 B인 원 C_2를 그린다. 원 C_2와 선분 BP의 교점을 점 Q라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\theta^3}$의 값은? $\left(\text{단, } 0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$

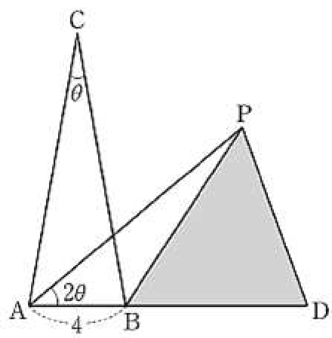
[4점][2013년 7월]



① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

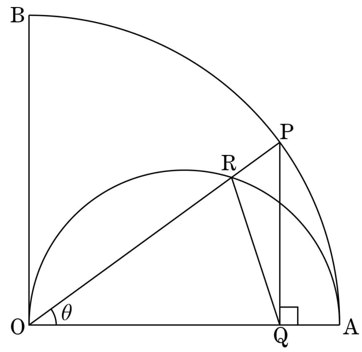
37. 그림과 같이 길이가 4인 선분 AB를 한 변으로 하고, $\overline{AC}=\overline{BC}$, $\angle ACB=\theta$인 이등변삼각형 ABC가 있다. 선분 AB의 연장선 위에 $\overline{AC}=\overline{AD}$인 점 D를 잡고, $\overline{AC}=\overline{AP}$ 이고 $\angle PAB=2\theta$ 인 점 P를 잡는다. 삼각형 BDP의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+}(\theta \times S(\theta))$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{6}$)

[4점][2014학년도 수능]



38. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB와 선분 OA를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위의 점 P에 대하여 점 P에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 Q, 선분 OP와 반원의 교점 중 O가 아닌 점을 R라 하고, $\angle \mathrm{POA}=\theta$라 하자. 삼각형 PRQ의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^3}$의 값은?

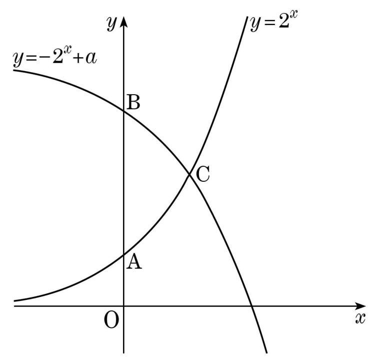
[4점][2014년 3월]



① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

39. 2보다 큰 실수 a에 대하여 두 곡선 $y=2^x$, $y=-2^x+a$가 y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 두 곡선의 교점을 C라 하자. 직선 AC의 기울기를 $f(a)$, 직선 BC의 기울기를 $g(a)$라 할 때, $\lim_{a \to 2+}\{f(a)-g(a)\}$의 값은?

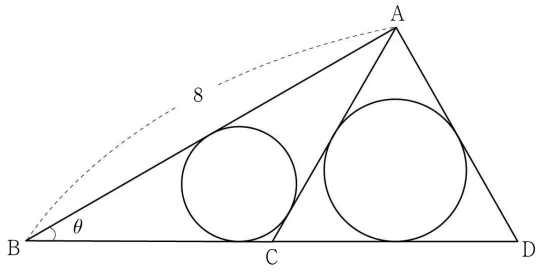
[4점][2014년 3월]



① $\frac{1}{\ln 2}$ ② $\frac{2}{\ln 2}$ ③ $\ln 2$ ④ $2\ln 2$ ⑤ 2

40. $\overline{\mathrm{AB}}=8$, $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BC}}$, $\angle\mathrm{ABC}=\theta$인 이등변삼각형 ABC가 있다. 그림과 같이 선분 BC의 연장선 위에 $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{AD}}$인 점 D를 잡는다. 삼각형 ABC에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r_1, 삼각형 ACD에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r_2라 할 때, $\lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{r_1 r_2}{\theta^2}$의 값은?

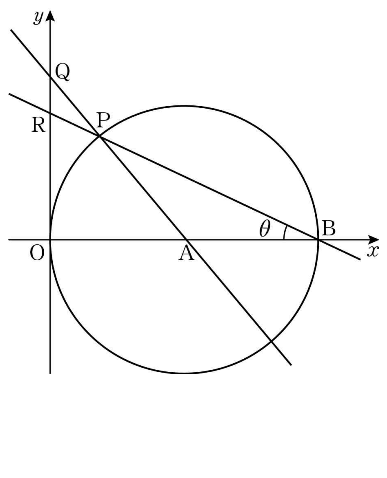
[4점][2014년 7월]



① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

41. 그림과 같이 중심이 A(3, 0)이고 점 B(6, 0)을 지나는 원이 있다. 이 원 위의 점 P를 지나는 두 직선 AP, BP가 y축과 만나는 점을 각각 Q, R라 하자. $\angle\mathrm{PBA}=\theta$라 하고, 삼각형 PQR의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{S(\theta)}{\theta^5}$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$)

[4점][2015년 3월]

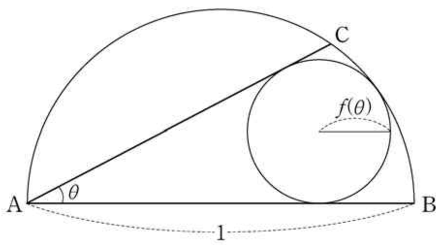


42. 그림과 같이 길이가 1인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위에 점 C를 잡고 $\angle\mathrm{BAC}=\theta$라 하자. 호 BC와 두 선분 AB, AC에 동시에 접하는 원의 반지름의 길이를 $f(\theta)$라 할 때,

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{\tan\frac{\theta}{2}-f(\theta)}{\theta^2}=\alpha$$

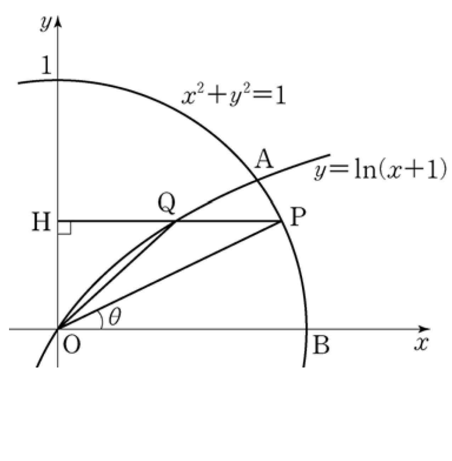
이다. 100α의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$)

[4점][2015년 6월]



43. 그림과 같이 좌표평면에서 원 $x^2+y^2=1$과 곡선 $y=\ln(x+1)$이 제1사분면에서 만나는 점을 A라 하자. 점 B(1, 0)에 대하여 호 AB 위의 점 P에서 y축에 내린 수선의 발을 H, 선분 PH와 곡선 $y=\ln(x+1)$이 만나는 점을 Q라 하자. $\angle\mathrm{POB}=\theta$라 할 때, 삼각형 OPQ의 넓이를 $S(\theta)$, 선분 HQ의 길이를 $L(\theta)$라 하자. $\lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{S(\theta)}{L(\theta)}=k$일 때, $60k$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\dfrac{\pi}{6}$이고, O는 원점이다.)

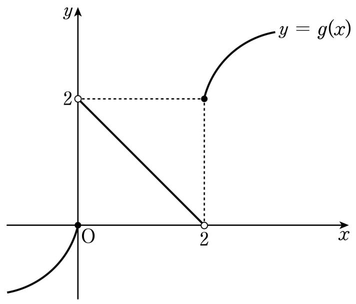
[4점][2016학년도 수능]



44. 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} e^x & (x \le 0,\ x \ge 2) \\ \ln(x+1) & (0<x<2) \end{cases}$$

이고, 함수 $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같다.

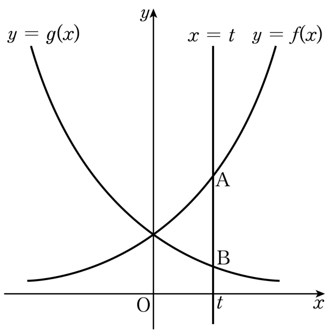


$\lim\limits_{x\to 2+} f(g(x))+\lim\limits_{x\to 0+} g(f(x))$의 값은?

[3점][2016년 3월]

① e ② $e+1$ ③ $e+2$
④ e^2+1 ⑤ e^2+2

45. 좌표평면에 두 함수 $f(x)=2^x$의 그래프와 $g(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$의 그래프가 있다. 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 직선 $x=t\,(t>0)$과 만나는 점을 각각 A, B라 하자.



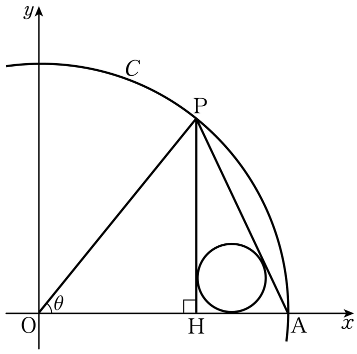
점 A에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{AH}}}$의 값은?

[4점][2016년 3월]

① $2\ln 2$ ② $\dfrac{7}{4}\ln 2$ ③ $\dfrac{3}{2}\ln 2$ ④ $\dfrac{5}{4}\ln 2$ ⑤ $\ln 2$

46. 그림과 같이 중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 1인 원 C가 있다. 원 C가 x축의 양의 방향과 만나는 점을 A, 원 C 위에 있고 제1사분면에 있는 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H, $\angle\mathrm{POA}=\theta$라 하자. 삼각형 APH에 내접하는 원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$라 할 때, $\lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{r(\theta)}{\theta^2}$의 값은?

[4점][2016년 3월]

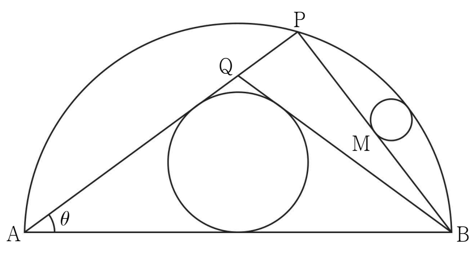


① $\dfrac{1}{10}$ ② $\dfrac{1}{8}$ ③ $\dfrac{1}{6}$ ④ $\dfrac{1}{4}$ ⑤ $\dfrac{1}{2}$

47. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위의 한 점 P에 대하여 $\angle\mathrm{PAB}=\theta$라 하자. 선분 PB의 중점 M에서 선분 PB에 접하고 호 PB에 접하는 원의 넓이를 $S(\theta)$, 선분 AP 위에 $\overline{\mathrm{AQ}}=\overline{\mathrm{BQ}}$가 되도록 점 Q를 잡고 삼각형 ABQ에 내접하는 원의 넓이를 $T(\theta)$라 하자.

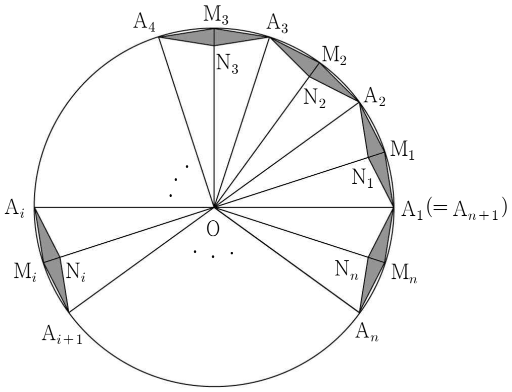
$\lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{\theta^2\times T(\theta)}{S(\theta)}$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$)

[4점][2016년 4월]



48. 그림과 같이 중심이 O 이고 반지름의 길이가 1인 원의 둘레를 $n\,(n \geq 4)$ 등분한 점을 A_1, A_2, $\cdots$, A_n 이라 하자.
호 $\mathrm{A}_i\mathrm{A}_{i+1}\,(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$을 이등분한 점을 M_i라 하고 사각형 $\mathrm{A}_i\mathrm{M}_i\mathrm{A}_{i+1}\mathrm{N}_i$가 마름모가 되도록 하는 선분 OM_i 위의 점을 N_i라 하자. n개의 사각형 $\mathrm{A}_1\mathrm{M}_1\mathrm{A}_2\mathrm{N}_1$, $\mathrm{A}_2\mathrm{M}_2\mathrm{A}_3\mathrm{N}_2$, $\mathrm{A}_3\mathrm{M}_3\mathrm{A}_4\mathrm{N}_3$, $\cdots$, $\mathrm{A}_n\mathrm{M}_n\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{N}_n$ 의 넓이의 합을 S_n 이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2 \times S_n\right)$ 의 값은? (단, $\mathrm{A}_{n+1}=\mathrm{A}_1$)

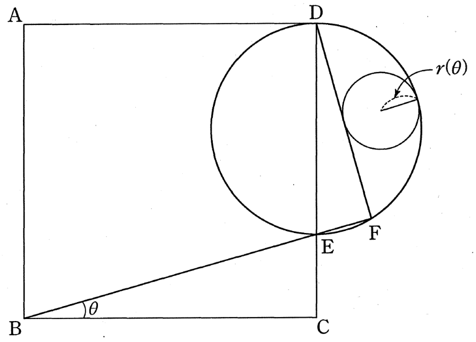
[4점][2016년 7월]



① π^3 ② $2\pi^3$ ③ $3\pi^3$ ④ $4\pi^3$ ⑤ $5\pi^3$

49. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD 가 있다. 변 CD 위의 점 E에 대하여 선분 DE를 지름으로 하는 원과 직선 BE가 만나는 점 중 E가 아닌 점을 F라 하자.
$\angle\mathrm{EBC}=\theta$라 할 때, 점 E를 포함하지 않는 호 DF를 이등분하는 점과 선분 DF의 중점을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$라 하자.
$\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\dfrac{r(\theta)}{\frac{\pi}{4}-\theta}$ 의 값은? (단, $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$)

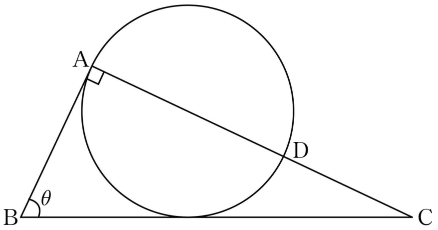
[4점][2016년 9월]



① $\frac{1}{7}(2-\sqrt{2})$ ② $\frac{1}{6}(2-\sqrt{2})$ ③ $\frac{1}{5}(2-\sqrt{2})$
④ $\frac{1}{4}(2-\sqrt{2})$ ⑤ $\frac{1}{3}(2-\sqrt{2})$

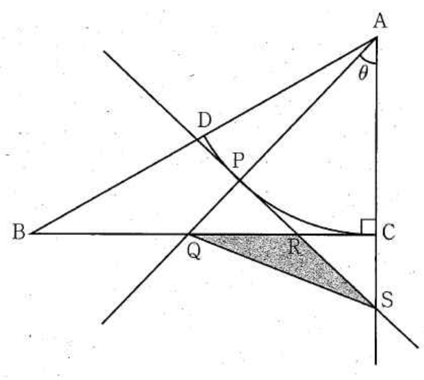
50. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{BC}}=1$, $\angle\mathrm{A}=\frac{\pi}{2}$, $\angle\mathrm{B}=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위의 점 D에 대하여 선분 AD를 지름으로 하는 원이 선분 BC와 접할 때, $\lim_{\theta\to 0+}\frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\theta^3}=k$라 하자. $100k$의 값을 구하시오.

[4점][2016년 10월]



51. 그림과 같이 $\angle A=\frac{\pi}{3}$, $\angle C=\frac{\pi}{2}$이고, 변 AC의 길이가 $2\sqrt{5}$인 직각삼각형 ABC가 있다. 중심이 A이고 변 AC를 반지름으로 하는 원과 변 AB가 만나는 점을 D라 하자. 호 CD 위의 점 P에 대하여 직선 AP와 변 BC가 만나는 점을 Q, 점 P에서의 접선과 변 BC가 만나는 점을 R, 점 P에서의 접선과 직선 AC가 만나는 점을 S라 하자. $\angle PAC=\theta\ (0<\theta<\frac{\pi}{3})$라 하고, 삼각형 QSR의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}$의 값은?

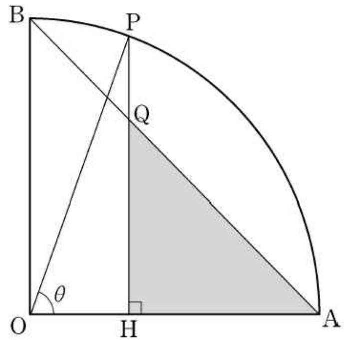
[4점][2016년 10월]



① $\frac{13}{6}$ ② $\frac{7}{3}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ $\frac{17}{6}$

52. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H, 선분 PH와 선분 AB의 교점을 Q라 하자. $\angle\mathrm{POH}=\theta$일 때, 삼각형 AQH의 넓이를 $\mathrm{S}(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta^4}$의 값은? $\left(\text{단, } 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

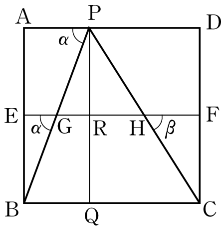
[4점][2017학년도 수능]



① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

1) ⑤

그림과 같이 점 P에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 Q라 하고, $\overline{PQ}$와 $\overline{EF}$가 만나는 점을 R라 하자.



ㄱ. (참) $\overline{EG}=\overline{GR}, \overline{RH}=\overline{HF}$이므로

$\overline{GH}=\overline{GR}+\overline{RH}=\frac{1}{2}\overline{EF}=1$ (일정)

ㄴ. (거짓) △PGH에서 $\angle GPH+\alpha+\beta=180^\circ$

$\therefore \alpha+\beta=180^\circ-\angle GPH$

이 때, 점 P의 위치에 따라 ∠GPH의 크기가 달라지고, ∠GPH의 크기가 달라지면 $\alpha+\beta$의 값이 달라진다.

ㄷ. (참) △ABP에서 $\tan\alpha=\frac{2}{\overline{AP}}$이므로

$\overline{AP}=\frac{2}{\tan\alpha}=2\cot\alpha$

$\therefore \lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}\frac{\overline{AP}}{\frac{\pi}{2}-\alpha}=\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\cot\alpha}{\frac{\pi}{2}-\alpha}=\lim_{t\to0}\frac{2\tan t}{t}=2$

따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

2) 250

[그림 2]의 도형의 넓이는 두 변의 길이가 20인 이등변삼각형 n개의 넓이와 두 변의 길이가 10인 이등변삼각형 n개의 넓이의 합이다.

이 때, 같은 두 변 사이의 끼인 각의 크기는 $\frac{2\pi}{2n}=\frac{\pi}{n}$이므로

$S_n=n\cdot\frac{1}{2}\cdot20^2\cdot\sin\frac{\pi}{n}+n\cdot\frac{1}{2}\cdot10^2\cdot\sin\frac{\pi}{n}=250n\cdot\sin\frac{\pi}{n}$

$\therefore \frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\left(250n\sin\frac{\pi}{n}\right)=250\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}=250$

3) ③

점 P의 좌표를 $P(x, \ln(1+10x))$ 라 하면

$\tan\theta=\frac{\ln(1+10x)}{x}$

이때, $P\to O$ 이면 $x\to0$이므로

$\lim_{P\to O}\tan\theta=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+10x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+10x)}{10x}\times10=10$

4) 20

$\overline{AC}=4\sqrt{2}$이고, △APB는 직각삼각형이므로 $\overline{AP}=4\cos\theta$이다.

$\therefore f(\theta)=\frac{1}{2}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AP}\sin(\angle CAP)$

$=8\sqrt{2}\cos\theta\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$

$=8\sqrt{2}\cos\theta\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos\theta-\cos\frac{\pi}{4}\sin\theta\right)$

$=8\sqrt{2}\cos\theta\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta\right)=8\cos^2\theta-8\cos\theta\sin\theta$

$\therefore 8-f(\theta)=8\sin^2\theta+8\sin\theta\cos\theta$

한편, ∠BOP=2θ이므로 $g(\theta)=\frac{1}{2}\cdot2^2\cdot2\theta=4\theta$이다.

$\therefore \lim_{\theta\to0}\frac{8-f(\theta)}{g(\theta)}=\lim_{\theta\to0}\frac{8\sin^2\theta+8\sin\theta\cos\theta}{4\theta}$

$=2\lim_{\theta\to0}\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\lim_{\theta\to0}(\sin\theta+\cos\theta)=2\cdot1\cdot1=2$

$\therefore 10a=20$

5) ③

△PAB 의 넓이 $S=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\ln t=\frac{1}{2}(e-1)\ln t$ 이므로

$\lim_{t\to1+}\frac{S}{t-1}=\lim_{t\to1+}\frac{(e-1)\ln t}{2(t-1)}=\frac{e-1}{2}\lim_{t\to1+}\frac{\ln t}{t-1}$

$=\frac{e-1}{2}\times1$ ($\because \lim_{t\to1}\frac{\ln t}{t-1}=1$)

$\therefore \lim_{t\to1+}\frac{S}{t-1}=\frac{e-1}{2}$

6) ②

$0<\theta<\frac{\pi}{4}$ 일 때,

$f(\theta)=\frac{1}{2}(\cos\theta-\sin\theta)\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$

$g(\theta)=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\sin\theta\right)$이므로

$\frac{f(\theta)}{g(\theta)}=\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\frac{\sqrt{2}}{2}-\sin\theta}$

$\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}$ 일 때,

$f(\theta)=\frac{1}{2}(\sin\theta-\cos\theta)\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$

$g(\theta)=\frac{1}{2}\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\left(\sin\theta-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$이므로

$\frac{f(\theta)}{g(\theta)}=\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\frac{\sqrt{2}}{2}-\sin\theta}$

$\therefore \lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}}\frac{f(\theta)}{g(\theta)}=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\frac{\sqrt{2}}{2}-\sin\theta}$

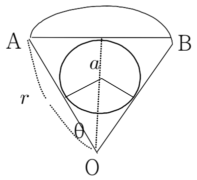
$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\cos\theta-\sin\theta)(\cos\theta+\sin\theta)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\sin\theta\right)}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\sin\theta\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\sin\theta\right)(\cos\theta+\sin\theta)}$

$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\sin\theta\right)}{\left(\frac{1}{2}-\sin^2\theta\right)(\cos\theta+\sin\theta)}$

$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}}\frac{(1-2\sin^2\theta)(\sqrt{2}+2\sin\theta)}{(1-2\sin^2\theta)(\cos\theta+\sin\theta)}=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}}\frac{(1-2\sin^2\theta)(\sqrt{2}+2\sin\theta)}{(1-2\sin^2\theta)(\cos\theta+\sin\theta)}$

$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}+2\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=2$

7) ③



그림에서 삼각형 OAB 넓이는 $\triangle OAB=\frac{1}{2}r^2\sin\theta$

한편 삼각형 OAB의 내접원의 반지름의 길이를 a라 하면

$\triangle OAB=\frac{1}{2}ra+\frac{1}{2}ra+\frac{1}{2}a\times\overline{AB}$

이 때 $\overline{AB}=2r\sin\frac{\theta}{2}$ 이므로

$\frac{1}{2}r^2\sin\theta=ar+ar\sin\frac{\theta}{2}$

$\therefore\ a=\dfrac{\frac{1}{2}r\sin\theta}{1+\sin\frac{\theta}{2}}$

따라서 $l_1=r\theta,\ l_2=\dfrac{\pi r\sin\theta}{1+\sin\frac{\theta}{2}}$ 이므로

$$\lim_{\theta\to0}\frac{l_2}{l_1}=\lim_{\theta\to0}\frac{1}{r\theta}\times\frac{\pi r\sin\theta}{1+\sin\frac{\theta}{2}}=\lim_{\theta\to0}\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{\pi}{1+\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$=1\times\pi=\pi$$

8) ①

$\lim\limits_{a\to0}\tan\theta$는 곡선 $f(x)=2^x-1$ 위의 원점에서 그은 접선의 기울기이다.

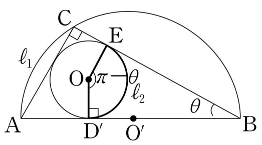
$f'(x)=2^x\ln2$ 이므로 $a=f'(0)=2^0\ln2=\ln2$

9) ④

(가) : $r=\dfrac{\cos\theta}{\sin^2\theta}$

(나) : $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{r\cos\theta}{1-\sin\theta}=\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos^2\theta}{(1-\sin\theta)\sin^2\theta}=2$

10) ④



$\overline{AB}$의 중점을 O′이라 하면 $\angle AO'C=2\theta$ 이므로

$l_1=1\times2\theta=2\theta$

직각삼각형 ABC에서 $\overline{AC}=2\sin\theta,\ \overline{BC}=2\cos\theta$

$\triangle$ABC의 넓이를 S, 원 O의 반지름을 r라 하면

$S=\frac{1}{2}(2+2\sin\theta+2\cos\theta)r=\frac{1}{2}\times2\sin\theta\times2\cos\theta$

$\therefore\ r=\dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}$

$\angle DOE=\pi-\theta$ 이므로

$l_2=\dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}(\pi-\theta)$

$$\therefore\ \lim_{\theta\to0}\frac{l_1}{l_2}=\lim_{\theta\to0}\frac{2\theta(1+\sin\theta+\cos\theta)}{2\sin\theta\cos\theta(\pi-\theta)}=\frac{2}{\pi}$$

11) ④

$\angle B=\theta,\ \overline{AB}=4$ 이므로 $\overline{AC}=4\tan\theta$이다.

$\angle CAH=\theta$이므로 $\overline{CH}=\overline{AC}\sin\theta=4\tan\theta\sin\theta$이다.

$$\lim_{\theta\to0}\frac{\overline{CH}}{\theta\cdot\ln(1+2\theta)}=\lim_{\theta\to0}\frac{4\tan\theta\sin\theta}{\theta\cdot\ln(1+2\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to0}\frac{4\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{\tan\theta}{\theta}\cdot\frac{2\theta}{\ln(1+2\theta)}\cdot\frac{1}{2}$$

$\lim\limits_{\theta\to0}\dfrac{\sin\theta}{\theta}=1,\ \lim\limits_{\theta\to0}\dfrac{\tan\theta}{\theta}=1,\ \lim\limits_{\theta\to0}\dfrac{2\theta}{\ln(1+2\theta)}=1$이므로

$$\lim_{\theta\to0}\frac{4\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{\tan\theta}{\theta}\cdot\frac{2\theta}{\ln(1+2\theta)}\cdot\frac{1}{2}$$

$=\lim\limits_{\theta\to0}\dfrac{4\sin\theta}{\theta}\cdot\lim\limits_{\theta\to0}\dfrac{\tan\theta}{\theta}\cdot\lim\limits_{\theta\to0}\dfrac{2\theta}{\ln(1+2\theta)}\cdot\dfrac{1}{2}=2$가 된다.

12) ②

사각형 AODE에서 $\angle DAE=\pi-2\theta$,

$\angle ADO=\angle AEO=90^\circ$ 이므로 $\angle DOE=2\theta$

한편, O에서 선분BC에 내린 수선의 발을 H라 하고,

내접원의 반지름의 길이를 r라 하면

$\tan\frac{\theta}{2}=\dfrac{\overline{OH}}{\overline{CH}}=\dfrac{r}{1}=r$

$\therefore\ S(\theta)=\triangle OED=\frac{1}{2}r^2\sin2\theta=\frac{1}{2}\tan^2\frac{\theta}{2}\sin2\theta$

$\therefore$

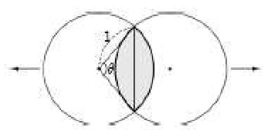
$$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{1}{2}\sin2\theta\tan^2\frac{\theta}{2}}{\theta^3}=\lim_{\theta\to0+}\frac{1}{4}\ \frac{\sin2\theta}{2\theta}\ \frac{\tan^2\frac{\theta}{2}}{(\frac{\theta}{2})^2}=\frac{1}{4}$$

13) ③

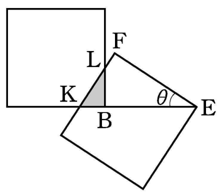
$l=2\times1\times\theta=2\theta$

$m=2\times1\times\sin\frac{\theta}{2}$

$\therefore\ \lim\limits_{\theta\to0}\dfrac{\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}=2$



14) 65



$\dfrac{\overline{EF}}{\overline{KE}}=\cos\theta$이므로 $\overline{KE}=\dfrac{1}{\cos\theta}$

$\therefore\ \overline{KB}=\dfrac{1}{\cos\theta}-1$

또, $\angle BKL=\frac{\pi}{2}-\theta$에서

$\dfrac{\overline{BL}}{\overline{KB}}=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta$

$\therefore\ \overline{BL}=\overline{KB}\cdot\cot\theta$

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{KB}}\cdot\overline{\mathrm{BL}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos\theta}-1\right)\times\left(\frac{1}{\cos\theta}-1\right)\cdot\cot\theta$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{(1-\cos\theta)^2}{\cos^2\theta}\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{(1-\cos\theta)^2}{2\sin\theta\cos\theta}$$

$$\therefore\ \lim_{\theta\to 0}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\lim_{\theta\to 0}\frac{(1-\cos\theta)^2}{2\sin\theta\cos\theta\cdot\theta^3}$$

$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{(1-\cos\theta)^2(1+\cos\theta)^2}{2\sin\theta\cos\theta\cdot\theta^3(1+\cos\theta)^2}$$

$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin^4\theta}{2\sin\theta\cos\theta\cdot\theta^3(1+\cos\theta)^2}$$

$$=\frac{1}{2\cdot 1\cdot 2^2}=\frac{1}{8}$$

$\therefore\ p^2+q^2=65$

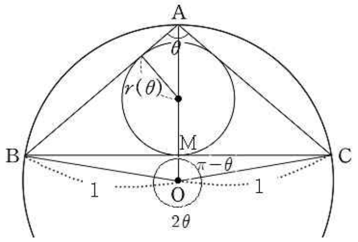
15) ④

$\mathrm{A}(t,\ \ln(2t+1))$이라 하면 $a\to\infty$일 때 $t\to 0$이다.

$S_1=\frac{1}{2}\ln(2t+1),\ S_2=\frac{t}{2}$이므로

$$\alpha=\lim_{a\to\infty}\frac{S_1}{S_2}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(2t+1)}{t}=2$$

16) 17



$\overline{OM}=\cos(\pi-\theta)$

$\overline{AM}=1-\cos(\pi-\theta)$

$$\overline{AM}=\overline{AO'}+\overline{O'M}=\frac{r(\theta)}{\sin\frac{\theta}{2}}+r(\theta)$$

$$\therefore r(\theta)=\frac{\sin\frac{\theta}{2}(1-\cos(\pi-\theta))}{1+\sin\frac{\theta}{2}}$$

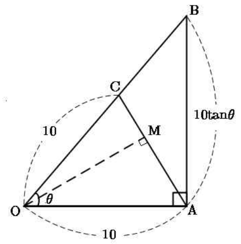
($\pi-\theta=x$ 라하면)

$$\lim_{\theta\to\pi-}\frac{r(\theta)}{(\pi-\theta)^2}=\lim_{x\to 0+}\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2})(1-\cos x)}{x^2(1+\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}))}$$

$$=\lim_{x\to 0+}\frac{\cos\frac{x}{2}\times\sin^2x}{x^2(1+\cos\frac{x}{2})(1+\cos x)}=\frac{1}{4}$$

$\therefore p^2+q^2=1^2+4^2=17$

17) 20



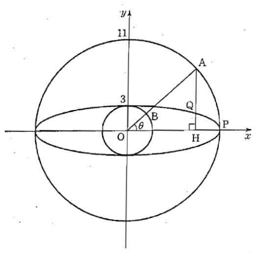
$\overline{AM}=10\sin\frac{\theta}{2}$ $\qquad\therefore\ \overline{AC}=20\sin\frac{\theta}{2}$

$\overline{OB}=10\sec\theta$ 이므로 $\overline{BC}=10\sec\theta-10$ 이고 $\overline{AB}=10\tan\theta$

$\therefore\ f(\theta)=10\tan\theta+20\sin\frac{\theta}{2}+10\sec\theta-10$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{10\tan\theta+20\sin\frac{\theta}{2}+10\sec\theta-10}{\theta}=10+10+0=20$$

18) 27



조건에 의해 $A(11\cos\theta\,,\,11\sin\theta)$, $B(3\cos\theta\,,\,3\sin\theta)$, $P(11\,,\,0)$, $Q(11\cos\theta\,,\,3\sin\theta)$, $H(\,11\cos\theta\,,\,0\,)$ 로 놓을 수 있다.

$\overline{AQ}=8\sin\theta,\ \overline{BQ}=8\cos\theta,\ \overline{PH}=11(1-\cos\theta)$

$$\triangle ABQ=S_1=\frac{1}{2}\cdot\overline{AQ}\cdot\overline{BQ}=\frac{1}{2}\cdot 8\sin\theta\cdot 8\cos\theta=16\sin 2\theta$$

$$\triangle APQ=S_2=\frac{1}{2}\cdot\overline{AQ}\cdot\overline{PH}=\frac{1}{2}\cdot 8\sin\theta\cdot 11(1-\cos\theta)$$

$=44\sin\theta(1-\cos\theta)$

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{S_2}{\theta^2\cdot S_1}=\frac{44\sin\theta(1-\cos\theta)}{\theta^2\cdot 16\sin 2\theta}$$

$$=\frac{11}{16}\cdot\frac{2(1-\cos\theta)}{\theta^2}\cdot\frac{\frac{\sin\theta}{\theta}}{\frac{\sin 2\theta}{2\theta}}=\frac{11}{16}$$

$\therefore\ p+q=16+11=27$

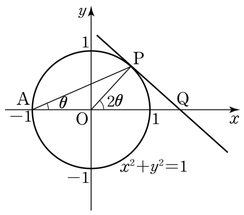
19) ①

$S(\theta)=\frac{1}{2}cot\theta+\frac{1}{2}sin(\frac{\pi}{2}+\theta)=\frac{1}{2}cot\theta+\frac{1}{2}cos\theta$ 이므로

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\frac{1}{2}(\cot\theta+\cos\theta)}{\theta-\frac{\pi}{2}}=\lim_{\theta\to t+0}\frac{\frac{1}{2}\left\{\cot(\frac{\pi}{2}-t)+\cos(\frac{\pi}{2}-t)\right\}}{-t}$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{t\to 0+}\frac{\tan t+\sin t}{t}=-1$$

20) ④



그림에서 $\triangle AOP$가 이등변삼각형이므로 $\angle POQ = 2\theta$

$\therefore$ $P(\cos 2\theta,\ \sin 2\theta)$

점 P를 지나는 접선의 방정식은 $\cos 2\theta x + \sin 2\theta y = 1$

$\therefore$ $Q\left(\dfrac{1}{\cos 2\theta}, 0\right)$

$\therefore$ $\overline{PQ} - \overline{OQ} = \sqrt{\left(\cos 2\theta - \dfrac{1}{\cos 2\theta}\right)^2 + \sin^2 2\theta} - \dfrac{1}{\cos 2\theta}$

$= \sqrt{1 - 2 + \dfrac{1}{\cos^2 2\theta}} - \dfrac{1}{\cos 2\theta}$

$= \sqrt{\sec^2 2\theta - 1} - \dfrac{1}{\cos 2\theta}$

$= \tan 2\theta - \dfrac{1}{\cos 2\theta} = \dfrac{\sin 2\theta - 1}{\cos 2\theta}$

한편 $\theta - \dfrac{\pi}{4} = t$라 하면 $\theta = \dfrac{\pi}{4} + t$이므로

$\dfrac{\sin 2\theta - 1}{\cos 2\theta} = \dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + 2t\right) - 1}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + 2t\right)}$

$= \dfrac{\cos 2t - 1}{-\sin 2t} = \dfrac{-2\sin^2 t}{-\sin 2t} = \dfrac{2\sin^2 t}{\sin 2t}$

$\therefore$ $\displaystyle\lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}-} \dfrac{\overline{PQ} - \overline{OQ}}{\theta - \dfrac{\pi}{4}} = \lim_{t \to 0-} \dfrac{\dfrac{2\sin^2 t}{\sin 2t}}{t} = 2\lim_{t \to 0-} \dfrac{\sin^2 t}{t^2} \cdot \dfrac{2t}{\sin 2t} \cdot \dfrac{1}{2} = 1$

21) 50

$P(\cos\theta,\ \sin\theta)$라 하면 접선은 $x\cos\theta + y\sin\theta = 1$이므로

점 Q의 좌표는 $Q\left(\dfrac{1}{\cos\theta},\ 0\right)$

직선 AP의 식은 $y = \dfrac{\sin\theta - 1}{\cos\theta}x + 1$이고,

점 R의 좌표는 $R\left(\dfrac{\cos\theta}{1 - \sin\theta},\ 0\right)$

$S(\theta) = \dfrac{1}{2} \times \sin\theta \times \left(\dfrac{\cos\theta}{1 - \sin\theta} - \dfrac{1}{\cos\theta}\right)$

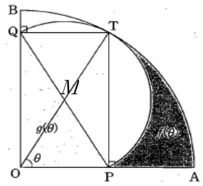
$= \dfrac{1}{2}\sin\theta \times \dfrac{\cos^2\theta - 1 + \sin\theta}{(1 - \sin\theta)\cos\theta} = \dfrac{1}{2}\sin\theta \times \dfrac{\sin\theta(1 - \sin\theta)}{(1 - \sin\theta)\cos\theta}$

$= \dfrac{1}{2}\dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$

$\therefore \displaystyle\lim_{\theta \to 0+} \dfrac{S(\theta)}{\theta^2} = \lim_{\theta \to 0+} \dfrac{\dfrac{1}{2}\dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta}}{\theta^2} = \lim_{\theta \to 0+} \dfrac{\sin^2\theta}{2\theta^2\cos\theta} = \dfrac{1}{2}$

$\therefore$ $100\alpha = 100 \times \dfrac{1}{2} = 50$

22) 50



점 T의 좌표를 $T(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$라 하고,직사각형 $OPTQ$에서 두 대각선 $OT,\ PQ$의 교점을 M 이라 하자.

$f(\theta) = $(부채꼴$OAT$의 넓이)

$-$(삼각형OPM의 넓이) $-$(부채꼴MPT의 넓이)

$= \dfrac{1}{2} \times 2^2 \times \theta - \dfrac{1}{2} \times 2\cos\theta \times 1 \times \sin\theta\ - \dfrac{1}{2} \times 1^2 \times 2\theta$

$= \theta - \cos\theta\sin\theta$

$g(\theta) = \dfrac{1}{2} \times 2\cos\theta \times 2\sin\theta\ = 2\cos\theta\sin\theta$

$\therefore a = \displaystyle\lim_{\theta \to 0+} \dfrac{\theta + f(\theta)}{g(\theta)}$

$= \displaystyle\lim_{\theta \to 0+} \dfrac{2\theta - \cos\theta\sin\theta}{2\cos\theta\sin\theta}$

$= \displaystyle\lim_{\theta \to 0+} \left(\dfrac{\theta}{\cos\theta\sin\theta} - \dfrac{1}{2}\right)$

$= 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

$\therefore$ $100a = 50$

23) ④

[출제의도] 도형의 성질을 이용한 삼각함수의 극한값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

정 $2n$ 다각형의 한 변의 길이는 $1 - \cos\dfrac{\pi}{n}$ 이고,

정 $2n$ 다각형의 중심에서 한 변까지의 길이를 l이라 하면,

$\tan\dfrac{\pi}{2n} = \dfrac{\dfrac{1}{2}\left(1 - \cos\dfrac{\pi}{n}\right)}{l}$ 이므로, $l = \dfrac{1 - \cos\dfrac{\pi}{n}}{2\tan\dfrac{\pi}{2n}}$ 이다.

따라서,

$S_n = 2n \times \left\{\dfrac{1}{2} \times l \times \left(1 - \cos\dfrac{\pi}{n}\right)\right\} = \dfrac{n\left(1 - \cos\dfrac{\pi}{n}\right)^2}{2\tan\dfrac{\pi}{2n}} = \dfrac{2n \times \sin^4\dfrac{\pi}{2n}}{\tan\dfrac{\pi}{2n}}$

이다. 그러므로

$\displaystyle\lim_{n \to \infty} n^2 S_n = \lim_{n \to \infty} \dfrac{2n^3 \times \sin^4\dfrac{\pi}{2n}}{\tan\dfrac{\pi}{2n}}$

$= \dfrac{1}{4}\displaystyle\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin^4 \pi x}{x^3 \times \tan \pi x}$ $\quad \left(\dfrac{1}{2n} = x\text{ 치환}\right)$

$= \dfrac{1}{4} \times \displaystyle\lim_{x \to 0}\left(\dfrac{\sin \pi x}{x}\right)^3 \times \lim_{x \to 0} \dfrac{\sin \pi x}{\tan \pi x}$

$= \dfrac{1}{4} \times \pi^3 \times 1 = \dfrac{1}{4}\pi^3$

24) 30

점 P의 좌표를 $P(\cos\theta, \sin\theta)$라고 하면

$Q(\ln(\sin\theta + 1), \sin\theta)$ $R(\ln(\sin\theta + 1), 0)$이고

이 때 직선 OP의 방정식은 $y = \tan\theta x$이므로 점 T의 좌표

$T(\ln(\sin\theta + 1), \tan\theta \ln(\sin\theta + 1))$이다.

따라서 삼각형 ORT의 넓이 $S(\theta) = \dfrac{1}{2}\tan\theta\{\ln(1 + \sin\theta)\}^2$이므로

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\frac{1}{2}\lim_{\theta\to0+}\frac{\tan\theta\{\ln(1+\sin\theta)\}^2}{\theta^3}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\theta\to0+}\frac{\tan\theta}{\theta}\lim_{\theta\to0+}\frac{\{\ln(1+\sin\theta)\}^2}{\theta^2}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\theta\to0+}\frac{\tan\theta}{\theta}\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{\{\ln(1+\sin\theta)\}}{\theta}\right\}^2$$

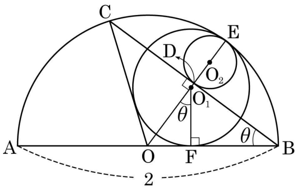
$$=\frac{1}{2}\lim_{\theta\to0+}\frac{\tan\theta}{\theta}\lim_{\theta\to0+}\left[\ln(1+\sin\theta)^{\frac{1}{\sin\theta}}\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}\right]^2$$

$$=\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}=a$$

$$\therefore 60a=60\times\frac{1}{2}=30$$

25) 17

점 O_1에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 F, 직선 O_1O_2와 현 BC, 호 BC의 교점을 각각 D, E라 하자.



$\overline{O_1F}=\overline{O_1E}=f(\theta)$, $\angle OO_1F=\theta$

$\overline{OE}=\overline{OO_1}+\overline{O_1E}=\dfrac{f(\theta)}{\cos\theta}+f(\theta)=1$

$f(\theta)=\dfrac{\cos\theta}{1+\cos\theta}$

$\overline{OD}=\sin\theta$, $\overline{ED}=1-\sin\theta$ 이므로

$g(\theta)=\dfrac{1-\sin\theta}{2}$

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-}\frac{g(\theta)}{\{f(\theta)\}^2}=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-}\frac{\dfrac{1-\sin\theta}{2}}{\left(\dfrac{\cos\theta}{1+\cos\theta}\right)^2}$$

$$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-}\frac{(1-\sin\theta)(1+\cos\theta)^2}{2\cos^2\theta}$$

$\dfrac{\pi}{2}-\theta=t$라 하면, $\theta=\dfrac{\pi}{2}-t$이고

$\sin\theta=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right)=\cos t$,

$\cos\theta=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right)=\sin t$

$\theta\to\dfrac{\pi}{2}-0$일때 $t\to+0$이다.

(주어진 식) $=\displaystyle\lim_{t\to0+}\frac{(1-\cos t)(1+\sin t)^2}{2\sin^2 t}$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{(1-\cos t)(1+\sin t)^2}{2(1-\cos^2 t)}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{(1+\sin t)^2}{2(1+\cos t)}$$

$$=\frac{1}{4}=\frac{q}{p}$$

따라서 $p=4$, $q=1$ 이므로 $p^2+q^2=17$이다.

26) ③

$\overline{P_0P_1}=\overline{P_1P_2}=\cdots=\overline{P_{n-1}P_n}=2\sin\dfrac{\pi}{2n}$

이므로 각 정삼각형의 넓이는 $\sqrt{3}\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)$이다.

따라서 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n\cdot S(n)=\lim_{n\to\infty}\sqrt{3}n^2\times\sin^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}\pi^2$

27) 17

$\angle QOB=\theta$이므로 (동위각)

$\overline{OR}=\overline{OB}cos\theta=\cos\theta$

$\overline{QR}=1-\overline{OQ}=1-\cos\theta$에서

$$\frac{S(\theta)}{\theta^4}=\frac{\pi\left(\dfrac{1-\cos\theta}{2}\right)^2}{\theta^4}=\frac{\pi}{4}\times\frac{(1-\cos\theta)^2}{\theta^4}\times\frac{(1+\cos\theta)^2}{(1+\cos\theta)^2}$$

$$=\frac{\pi}{4}\times\frac{\sin^4\theta}{\theta^4}\times\frac{1}{(1+\cos\theta)^2}$$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^4}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\pi}{4}\times\frac{\sin^4\theta}{\theta^4}\times\frac{1}{(1+\cos\theta)^2}=\frac{\pi}{16}$$

$p+q=17$

28) ②

$\overline{AP}=2\cos\dfrac{\theta}{2}$ $\quad\therefore S(\theta)=4\cos^2\dfrac{\theta}{2}\times\sin\dfrac{\theta}{2}$

따라서 $\displaystyle\lim_{\theta\to0}\frac{S(\theta)}{\tan\theta}=2$

29) 65

$\triangle$AOS에서 $\overline{AS}=\cos\theta$, $\overline{OS}=\sin\theta$이므로

$f(\theta)=\dfrac{1}{2}\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta=\dfrac{1}{4}\sin2\theta$ $\cdots$ ㉠

$\triangle$OPQ에서 $\angle POQ=2\theta$이므로 $\overline{PQ}=\sin2\theta$

$\triangle$PQR에서 $\overline{PR}=\sin^2 2\theta$, $\overline{QR}=\sin2\theta\cdot\cos2\theta$이므로

$g(\theta)=\dfrac{1}{2}\sin^3 2\theta\cdot\cos2\theta$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

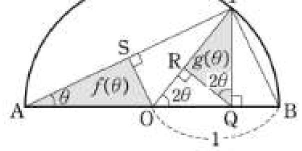
$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta^2 f(\theta)}{g(\theta)}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\dfrac{1}{4}\cdot\theta^2\cdot\sin2\theta}{\dfrac{1}{2}\cdot\sin^3 2\theta\cdot\cos2\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{1}{2}\cdot\frac{\theta^2}{\sin^2 2\theta}\cdot\frac{1}{\cos2\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{(2\theta)^2}{\sin^2 2\theta}\cdot\frac{1}{\cos2\theta}$$

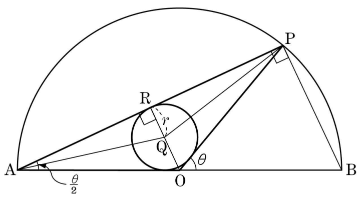
$$=\frac{1}{8}$$

$\therefore\ p^2+q^2=64+1=65$



30) ④

삼각형 PAO 에 내접하는 원의 중심을 Q , 반지름의 길이를 r라 하자.



삼각형 PAO에 내접하는 원의 중심을 Q라 하고 원 Q와 변 AP의 접점을 R라 하면
$\overline{\mathrm{OR}} \perp \overline{\mathrm{AP}}$, $\overline{\mathrm{QR}} \perp \overline{\mathrm{AP}}$ 이다.

삼각형 AOR에서 $\angle \mathrm{RAO} = \frac{\theta}{2}$ 이므로

$\overline{\mathrm{AR}} = \overline{\mathrm{OA}} \cos\frac{\theta}{2} = \cos\frac{\theta}{2}$

삼각형 AQR에서 $\angle \mathrm{RAQ} = \frac{\theta}{4}$ 이므로

$\overline{\mathrm{QR}} = \overline{\mathrm{AR}} \tan\frac{\theta}{4} = \cos\frac{\theta}{2} \tan\frac{\theta}{4}$

따라서 $f(\theta) = \pi \overline{\mathrm{QR}}^2 = \pi \cos^2\frac{\pi}{2} \tan^2\frac{\theta}{4}$ 이다.

$$\therefore \lim_{\theta\to 0+} \frac{f(\theta)}{\theta^2} = \lim_{\theta\to 0+} \frac{\pi\cos^2\frac{\theta}{2}\tan^2\frac{\theta}{4}}{\theta^2}$$

$$= \lim_{\theta\to 0+} \frac{\pi\cos^2\frac{\theta}{2}\tan^2\frac{\theta}{4}}{\left(\frac{\theta}{4}\right)^2\cdot 16} = \frac{\pi}{16} \lim_{\theta\to 0+} \frac{\tan^2\frac{\theta}{4}}{\left(\frac{\theta}{4}\right)^2} \lim_{\theta\to 0+} \cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$= \frac{\pi}{16}\cdot 1^2\cdot 1^2 = \frac{\pi}{16}$$

31) 41

$\overline{PB} = \tan\theta$, $\angle QCD = \frac{\pi}{4} - \theta$ 이므로 $\overline{QD} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)$

$\overline{PA} = 1 - \tan\theta$, $\overline{QA} = 1 - \tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)$

$\therefore f(\theta) = \frac{1}{2} \times (1 - \tan\theta) \times \left\{1 - \tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)\right\}$

$\overline{PC} = \sec\theta$, 내접원의 반지름을 r 이라 하면
$\triangle PBC$ 의 넓이는

$\frac{1}{2} r(1 + \tan\theta + \sec\theta) = \frac{1}{2}\tan\theta$,

$r = \frac{\tan\theta}{1 + \tan\theta + \sec\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta + 1}$

$\therefore g(\theta) = \pi\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta + 1}\right)^2$

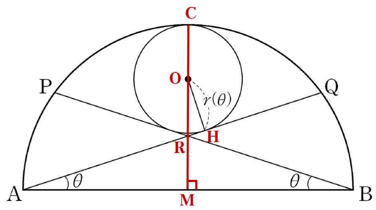
$$\lim_{\theta\to 0+} \frac{g(\theta)}{\theta \times f(\theta)} = \lim_{\theta\to 0+} \frac{\pi\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta + 1}\right)^2}{\theta \times \frac{1}{2} \cdot (1 - \tan\theta) \cdot \left\{1 - \tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)\right\}}$$

$$= \lim_{\theta\to 0+} \frac{\frac{1}{4}\pi\sin^2\theta}{\frac{1}{2}\theta\left\{1 - \tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)\right\}}$$

$$= \lim_{\theta\to 0+} \frac{\frac{1}{2}\pi\sin\theta}{1 - \frac{1 - \tan\theta}{1 + \tan\theta}} = \lim_{\theta\to 0+} \frac{\frac{1}{2}\pi\sin\theta}{\frac{2\tan\theta}{1 + \tan\theta}} = \frac{1}{4}\pi$$

$\frac{q}{p}\pi = \frac{1}{4}\pi$ 이므로 $\therefore 10p + q = 41$

32) 8



위의 그림에서 $\angle HOR = \theta$ 이고, $\overline{OR} = r(\theta)\sec\theta$

$\overline{RM} = \tan\theta$, $\overline{OC} = r(\theta)$ 이므로

$\overline{CM} = r(\theta) + r(\theta)\sec\theta + \tan\theta = 1$

$\therefore r(\theta) = \frac{1 - \tan\theta}{1 + \sec\theta}$

$\frac{\pi}{4} - \theta = t$ 라 하면

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-} \frac{r(\theta)}{\frac{\pi}{4} - \theta} = \lim_{t\to 0+} \frac{r\left(\frac{\pi}{4} - t\right)}{t} = \lim_{t\to 0+} \frac{\frac{1 - \tan\left(\frac{\pi}{4} - t\right)}{1 + \sec\left(\frac{\pi}{4} - t\right)}}{t}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2} + 1} \lim_{t\to 0+} \frac{\frac{2\tan t}{1 + \tan t}}{t} = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} \times 2 = 2\sqrt{2} - 2$$

$\therefore p^2 + q^2 = 2^2 + (-2)^2 = 8$

33) ④

[출제의도] 여러 가지 함수의 극한을 이용하여 도형과 관련된 문제를 해결한다.

$\overline{\mathrm{AB}} = 2$ 이고 $\angle \mathrm{APB} = \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\overline{\mathrm{PB}} = 2\sin\theta$

$\angle \mathrm{QBP} = \frac{\pi}{2} - \angle \mathrm{PQB} = \frac{\pi}{2} - \theta - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - \theta$

$\therefore\ \overline{\mathrm{PQ}} = \overline{\mathrm{PB}} \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = 2\sin\theta \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)$

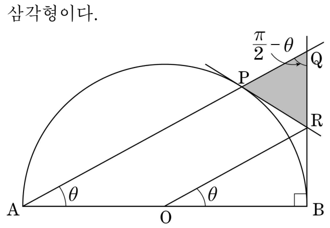
$S(\theta) = \frac{1}{2} \cdot 2\sin\theta \cdot 2\sin\theta \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = 2\sin^2\theta\tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)$

$$\lim_{\theta\to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^2} = \lim_{\theta\to 0+} \frac{2\sin^2\theta\tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)}{\theta^2} = \lim_{\theta\to 0+} 2\tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = 2$$

34) ③

[출제의도] 도형의 성질과 삼각함수의 극한의 성질을 이용하여 극한값을 구한다.

그림에서 삼각형 ABQ와 삼각형 OBR는 닮음비가 2 : 1인 닮은 삼각형이다.



$\overline{\mathrm{QB}} = 2\tan\theta$이므로

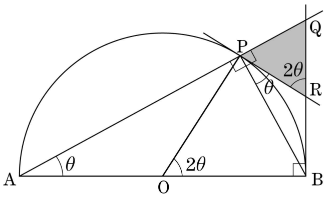
$\overline{\mathrm{QR}} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{QB}} = \tan\theta$

$\overline{\mathrm{AQ}} = \frac{2}{\cos\theta}$, $\overline{\mathrm{AP}} = 2\cos\theta$이므로

$\overline{\mathrm{QP}} = \overline{\mathrm{AQ}} - \overline{\mathrm{AP}} \ = 2\left(\frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta\right)$

이때 $\angle \mathrm{AQB} = \frac{\pi}{2} - \theta$이므로

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{QR}}\times\overline{\mathrm{QP}}\times\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times\tan\theta\times2\left(\frac{1}{\cos\theta}-\cos\theta\right)\times\cos\theta$$
$$=\tan\theta(1-\cos^2\theta)$$
$$=\tan\theta\sin^2\theta$$
$$\therefore\ \lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\tan\theta\sin^2\theta}{\theta^3}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\tan\theta}{\theta}\times\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2$$
$$=1\times1^2=1$$
[다른 풀이]
그림과 같이 반원의 중심을 O라 하자.



$\angle\mathrm{APB}=\frac{\pi}{2}$이므로 $\angle\mathrm{PBR}=\theta$이다.

원 밖의 한 점 R에서 그은 두 접선의 길이는 서로 같으므로 $\overline{\mathrm{PR}}=\overline{\mathrm{RB}}$이고 $\angle\mathrm{RPB}=\theta$이다.

$\angle\mathrm{PQR}=\angle\mathrm{QPR}=\frac{\pi}{2}-\theta$이므로

$\overline{\mathrm{PR}}=\overline{\mathrm{QR}}$

$\overline{\mathrm{BQ}}=2\tan\theta$에서

$\overline{\mathrm{PR}}=\overline{\mathrm{RB}}=\overline{\mathrm{QR}}=\tan\theta$

이때 $\angle\mathrm{PRQ}=2\theta$이므로

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\tan\theta\tan\theta\sin2\theta=\frac{1}{2}\tan^2\theta\sin2\theta$$
$$\therefore\ \lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\tan^2\theta\sin2\theta}{2\theta^3}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\tan\theta\cdot\tan\theta\cdot\sin2\theta}{\theta\cdot\theta\cdot2\theta}=1$$

35) 15

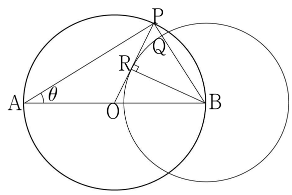
[출제의도] 삼각함수의 극한을 활용하여 문제해결하기

$$\frac{1}{2}\times30\sin\theta\times30\cos\theta=\frac{1}{2}\times(30+30\sin\theta+30\cos\theta)\times r(\theta)$$
$$r(\theta)=\frac{30\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta+1}$$
$$\therefore\ \lim_{\theta\to0+}\frac{r(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{30\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta+1}\times\frac{\sin\theta}{\theta}\right)=15$$

36) ③

[출제의도] 삼각함수의 극한을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

원 C_2와 선분 OP의 접점을 점 R라 하자.



$\overline{\mathrm{BP}}=2\sin\theta$,

$\angle\mathrm{ROB}=2\theta$이므로, $\overline{\mathrm{BR}}=\sin2\theta=\overline{\mathrm{BQ}}$

$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PB}}-\overline{\mathrm{BQ}}=2\sin\theta-\sin2\theta$

$=2\sin\theta-2\sin\theta\cos\theta=2\sin\theta(1-\cos\theta)$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\theta^3}=\lim_{\theta\to0+}\frac{2\sin\theta(1-\cos\theta)}{\theta^3}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}2\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}\cdot\frac{1}{1+\cos\theta}$$
$$=1$$

37) 16

[출제의도] 도형의 넓이를 삼각함수로 나타내어 삼각함수의 극한값을 계산할 수 있는가?

$\overline{AC}=x$라 하면 $\overline{AC}=\overline{BC}=\overline{AD}=\overline{AP}=x$ 이다.

이등변삼각형 CAB에서

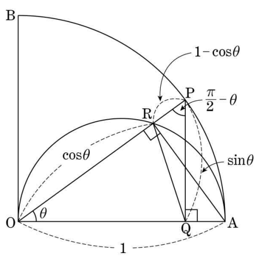
$$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{2}{x}\ \ \therefore x=\frac{2}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

따라서 $\triangle BDP$의 넓이 $S(\theta)$는

$$S(\theta)=\triangle ADP-\triangle ABP=\frac{1}{2}x^2\sin2\theta-\frac{1}{2}\times4\times x\sin2\theta$$
$$=\frac{2\sin2\theta}{\sin^2\frac{\theta}{2}}-\frac{4\sin2\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$
$$\therefore\lim_{\theta\to0+}(\theta\times S(\theta))=\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{2\sin2\theta}{\sin^2\frac{\theta}{2}}-\frac{4\sin2\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\left(2\times\frac{\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\times\frac{\sin2\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)-\lim_{\theta\to0+}\left(4\theta\times\frac{\sin2\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)$$
$$=2\times2\times4-4\times0\times4=16$$

38) ②

[출제의도] 도형의 성질과 삼각함수의 극한의 성질을 이용하여 극한값을 구한다.



$\overline{\mathrm{PR}}=\overline{\mathrm{OP}}-\overline{\mathrm{OR}}=1-\cos\theta$

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sin\theta$

$\angle\mathrm{QPR}=\frac{\pi}{2}-\theta$ 이므로

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times(1-\cos\theta)\times\sin\theta\times\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$
$$=\frac{(1-\cos\theta)\sin\theta\cos\theta}{2}$$
$$\therefore\ \lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\lim_{\theta\to0+}\frac{(1-\cos\theta)\sin\theta\cos\theta}{2\theta^3}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin^3\theta\cos\theta}{2\theta^3(1+\cos\theta)}=\frac{1}{4}$$

[다른 풀이]

(삼각형 PRQ의 넓이)

=(삼각형 POQ의 넓이)−(삼각형 ROQ의 넓이) 이므로

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta-\frac{1}{2}\cos^2\theta\sin\theta=\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta(1-\cos\theta)$$
$$\therefore\ \lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\lim_{\theta\to0+}\frac{(1-\cos\theta)\sin\theta\cos\theta}{2\theta^3}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin^3\theta\cos\theta}{2\theta^3(1+\cos\theta)}=\frac{1}{4}$$

39) ④

[출제의도] 로그함수의 극한의 성질을 이용하여 극한값을 구한다.

$A(0,1)$, $C\left(\log_2\frac{a}{2},\ \frac{a}{2}\right)$이므로 직선 AC의 기울기는

$$f(a)=\frac{\frac{a}{2}-1}{\log_2\frac{a}{2}-0}=\frac{\frac{a}{2}-1}{\log_2\frac{a}{2}}$$

$B(0,a-1)$, $C\left(\log_2\frac{a}{2},\ \frac{a}{2}\right)$이므로 직선 BC의 기울기는

$$g(a)=\frac{\frac{a}{2}-(a-1)}{\log_2\frac{a}{2}-0}=-\frac{\frac{a}{2}-1}{\log_2\frac{a}{2}}$$

$$\therefore\ f(a)-g(a)=2\times\frac{\frac{a}{2}-1}{\log_2\frac{a}{2}}$$

$\frac{a}{2}-1=t$ 라 하면 $a\to 2+0$ 일 때 $t\to +0$ 이므로

$$\lim_{a\to 2+}\{f(a)-g(a)\}=2\lim_{t\to 0+}\frac{t}{\log_2(t+1)}$$

$$=2\lim_{t\to 0+}\frac{1}{\frac{\log_2(t+1)}{t}}=2\lim_{t\to 0+}\frac{1}{\log_2(t+1)^{\frac{1}{t}}}$$

$$=2\times\frac{1}{\log_2 e}=2\ln 2$$

[다른 풀이]

$a\to 2+0$ 이면 점 C는 곡선 $y=2^x$을 따라 점 A에 한없이 가까워진다.

따라서 직선 AC의 기울기는 곡선 $y=2^x$ 위의 점 A에서의 접선의 기울기에 한없이 가까워진다.

$y'=2^x\times\ln 2$ 이므로

$$\lim_{a\to 2+}f(a)=2^0\times\ln 2=\ln 2$$

한편, 점 C를 지나고 x축에 평행한 직선을 l이라 하면 곡선 $y=-2^x+a$와 곡선 $y=2^x$은 항상 직선 l에 대하여 대칭이다.

따라서 직선 BC와 직선 AC도 항상 직선 l에 대하여 대칭이다.

$$\lim_{a\to 2+}g(a)=-\lim_{a\to 2+}f(a)=-\ln 2$$

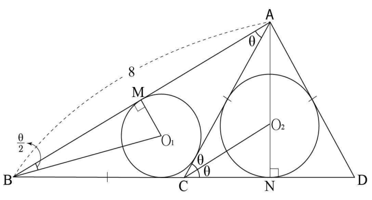
$$\therefore\ \lim_{a\to 2+}\{f(a)-g(a)\}$$

$$=\lim_{a\to 2+}f(a)-\lim_{a\to 2+}g(a)$$

$$=\ln 2-(-\ln 2)=2\ln 2$$

40) ③

[출제의도] 도형과 함수의 극한을 이용하여 수학내적 문제해결하기



삼각형 ABC에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r_1, 삼각형 ACD에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r_2라 하자.

삼각형 BO_1M에서 $r_1=4\tan\frac{\theta}{2}$

삼각형 BCM에서 $\overline{BC}=\frac{4}{\cos\theta}=\overline{AC}$

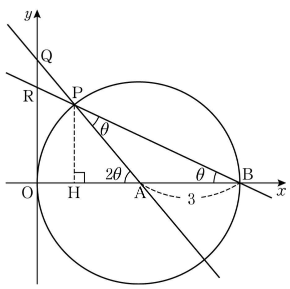
삼각형 ACN에서 $\overline{CN}=\frac{4}{\cos\theta}\times\cos 2\theta$

삼각형 CNO_2 에서 $r_2=\overline{CN}\tan\theta=\frac{4\tan\theta\cos 2\theta}{\cos\theta}$

따라서 $\lim_{\theta\to 0+}\frac{r_1r_2}{\theta^2}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{16\tan\frac{\theta}{2}\tan\theta\cos 2\theta}{\theta^2\cos\theta}=8$

41) 18

[출제의도] 도형의 성질을 이용하여 삼각함수의 극한 문제를 해결한다.



$\angle PBO=\theta$이므로 $\angle PAO=2\theta$이다.

점 $P(3+3\cos(\pi-2\theta), 3\sin(\pi-2\theta))=(3-3\cos 2\theta, 3\sin 2\theta)$

점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{HO}=3-3\cos 2\theta$, $\overline{OQ}=3\tan 2\theta$, $\overline{OR}=6\tan\theta$

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{RQ}\times\overline{HO}=\frac{1}{2}\times(\overline{OQ}-\overline{OR})\times\overline{HO}$$

$$=\frac{1}{2}(3\tan 2\theta-6\tan\theta)(3-3\cos 2\theta)$$

$$=\frac{9}{2}(\tan 2\theta-2\tan\theta)(1-\cos 2\theta)$$

$$=9\left(\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}-2\tan\theta\right)\sin^2\theta$$

$$=\frac{18\tan^3\theta\sin^2\theta}{1-\tan^2\theta}$$

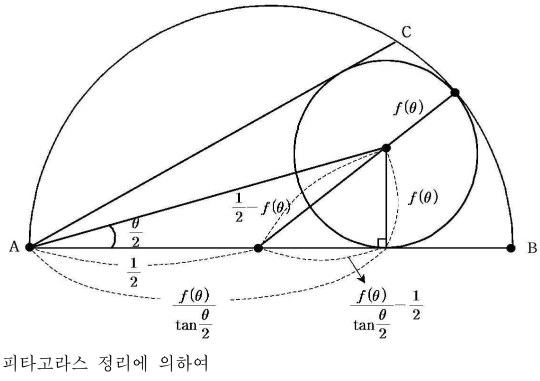
따라서

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta^5}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{18\tan^3\theta\sin^2\theta}{\theta^5(1-\tan^2\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\left(\frac{18}{1-\tan^2\theta}\times\frac{\tan^3\theta}{\theta^3}\times\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}\right)$$

$$=18\times 1\times 1=18$$

42) 25



피타고라스 정리에 의하여

$$\left\{\frac{f(\theta)}{\tan\frac{\theta}{2}}-\frac{1}{2}\right\}^2+\{f(\theta)\}^2=\left\{\frac{1}{2}-f(\theta)\right\}^2$$

$$\Rightarrow\left\{\frac{f(\theta)}{\tan\frac{\theta}{2}}\right\}^2-\frac{f(\theta)}{\tan\frac{\theta}{2}}+\frac{1}{4}+\{f(\theta)\}^2=\frac{1}{4}-f(\theta)+\{f(\theta)\}^2$$

$$\Rightarrow\frac{\{f(\theta)\}^2}{\tan^2\frac{\theta}{2}}-\frac{f(\theta)}{\tan\frac{\theta}{2}}=-f(\theta)$$

양변에 $-\dfrac{\tan^2\frac{\theta}{2}}{f(\theta)}$를 곱하여 정리하면

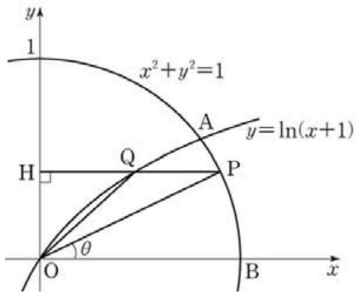
$\tan\frac{\theta}{2}-f(\theta)=\tan^2\frac{\theta}{2}$

$$\therefore\ \lim_{\theta\to0+}\frac{\tan\frac{\theta}{2}-f(\theta)}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\tan^2\frac{\theta}{2}}{\theta^2}=\frac{1}{4}=\alpha$$

따라서 $100\alpha=25$이다.

43) 30

[출제의도] 삼각함수와 로그함수의 극한을 이용하여 극한값을 구할 수 있는가?



$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$이므로 점 Q의 x좌표는 $\sin\theta=\ln(x+1)$에서

$x=e^{\sin\theta}-1$

따라서 $\mathrm{Q}\left(e^{\sin\theta}-1,\ \sin\theta\right)$이므로

$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\left(\cos\theta-e^{\sin\theta}+1\right)\times\sin\theta$

한편 $\mathrm{H}(0,\ \sin\theta)$이므로

$L(\theta)=e^{\sin\theta}-1$

$$\therefore\ k=\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{L(\theta)}=\frac{1}{2}\lim_{\theta\to0+}\frac{\left(\cos\theta-e^{\sin\theta}+1\right)\sin\theta}{e^{\sin\theta}-1}$$

$$=\frac{1}{2}\times\lim_{\theta\to0+}\left(\cos\theta-e^{\sin\theta}+1\right)\times\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta}{e^{\sin\theta}-1}$$

$$=\frac{1}{2}\times(1-1+1)\times1=\frac{1}{2}$$

$\therefore\ 60k=60\times\frac{1}{2}=30$

44) ⑤

[출제의도] 지수함수와 로그함수의 극한값을 구한다.

함수 $f(x)=\begin{cases}e^x & (x\le0,\ x\ge2)\\ \ln(x+1) & (0<x<2)\end{cases}$

와 함수 $g(x)$에 대하여

i) $g(x)=t$로 놓으면

$x\to2+$ 일 때 $g(x)\to2+$ 이므로

$\lim_{x\to2+}f(g(x))=\lim_{t\to2+}f(t)=e^2$

ii) $f(x)=s$로 놓으면

$x\to0+$ 일 때 $f(x)\to0+$ 이므로

$\lim_{x\to0+}g(f(x))=\lim_{s\to0+}g(s)=2$

따라서

$\lim_{x\to2+}f(g(x))+\lim_{x\to0+}g(f(x))=e^2+2$

45) ①

[출제의도] 선분의 길이를 이용하여 지수함수의 극한값을 구한다.

$\mathrm{A}(t,\ 2^t)$, $\mathrm{B}\left(t,\ \left(\frac{1}{2}\right)^t\right)$, $\mathrm{H}(0,\ 2^t)$에서

$\overline{\mathrm{AH}}=t$이고, $\overline{\mathrm{AB}}=2^t-\left(\frac{1}{2}\right)^t$이므로

$$\lim_{t\to0+}\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{AH}}}=\lim_{t\to0+}\frac{2^t-\left(\frac{1}{2}\right)^t}{t}=\lim_{t\to0+}\left\{\frac{2^t-1}{t}-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^t-1}{t}\right\}$$

$$=\ln2-\ln\frac{1}{2}=2\ln2$$

[참고]

$a>0$일 때, $a^t-1=s$로 놓으면

$a^t=s+1$이므로 $t=\frac{\ln(s+1)}{\ln a}$ $(a\ne1)$

$t\to0$일 때, $s\to0$이므로

$$\lim_{t\to0}\frac{a^t-1}{t}=\lim_{s\to0}\frac{s\ln a}{\ln(s+1)}=\lim_{s\to0}\frac{\ln a}{\frac{\ln(s+1)}{s}}=\ln a$$

46) ④

[출제의도] 삼각형과 내접원의 성질을 이용하여 삼각함수의 극한 문제를 해결한다.

삼각형 OAP가 이등변삼각형이므로

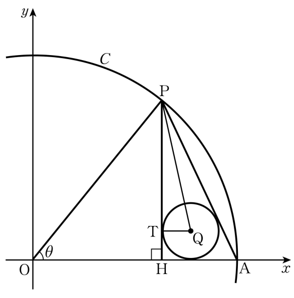
$\angle\mathrm{OAP}=\angle\mathrm{OPA}=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$ 이고

삼각형 APH에서

$\angle\mathrm{APH}+\angle\mathrm{PAH}=\frac{\pi}{2}$ 이므로 $\angle\mathrm{APH}=\frac{\theta}{2}$ 이다.

내접원의 중심을 Q라 하고, 내접원과 선분 PH의 교점을 T라 하면

$\angle\mathrm{QPT}=\frac{\theta}{4}$ 이다.



$\overline{\mathrm{PH}}=\sin\theta$이므로 삼각형 QPT에서

$\tan\frac{\theta}{4}=\frac{\overline{\mathrm{QT}}}{\overline{\mathrm{PT}}}=\frac{r(\theta)}{\sin\theta-r(\theta)}$

$\left(1+\tan\frac{\theta}{4}\right)r(\theta)=\sin\theta\tan\frac{\theta}{4}$

이므로

$$r(\theta)=\frac{\sin\theta\tan\frac{\theta}{4}}{1+\tan\frac{\theta}{4}}$$

따라서

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{r(\theta)}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta\tan\frac{\theta}{4}}{\theta^2\left(1+\tan\frac{\theta}{4}\right)}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{\tan\frac{\theta}{4}}{\frac{\theta}{4}}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{\left(1+\tan\frac{\theta}{4}\right)}\right\}$$

$$=1\times1\times\frac{1}{4}\times1=\frac{1}{4}$$

[다른풀이]

내접원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$라 하면

$\triangle\mathrm{APH}=\frac{1}{2}\times(\triangle\mathrm{APH}$의 둘레의 길이$)\times r(\theta)$

$\triangle\mathrm{APH}=\frac{1}{2}r(\theta)(\overline{\mathrm{PH}}+\overline{\mathrm{AH}}+\overline{\mathrm{AP}})=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AH}}\times\overline{\mathrm{PH}}$

따라서

$$\frac{\sin\theta+(1-\cos\theta)+2\sin\frac{\theta}{2}}{2}\times r(\theta)=\frac{1}{2}\sin\theta\times(1-\cos\theta)$$

$$\frac{1}{2}\left(2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}+2\sin^2\frac{\theta}{2}+2\sin\frac{\theta}{2}\right)r(\theta)$$

$$=\frac{1}{2}\times2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}(1-\cos\theta)$$

따라서 $\left(\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}+1\right)r(\theta)=(1-\cos\theta)\cos\frac{\theta}{2}$

$r(\theta)=\dfrac{(1-\cos\theta)\cos\frac{\theta}{2}}{1+\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}}$ 이므로

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{r(\theta)}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0+}\frac{(1-\cos\theta)\cos\frac{\theta}{2}}{\theta^2\left(1+\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\right)}$$

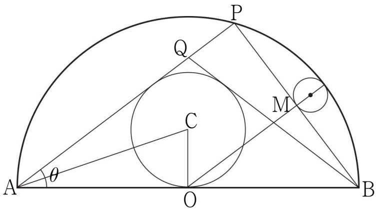
$$=\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{1+\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}}\times\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}\times\frac{1}{1+\cos\theta}\right\}$$

$$=\frac{1}{1+1+0}\times1^2\times\frac{1}{1+1}=\frac{1}{4}$$

47) 4

[출제의도] 삼각함수의 극한을 활용하여 문제해결하기

그림과 같이 선분 AB의 중점을 O,
선분 PB와 호 PB에 접하는 원의 반지름의 길이를 r_1,
삼각형 ABQ에 내접하는 원의 중심을 C,
반지름의 길이를 r_2라 하자.



$\angle\mathrm{MOB}=\theta$이고 $\overline{\mathrm{OB}}=1$이므로 $\overline{\mathrm{OM}}=\cos\theta$

$\therefore\ r_1=\frac{1-\cos\theta}{2}$, $S(\theta)=\pi\left(\frac{1-\cos\theta}{2}\right)^2$

삼각형 CAO는 $\angle\mathrm{AOC}=90^\circ$인 직각삼각형이고

$\angle\mathrm{CAO}=\frac{\theta}{2}$, $\overline{\mathrm{OA}}=1$

$\therefore\ r_2=\tan\frac{\theta}{2}$, $T(\theta)=\pi\tan^2\frac{\theta}{2}$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta^2\times T(\theta)}{S(\theta)}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta^2\times\pi\tan^2\frac{\theta}{2}}{\pi\left(\frac{1-\cos\theta}{2}\right)^2}$$

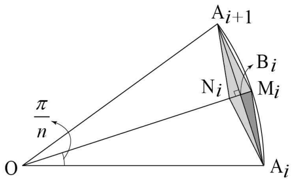
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{4\theta^2\times\tan^2\frac{\theta}{2}}{(1-\cos\theta)^2}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left\{4\times\frac{\theta^4}{\sin^4\theta}\times\frac{1}{4}\times\frac{\tan^2\frac{\theta}{2}}{\left(\frac{\theta}{2}\right)^2}\times(1+\cos\theta)^2\right\}$$

$$=4\times\frac{1}{4}\times4=4$$

48) ①

[출제의도] 삼각함수의 극한값 추론하기



선분 $\mathrm{M}_i\mathrm{N}_i$의 중점을 B_i라 하면 $\angle\mathrm{A}_i\mathrm{OM}_i=\frac{\pi}{n}$ 이므로

$\overline{\mathrm{A}_i\mathrm{B}_i}=\sin\frac{\pi}{n}$, $\overline{\mathrm{B}_i\mathrm{M}_i}=1-\overline{\mathrm{OB}_i}=1-\cos\frac{\pi}{n}$

$\square\mathrm{A}_i\mathrm{M}_i\mathrm{A}_{i+1}\mathrm{N}_i=4\times\triangle\mathrm{A}_i\mathrm{M}_i\mathrm{B}_i=4\times\frac{1}{2}\times\sin\frac{\pi}{n}\times\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$

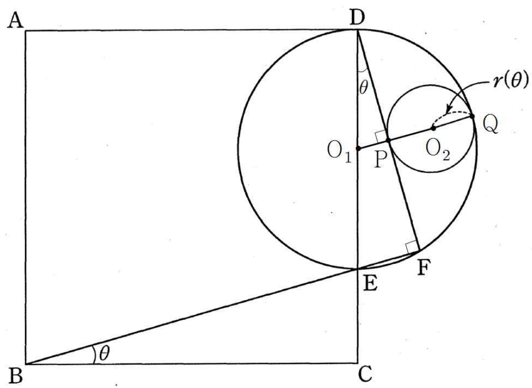
$S_n=n\times\square\mathrm{A}_i\mathrm{M}_i\mathrm{A}_{i+1}\mathrm{N}_i=2n\sin\frac{\pi}{n}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$

$$n^2\times S_n=2n^3\sin\frac{\pi}{n}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)=2\pi^3\times\frac{\sin\frac{\pi}{n}\left(1-\cos^2\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi^3}{n^3}\left(1+\cos\frac{\pi}{n}\right)}$$

$$=2\pi^3\left\{\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\times\frac{\sin^2\frac{\pi}{n}}{\left(\frac{\pi}{n}\right)^2}\times\frac{1}{1+\cos\frac{\pi}{n}}\right\}$$

따라서 $\lim_{n\to\infty}(n^2\times S_n)=\pi^3$

49) ④



선분 DE를 지름으로 하는 원의 중심을 O_1, 선분 DF의 중점을 P,
점 E를 포함하지 않는 호 DF를 이등분하는 점을 Q라 하고,
선분 PQ를 지름의 양 끝점으로 하는 원의 중심을 O_2라 하자.
직각삼각형 BCE에서 선분 BC 길이가 1이고 각 EBC가 θ 이므로
선분 CE의 길이는 $\tan\theta$이다.
따라서 선분 DE의 길이가 $1-\tan\theta$이므로

선분 DO_1의 길이는 $\frac{1}{2}(1-\tan\theta)$ 이다.

한편, 각 EDF의 크기가 θ이므로

선분 O_1P의 길이는 $\frac{1}{2}(1-\tan\theta)\sin\theta$이다.

그러므로

$$r(\theta)=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}(1-\tan\theta)-\frac{1}{2}(1-\tan\theta)\sin\theta\right\}=\frac{1}{4}(1-\tan\theta)(1-\sin\theta)$$

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{r(\theta)}{\frac{\pi}{4}-\theta}=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{\frac{1}{4}(1-\tan\theta)(1-\sin\theta)}{\frac{\pi}{4}-\theta}$$ 에서

$t=\frac{\pi}{4}-\theta$ 로 치환하면

$$\lim_{t\to0+}\frac{\frac{1}{4}\left(1-\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right)\left(1-\sin\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right)}{t}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{\frac{1}{4}\left(1-\frac{1-\tan t}{1+\tan t}\right)\left(1-\sin\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right)}{t}$$

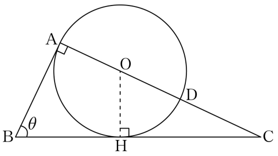
$$=\lim_{t\to0+}\frac{\frac{1}{4}\left(\frac{2\tan t}{1+\tan t}\right)\left(1-\sin\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right)}{t}$$

$$=\frac{1}{4}\times2\times\frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

$$=\frac{1}{4}(2-\sqrt{2})$$

50) 25

[출제의도] 도형의 성질을 이용하여 함수의 극한값을 추론한다.



선분 AD의 중점 O는 원의 중심이고, 점 O에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{AB}=\overline{BH}=\cos\theta$이므로 $\overline{CH}=1-\cos\theta$

$\overline{CA}=\sin\theta$이고 $\overline{CH}^2=\overline{CA}\times\overline{CD}$ 이므로

$(1-\cos\theta)^2=\sin\theta\times\overline{CD}$, $\overline{CD}=\frac{(1-\cos\theta)^2}{\sin\theta}$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\overline{CD}}{\theta^3}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{(1-\cos\theta)^2}{\sin\theta}}{\theta^3}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{(1-\cos\theta)^2(1+\cos\theta)^2}{\theta^3\sin\theta(1+\cos\theta)^2}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{(1-\cos^2\theta)^2}{\theta^3\sin\theta(1+\cos\theta)^2}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sin^3\theta}{\theta^3}\times\frac{1}{(1+\cos\theta)^2}\right)=\frac{1}{4}$$

따라서 $k=\frac{1}{4}$ 이므로 $100k=25$

51) ③

[출제의도] 도형에서 함수의 극한을 이해하여 관련 문항을 해결할 수 있다.

P는 접점이므로 $\angle APS=\frac{\pi}{2}$

$\overline{AP}=\overline{AC}=2\sqrt{5}$ 이고 $\angle APS=\frac{\pi}{2}$ 이므로

$\overline{AS}=\frac{2\sqrt{5}}{\cos\theta}$

$\overline{CS}=\overline{AS}-\overline{AC}=\frac{2\sqrt{5}}{\cos\theta}-2\sqrt{5}=2\sqrt{5}\left(\frac{1}{\cos\theta}-1\right)$

삼각형 ARP와 삼각형 ARC는 합동이므로

$\overline{RC}=2\sqrt{5}\tan\frac{\theta}{2}$

$\overline{QC}=2\sqrt{5}\tan\theta$ 이고 $\overline{RC}=2\sqrt{5}\tan\frac{\theta}{2}$ 이므로

$\overline{QR}=\overline{QC}-\overline{RC}$

$=2\sqrt{5}\tan\theta-2\sqrt{5}\tan\frac{\theta}{2}$

$=2\sqrt{5}\left(\tan\theta-\tan\frac{\theta}{2}\right)$

$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{QR}\times\overline{CS}$

$=\frac{1}{2}\times2\sqrt{5}\left(\tan\theta-\tan\frac{\theta}{2}\right)\times2\sqrt{5}\left(\frac{1}{\cos\theta}-1\right)$

$=10\left(\tan\theta-\tan\frac{\theta}{2}\right)\times\left(\frac{1}{\cos\theta}-1\right)$

따라서

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}$$

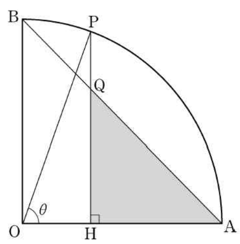
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{10\left(\tan\theta-\tan\frac{\theta}{2}\right)\left(\frac{1}{\cos\theta}-1\right)}{\theta^3}$$

$$=10\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{\tan\theta-\tan\frac{\theta}{2}}{\theta}\times\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\theta^2\cos\theta(1+\cos\theta)}\right\}$$

$$=10\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

52) ①

[출제의도] 삼각함수를 이용하여 도형의 넓이를 나타내고, 그 극한값을 구할 수 있는가?



$\overline{OH}=\cos\theta$이므로

$\overline{HA}=1-\cos\theta$

직각삼각형 OAB에서

$\overline{OA}=\overline{OB}$이므로

$\angle OAB=\angle OBA\cdots$ ㉠

이때, 선분 OB와 선분 PH가 평행이므로

$\angle OBA=\angle HQA\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$\angle HAQ=\angle HQA$이므로 직각삼각형 HAQ에서

$\overline{\mathrm{HA}} = \overline{\mathrm{HQ}}$

그러므로 삼각형 AQH의 넓이 $S(\theta)$는

$$S(\theta) = \frac{(1-\cos\theta)^2}{2}$$

$$\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^4}$$

$$= \lim_{\theta \to 0+} \frac{(1-\cos\theta)^2}{2\theta^4}$$

$$= \lim_{\theta \to 0+} \frac{(1-\cos\theta)^2(1+\cos\theta)^2}{2\theta^4(1+\cos\theta)^2}$$

$$= \lim_{\theta \to 0+} \frac{1}{2(1+\cos\theta)^2} \times \lim_{\theta \to 0+} \frac{\sin^4\theta}{\theta^4}$$

$$= \frac{1}{2 \times 2^2} \times 1^4 = \frac{1}{8}$$

휴~ 수고하셨습니다!

너무 쉽지만 자칫하면 멘탈이 깨질 수도 도형을 이용한 극한이었습니다.

안풀리면 넘어가고! 멘탈 꼭 잡도록 합시다.

혹시라도 찍을 때는 $\frac{1}{2}$ $\sqrt{2}$ $\sqrt{3}$이라는 숫자가 나올 수 있는 각이나
상황인지라도 생각해서 찍어주세요~