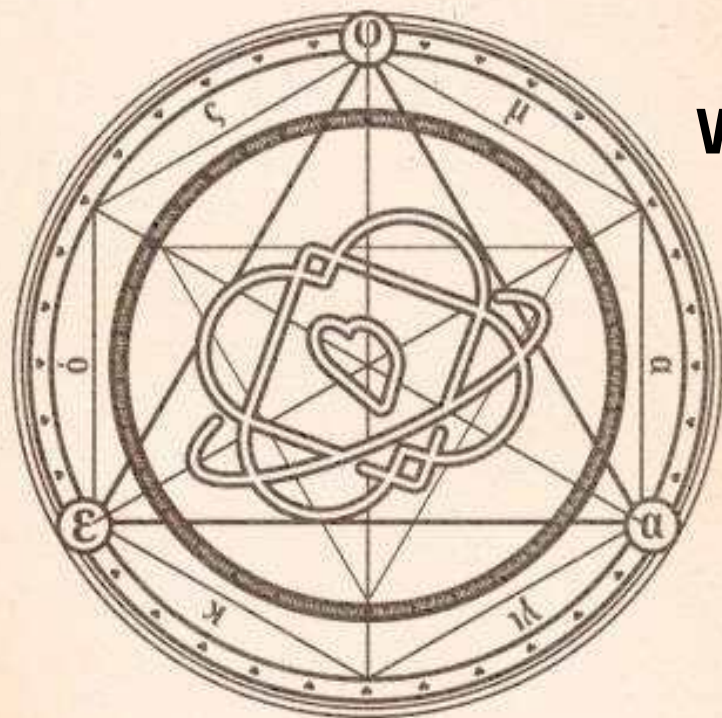


우주설 수학자료
사관학교 선별 69제

WJSN

Dream your dream



ver.2018

2018.02.27
Coming Soon

by 우주설

목차

1.미적2 (31제)

2.확통 (16제)

3.기백 (22제)

ALL 주관식입니다.

미적 II

1. 함수 $f(x) = \int_1^x e^{t^2} dt$ 에 대하여 $\int_0^1 xf(x)dx$ 의 값은?

1) [4점]

2. 지수함수 $f(x) = a^x$ ($0 < a < 1$)의 그래프가 직선 $y = x$ 와 만나는 점의 x 좌표를 b 라 하자. 함수

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x \leq b) \\ f^{-1}(x) & (x > b) \end{cases}$$

- 가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, ab 의 값은? [4점]
2)

3. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0) = 0, f'(0) = 1$

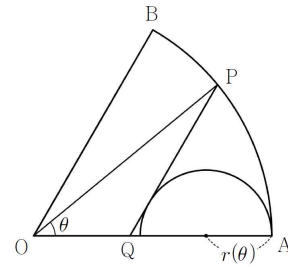
(나) 모든 실수 x, y 에 대하여

$$f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)} \text{ 이다.}$$

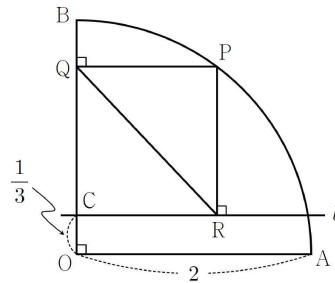
- $f(-1) = k$ ($-1 < k < 0$)일 때, $\int_0^1 \{f(x)\}^2 dx$ 의 값을 k 에 대한 식으로 나타내시오. [주의] 3)

4. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$ 인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P를 지나고 선분 OB와 평행한 직선이 선분 OA와 만나는 점을 Q라 하고 $\angle AOP = \theta$ 라 하자. 점 A를 지름의 한 끝점으로 하고 지름이 선분 AQ 위에 있으며 선분 PQ에 접하는 반원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$ 라 할 때, $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{r(\theta)}{\theta}$ 의 값을 구하시오. 4)

(단, $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$ 이다.) [4점]



5. 그림과 같이 반지름의 길이가 2이고 중심각의 크기가 90° 인 부채꼴 OAB가 있다. 선분 OB 위에 $\overline{OC} = \frac{1}{3}$ 인 점 C를 잡고, 점 C를 지나고 선분 OA와 평행한 직선을 l 이라 하자. 호 AB 위의 움직이는 점 P에서 선분 OB와 직선 l 에 내린 수선의 발을 각각 Q, R라 할 때, 삼각형 PQR의 넓이의 최댓값은? [4점] 5)



6. 함수

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \sin x & (x \leq 0) \\ -1 + \sin x & (x > 0) \end{cases}$$

에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고르시오. [4점] 6)

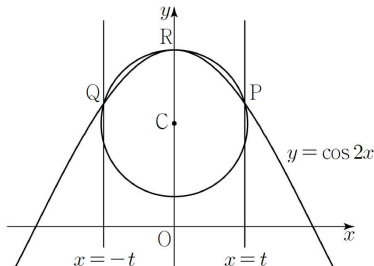
< 보 기 >

㉠. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)f(-x) = -1$

㉡. 함수 $f(f(x))$ 는 $x = \frac{\pi}{2}$ 에서 연속이다.

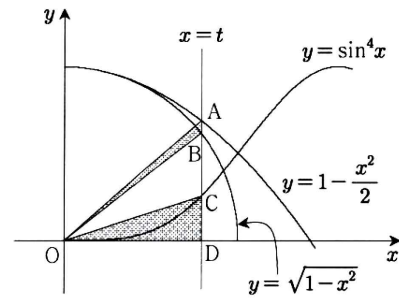
㉢. 함수 $\{f(x)\}^2$ 은 $x = 0$ 에서 미분가능하다.

7. 좌표평면에서 곡선 $y = \cos 2x$ 가 두 직선 $x = t$, $x = -t$ ($0 < t < \frac{\pi}{4}$)와 만나는 점을 각각 P, Q라 하고, 곡선 $y = \cos 2x$ 가 y 축과 만나는 점을 R라 하자. 세 점 P, Q, R를 지나는 원의 중심을 $C(0, f(t))$ 라 할 때, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(t) = \alpha$ 의 값을 구하시오. [4점] 7)

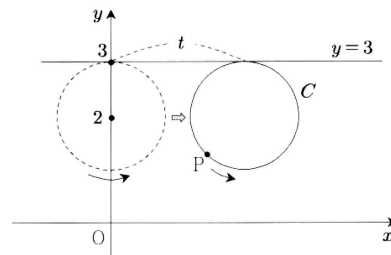


8. 그림과 같이 직선 $x = t$ ($0 < t < 1$)이 세 곡선 $y = 1 - \frac{x^2}{2}$,

$y = \sqrt{1 - x^2}$, $y = \sin^4 x$ 및 x 축과 만나는 점을 각각 A, B, C, D라 하자. 두 삼각형 AOB, COD의 넓이를 각각 S_1 , S_2 라 할 때, $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S_1}{S_2}$ 의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]



9. 좌표평면에 중심이 (0, 2)이고 반지름의 길이가 1인 원 C가 있고, 이 원 위의 점 P가 점 (0, 3)의 위치에 있다. 원 C는 직선 $y = 3$ 에 접하면서 x 축의 양의 방향으로 미끄러지지 않고 굴러간다. 그림은 원 C가 굴러간 거리가 t일 때, 점 P의 위치를 나타낸 것이다.



점 P가 나타내는 곡선을 F라 하자. $t = \frac{2}{3}\pi$ 일 때 곡선 F 위의 점에서의 접선의 기울기는? [현 수능과 멀지만 실력상승] 9)

10. 자연수 n 에 대하여 함수 $f(x) = x^n \ln x$ 의 최솟값을 $g(n)$ 이라 하자. $g(n) \leq -\frac{1}{6e}$ 을 만족시키는 모든 n 의 값의 합을 구하시오. [4점] 10)

11. 두 함수 $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{k}{x}$ ($k > 1$)에 대하여 좌표평면에서 직선 $x=2$ 가 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 곡선 $y=f(x)$ 에 대하여 점 P에서의 접선을 l , 곡선 $y=g(x)$ 에 대하여 점 Q에서의 접선을 m 이라 하자. 두 직선 l , m 이 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$ 일 때, 상수 k 의 값을 구하시오. [4점] 11)

12. 함수 $f(x) = -xe^{2-x}$ 과 상수 a 가 다음 조건을 만족시킨다.

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$ 라 할 때, $x < a$ 이면 $f(x) > g(x)$ 이고, $x > a$ 이면 $f(x) < g(x)$ 이다.

곡선 $y=f(x)$ 와 접선 $y=g(x)$ 및 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오. [4점] 12)

13. 함수 $f(x) = x \sin x$ 에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고르시오. [4점] 13)

< 보 기 >

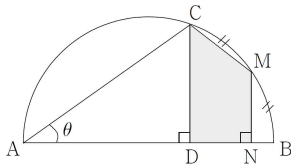
ㄱ. 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극솟값을 갖는다.
 ㄴ. 직선 $y=x$ 는 곡선 $y=f(x)$ 에 접한다.
 ㄷ. 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 극댓값을 갖는 a 가 구간 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi\right)$ 에 존재한다.

14. 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $0 \leq x < 1$ 일 때, $f(x) = e^x - 1$ 이다.
 (나) 모든 실수 x 에 대하여
 $f(x+1) = -f(x) + e - 1$ 이다.

$\int_0^3 f(x)dx$ 의 값은? [4점] 14)

15. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위를 움직이는 점 C가 있다. 호 BC의 길이를 이등분하는 점을 M이라 하고, 두 점 C, M에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 각각 D, N이라 하자. $\angle CAB = \theta$ 라 할 때, 사각형 CDNМ의 넓이를 $S(\theta)$ 라 하자. $\lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^3}$ 의 값을 구하시오. (단, 점 C는 선분 AB의 양 끝점이 아니다.) [4점] 15)



16. 모든 실수 x 에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 미분가능하기 위한 필요충분조건인 것만을 <보기>에서 있는 대로 고르시오. [4점] 16)

- < 보 기 >
 $\neg$. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h^2) - f(a)}{h^2}$ 의 값이 존재한다.
 $\neg$. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h^3) - f(a)}{h^3}$ 의 값이 존재한다.
 $\square$. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$ 의 값이 존재한다.

17. 닫힌 구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 에서 정의된 함수

$$f(x) = \frac{\sin 2x}{1 + \sin x}$$

에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고르시오. [4점] 17)

- < 보 기 >
 $\neg$. $f(x) \geq 0$
 $\neg$. $f'(c) = 0$ 인 c 가 열린 구간 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 에 존재한다.
 $\square$. 함수 $f(x)$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $2 - 2\ln 2$ 이다.

18. $x > 0$ 에서 정의된 함수 $f(x) = \frac{(\ln x)^6}{x^2}$ 에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고르시오.

18) (단, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^6}{x^2} = 0$ 이다.) [4점]

< 보 기 >

- ㄱ. $x = e^3$ 에서 극댓값을 갖는다.
 ㄴ. $x = e$ 에서 극솟값을 갖는다.
 ㄷ. $x > 0$ 에서 방정식 $f(x) = 1$ 의 실근의 개수는 3이다.

19. 세 다항함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1) = 1$, $g(1) = 2$

(나) 모든 실수 x , y 에 대하여

$$f(xy+1) = xg(y) + h(x+y) \text{이다.}$$

이때 $\int_0^3 \{f(x) + g(x) + h(x)\} dx$ 의 값을 구하시오.

19) [주의]

20. 함수 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 에 대하여 <보기>에 20)서 옳은 것만을 있는 대로 고르시오. [4점]

< 보 기 >

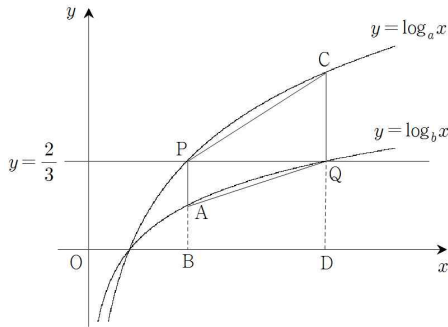
- ㄱ. 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $\frac{1}{e}$ 이다.
 ㄴ. $2011^{2012} > 2012^{2011}$
 ㄷ. 열린 구간 $(0, e)$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프는 위로 볼록하다.

21. 두 함수 $f(x) = [x]$, $g(x) = \sin \pi x$ 에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고르시오. (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [4점] 21)

< 보 기 >

- ㄱ. 함수 $f(x)g(x)$ 는 $x = 0$ 에서 연속이다.
 ㄴ. 함수 $(f \circ g)(x)$ 는 모든 정수에서 연속이다.
 ㄷ. 함수 $(g \circ f)(x)$ 는 모든 실수에서 연속이다.

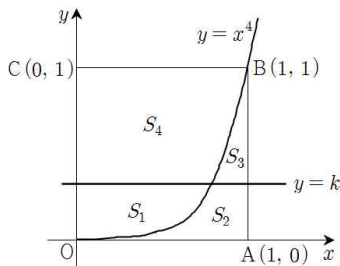
22. 그림과 같이 직선 $y = \frac{2}{3}$ 가 두 곡선 $y = \log_a x$, $y = \log_b x$ 와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 점 P를 지나고 x 축에 수직인 직선이 곡선 $y = \log_b x$ 와 x 축과 만나는 점을 A, B라 하고, 점 Q를 지나고 x 축에 수직인 직선이 곡선 $y = \log_a x$ 와 x 축과 만나는 점을 각각 C, D라 하자.



$\overline{PA} = \overline{AB}$ 이고, 사각형 PAQC의 넓이가 1일 때, 두 상수 a , b 의 곱 ab 의 값은? (단, $1 < a < b$ 이다.)

22) [4점]

23. 좌표평면 위에 네 점 $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(1, 1)$, $C(0, 1)$ 을 꼭짓점으로 하는 정사각형 OABC가 있다. 곡선 $y = x^4$ 과 직선 $y = k$ ($0 < k < 1$)에 의해 정사각형 OABC를 네 영역으로 나눌 때, 그림과 같이 네 영역의 넓이를 각각 S_1 , S_2 , S_3 , S_4 라 하자. 이때 $|S_1 - S_3| + |S_2 - S_4|$ 의 최솟값은? [4점] 23)



24. 다음은 서로 다른 두 점에서 만나는 두 곡선 $y = x^2$ 과 $y = ax^2 + bx + c$ 에 대하여 $d = b^2 - 4c(a-1)$ 이라 하고, 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S 라 할 때 $S = \frac{d\sqrt{d}}{6(a-1)^2}$ 임을 증명하는 과정이다. (단, $a \neq 0$ 이고 a , b , c 는 실수이다.)

[증명]

두 곡선 $y = x^2$ 과 $y = ax^2 + bx + c$ 가 서로 다른 두 점에서 만나므로

이차방정식 $(a-1)x^2 + bx + c = 0$ 은 서로 다른 두 실근 α , β 를 갖는다. 따라서 $a \neq 1$, $d > 0$ 이고 $\beta - \alpha = \boxed{\text{(가)}}$ ㉠

그런데 $\int_{\alpha}^{\beta} \{(a-1)x^2 + bx + c\} dx$

$$= \boxed{\text{(나)}} \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx$$

$$= \boxed{\text{(다)}} \dots\dots \text{㉡}$$

따라서 ㉠과 ㉡에 의해 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이 S 는

$$S = \boxed{\text{(다)}} = \frac{d\sqrt{d}}{6(a-1)^2}$$

위 증명에서 (가), (나), (다)에 들어갈 식으로 알맞은 것은? 24)

- | | (가) | (나) | (다) |
|---|--------------------------|-------|---------------------------------|
| ① | $\frac{\sqrt{d}}{ a-1 }$ | $1-a$ | $\frac{1-a}{6}(\beta-\alpha)^3$ |
| ② | $\frac{\sqrt{d}}{ a-1 }$ | $a-1$ | $\frac{a-1}{6}(\beta-\alpha)^3$ |
| ③ | $\frac{\sqrt{d}}{a-1}$ | $1-a$ | $\frac{a-1}{6}(\beta-\alpha)^3$ |
| ④ | $\frac{\sqrt{d}}{ a-1 }$ | $a-1$ | $\frac{1-a}{6}(\beta-\alpha)^3$ |
| ⑤ | $\frac{\sqrt{d}}{a-1}$ | $a-1$ | $\frac{1-a}{6}(\beta-\alpha)^3$ |

25. 좌표평면 위를 움직이는 점 P 의 시각 $t(t > 0)$ 에서의 위치 (x, y) 가 $x = t^3 + 2t$, $y = \ln(t^2 + 1)$ 이다.
 점 P 에서 직선 $y = -x$ 에 내린 수선의 발을 Q 라 하자.
 $t = 1$ 일 때, 점 Q 의 속력은? [유력]25)

26. 도함수가 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x) = -f(x)$ 이다.

(나) $f(\pi) = 0$

(다) $\int_0^\pi x^2 f'(x) dx = -8\pi$

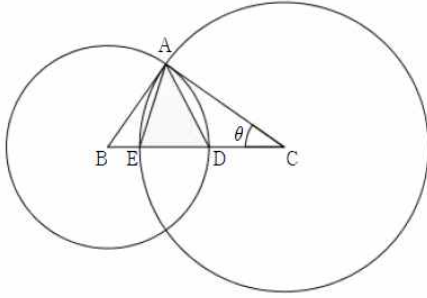
$\int_{-\pi}^\pi (x + \cos x) f(x) dx = k\pi$ 일 때, k 의 값을 구하시오.

[4점]26)

27. 함수 $f(x) = (x^3 - a)e^x$ 과 실수 t 에 대하여 방정식 $f(x) = t$ 의 실근의 개수를 $g(t)$ 라 하자. 함수 $g(t)$ 가 불연속인 점의 개수가 2가 되도록 하는 10 이하의 모든 자연수 a 의 값의 합을 구하시오. (단, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$) [4점]27)

28. 함수 $f(x) = x^3 + ax^2 - ax - a$ 의 역함수가 존재할 때, $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 하자. 자연수 n 에 대하여 $n \times g'(n) = 1$ 을 만족시키는 실수 a 의 개수를 a_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{27} a_n$ 의 값을 구하시오. [주의]28)

29. 그림과 같이 선분 BC 를 빗변으로 하고, $\overline{BC}=8$ 인 직각 삼각형 ABC 가 있다. 점 B 를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{AB}$ 인 원이 선분 BC 와 만나는 점을 D , 점 C 를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{AC}$ 인 원이 선분 BC 와 만나는 점을 E 라 하자. $\angle ACB=\theta$ 라 할 때, 삼각형 AED 의 넓이를 $S(\theta)$ 라 하자. $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{\theta^2}$ 의 값은? [4점]²⁹⁾



30. 함수 $f(x)=|x^2-x|e^{4-x}$ 이 있다. 양수 k 에 대하여 함수 $g(x)$ 를 $g(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x) \leq kx) \\ kx & (f(x) > kx) \end{cases}$ 라고 하자. 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 함수 $g(x)$ 가 미분가능하지 않은 x 의 개수를 $h(k)$ 라 할 때, $\langle$ 보기 $\rangle$ 에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [유력]³⁰⁾

— < 보 기 > —

- ㄱ. $k=2$ 일 때, $g(2)=4$ 이다.
 ㄴ. 함수 $h(k)$ 의 최댓값은 4이다.
 ㄷ. $h(k)=2$ 를 만족시키는 k 의 값의 범위는 $e^2 \leq k < e^4$ 이다.

31. 함수 $f(x)=\frac{x}{e^x}$ 에 대하여, $\frac{12}{e^{12}} \leq x$ 에서 정의된 함수

$$g(t)=\int_0^{12} |f(x)-t| dx$$

가 $t=k$ 에서 극솟값을 갖는다. 방정식 $f(x)=k$ 의 실근의 실근의 최솟값을 a 라 할 때, $g'(1)+\ln\left(\frac{6}{a}+1\right)$ 의 값을 구하시오. [위험]³¹⁾

확률과 통계

32. 같은 종류의 볼펜 6개, 같은 종류의 연필 6개, 같은 종류의 지우개 6개가 필통에 들어 있다. 이 필통에서 8개를 동시에 꺼내는 경우의 수는? (단, 같은 종류끼리는 서로 구별하지 않는다.) [4점] 32)

33. 주머니에 1, 2, 3, 4, 5, 6의 숫자가 하나씩 적혀 있는 6개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 차례로 꺼낸다. 꺼낸 3개의 공에 적힌 수의 곱이 짝수일 때, 첫 번째로 꺼낸 공에 적힌 수가 홀수이었을 확률을 구하시오. (단, 꺼낸 공은 다시 넣지 않는다.) [4점] 33)

34. 바닥에 놓여 있는 5개의 동전 중 임의로 2개의 동전을 선택하여 뒤집는 시행을 하기로 한다. 2개의 동전은 앞면이, 3개의 동전은 뒷면이 보이도록 바닥에 놓여있는 상태에서 이 시행을 3번 반복한 결과 2개의 동전은 앞면이, 3개의 동전은 뒷면이 보이도록 바닥에 놓여 있을 확률을 구하시오. (단, 동전의 크기와 모양은 모두 같다.) [4점] 34)

35. 정규분포를 따르는 두 연속확률변수 X , Y 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) E(X) = 10$$

$$(나) Y = 3X$$

$P(X \leq k) = P(Y \geq k)$ 를 만족시키는 상수 k 의 값은? [3점] 35)

36. 지호와 영수는 가위바위보를 한 번 할때마다 다음과 같은 규칙으로 사탕을 받는 게임을 한다.

(가) 이긴 사람은 2개의 사탕을 받고, 진 사람은 1개의 사탕을 받는다.

(나) 비긴 경우에는 두 사람 모두 1개의 사탕을 받는다.

게임을 시작하고 나서 지호가 받은 사탕의 총 개수가 5인 경우가 생길 확률을 구하시오. (단, 두 사람이 각각 가위, 바위, 보를 낼 확률은 같다.) [4점]

36)

37. 주머니 속에서 빨간 공 5개, 파란 공 5개가 들어있다. 이 주머니에서 5개의 공을 꺼낼 때, 꺼낸 공 중에서 더 많은 색의 공의 개수를 확률변수 X 라 하자. 예를 들어 꺼낸 공이 빨간 공 2개, 파란 공 3개이면 $X=3$ 이다. $Y=14X+14$ 라 할 때 확률변수 Y 의 평균을 구하시오. [4점] 37)

38. 어느 임업연구소의 A, B 두 연구원이 소나무 군락지의 소나무들의 성장 상태를 알아보기 위하여 100그루의 소나무들을 각각 a , b 그루로 나누어 키를 조사하였더니 다음 표와 같은 결과를 얻었다.

	표본의 크기	표준편차
A연구원	a 그루	3cm
B연구원	b 그루	4cm

A, B 두 연구원이 각자 95%의 신뢰도로 군락지의 소나무들의 키의 평균을 추정하였더니 신뢰구간의 길이가 같았다. 소나무들의 키의 분포는 정규분포를 따른다고 할 때, $|a-b|$ 의 값을 구하시오.

(단, 표준정규분포표에서 $P(0 \leq Z \leq 1.96) = 0.475$ 로 계산한다.)

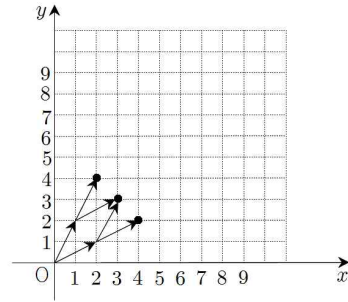
[4점] 38)

39. 좌표평면 위에서 점 P는 한 번의 이동으로 다음의 (규칙1) 또는 (규칙2)를 따라 이동한다.

(규칙1) x 축의 양의 방향으로 1만큼, y 축의 양의 방향으로 2만큼 이동한다.

(규칙2) x 축의 양의 방향으로 2만큼, y 축의 양의 방향으로 1만큼 이동한다.

예를 들어, 원점 O에 있는 점 P가 두 번의 이동으로 도달할 수 있는 곳을 표시하면 그림과 같다.

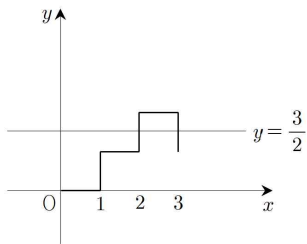


점 P가 (규칙1)을 따라 이동할 확률은 $\frac{1}{3}$ 이고 (규칙2)를 따라 이동할 확률은 $\frac{2}{3}$ 일 때, 위와 같은 규칙으로 점 P가 원점 O에서부터 다섯 번의 이동으로 점 (8, 7)에 도달할 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. 이때, 서로소인 두 자연수 p , q 의 합 $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, 매번 이동하는 사건은 서로 독립이다.) 39)

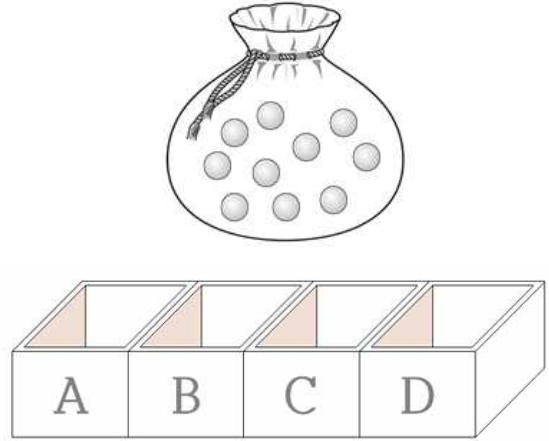
40. 좌표평면 위의 원점에 놓인 점 P 가 1개의 동전을 던질 때마다 다음과 같이 움직인다고 한다.

앞면이 나오면 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동하고,
 뒷면이 나오면 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한다.

예를 들어, 동전을 3번 던져서 차례로 앞면, 앞면, 뒷면이 나왔을 때 점 P 가 지나간 자취는 그림과 같고, 이 자취는 직선 $y = \frac{3}{2}$ 과 두 점에서 만난다. 동전을 5번 던질 때, 점 P 가 지나간 자취와 직선 $y = \frac{3}{2}$ 이 오직 한 점에서 만날 확률은?
 [4점] 40)



41. 그림과 같이 10개의 공이 들어있는 주머니와 일렬로 나열된 네 상자 A, B, C, D 가 있다. 이 주머니에서 2개의 공을 동시에 꺼내어 이웃한 두 상자에 각각 한 개씩 넣는 시행을 5회 반복할 때, 네 상자 A, B, C, D 에 들어있는 공의 개수를 각각 a, b, c, d 라 하자. 이때, a, b, c, d 의 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는? (단, 상자에 넣은 공은 다시 꺼내지 않는다.) [4점] 41)



42. 1부터 $(2n-1)$ 까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 $(2n-1)$ 장의 카드가 있다. 이 카드 중에서 임의로 서로 다른 3장의 카드를 택할 때, 택한 3장의 카드 중 짝수가 적힌 카드의 개수를 확률변수 X 라 하자. 다음은 $E(X)$ 를 구하는 과정이다. (단, n 은 4이상의 자연수이다.)

정수 $k(0 \leq k \leq 3)$ 에 대하여 확률변수 X 의 값이 k 일 확률은 짝수가 적혀있는 카드 중에서 k 장의 카드를 택하고, 홀수가 적혀있는 카드 중에서 $(\textcircled{2})-k$ 장의 카드를 택하는 경우의 수를 전체 경우의 수로 나눈 값이므로

$$P(X=0) = \frac{n(n-2)}{2(2n-1)(2n-3)}$$

$$P(X=1) = \frac{3n(n-1)}{2(2n-1)(2n-3)}$$

$$P(X=2) = \textcircled{1}$$

$$P(X=3) = \frac{(n-2)(n-3)}{2(2n-1)(2n-3)}$$

이다. 그러므로

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^3 \{k \times P(X=k)\} \\ &= \frac{\textcircled{2}}{2n-1} \end{aligned}$$

이다.

위의 $\textcircled{2}$ 에 알맞은 수를 a 라 하고, $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 에 알맞은 식을 각각 $f(n), g(n)$ 이라 할 때, $a \times f(5) \times g(8)$ 의 값은? [4점]42)

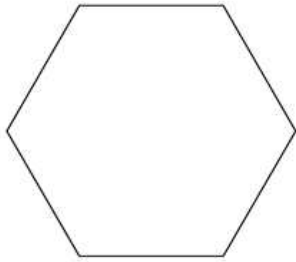
43. 자연수 n 에 대하여 한 개의 주사위를 반복하여 던져서 나오는 눈의 수에 따라 다음과 같은 규칙으로 a_n 을 정한다.

- (가) $a_1 = 0$ 이고, $a_n (n \geq 2)$ 는 세 수 $-1, 0, 1$ 중하나이다.
(나) 주사위를 n 번째 던져서 나온 눈의 수가 짝수이면 a_{n+1} 은 a_n 이 아닌 두 수 중에서 작은 수이고, 홀수이면 a_{n+1} 은 a_n 이 아닌 두 수 중에서 큰 수이다.

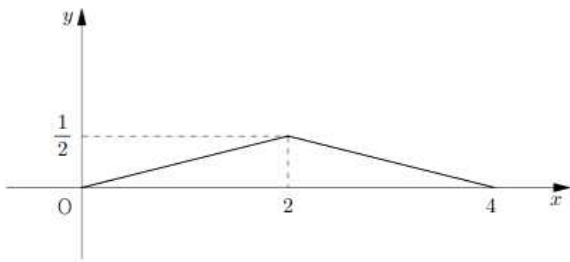
<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고르시오. [주의]43)

- < 보 기 >
- ㄱ. $a_2 = 1$ 일 확률은 $\frac{1}{2}$ 이다.
ㄴ. $a_3 = 1$ 일 확률과 $a_4 = 0$ 일 확률이 서로같다.
ㄷ. $a_9 = 0$ 일 확률이 p 이면 $a_{11} = 0$ 일 확률은 $\frac{1-p}{4}$ 이다.

44. 한 변의 길이가 1인 정육각형의 6개의 꼭짓점 중에서 임의로 서로 다른 3개의 점을 택하여 이 3개의 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형을 만들 때, 이 삼각형의 넓이를 확률변수 X 라 하자. $P\left(X \geq \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]⁴⁴⁾



45. 연속확률변수 X 가 갖는 값의 범위가 $0 \leq X \leq 4$ 이고, X 의 확률밀도 함수의 그래프는 그림과 같다. $1 < k < 2$ 일 때, $P(k \leq X \leq 2k)$ 가 최대가 되도록 하는 k 의 값은? [유력]⁴⁵⁾



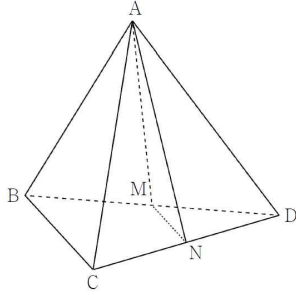
46. 주머니 속에 1, 2, 3, 4, 5의 수가 각각 하나씩 적힌 5개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내어 적힌 수를 확인하고 다시 집어넣는 시행을 한다. 이와 같은 시행을 25회 반복할 때, 꺼낸 3개의 공에 적힌 수들 중 두 수의 합이 나머지 한 수와 같은 경우가 나오는 횟수를 확률변수 X 라 하자. 확률변수 X^2 의 평균 $E(X^2)$ 의 값은?

46) [3점]

47. 1부터 11까지의 자연수가 하나씩 적혀있는 11장의 카드 중에서 임의로 두 장의 카드를 동시에 택할 때, 택한 카드에 적혀 있는 숫자를 각각 m, n ($m < n$)이라 하자. 좌표 평면 위의 세 점 $A(1, 0)$, $B\left(\cos \frac{m\pi}{6}, \sin \frac{m\pi}{6}\right)$, $C\left(\cos \frac{n\pi}{6}, \sin \frac{n\pi}{6}\right)$ 에 대하여 삼각형 ABC 가 이등변 삼각형일 확률이 $\frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]⁴⁷⁾

기하와 벡터

48. 그림과 같이 한 모서리의 길이가 12인 정사면체 ABCD에서 두 모서리 BD, CD의 중점을 각각 M, N이라 하자. 사각형 BCNM의 평면 AMN 위로의 정사영의 넓이는? [4점] 48)



49. 좌표공간에 평행한 두 평면

$$\alpha : 2x - y + 2z = 0$$

$$\beta : 2x - y + 2z = 6$$

의 위에 각각 점 $A(0, 0, 0)$, $B(2, 0, 1)$ 이 있다. 평면 α 위의 점 P와 평면 β 위의 점 Q에 대하여 $\overline{AQ} + \overline{QP} + \overline{PB}$ 의 최솟값은? [4점] 49)

50. 실수 t 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 점 P가 나타내는 도형의 둘레의 길이를 $f(t)$ 라 하자.

(가) 점 P는 구 $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ 위의 점이다.

(나) 점 $A(t+5, 2t+4, 3t-2)$ 에 대하여

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AP} = 0 \text{이다.}$$

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고르시오.

(단, O는 원점이다.) [4점] 50)

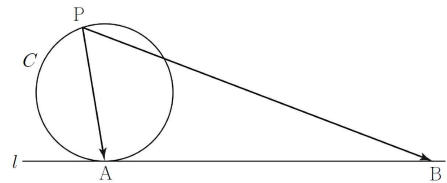
< 보 기 >

$$\neg. f(0) = \frac{20}{3}\pi$$

$$\neg. \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 10\pi$$

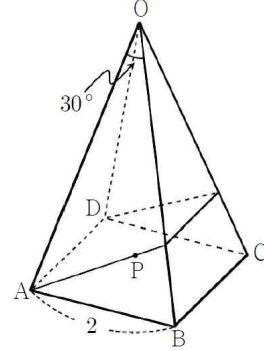
ㄷ. $f(t)$ 는 $t = -1$ 에서 최솟값을 갖는다.

51. 그림과 같이 반지름의 길이가 5인 원 C와 원 C 위의 점 A에서의 접선 l 이 있다. 원 C 위의 점 P와 $\overline{AB} = 24$ 를 만족시키는 직선 l 위의 점 B에 대하여 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 의 최댓값을 구하시오. [4점] 51)



52. 좌표공간에 평면 $z=1$ 위의 세 점 $A(1, -1, 1)$, $B(1, 1, 1)$, $C(0, 0, 1)$ 이 있다. 점 $P(2, 3, 2)$ 를 지나고 벡터 $\vec{d}=(a, b, 1)$ 과 평행한 직선이 삼각형 ABC 의 둘레 또는 내부를 지날 때, $|\vec{d}+3\overrightarrow{OA}|^2$ 의 최솟값을 구하시오. (단, O 는 원점이고 a, b 는 실수이다.) [주의] 52)

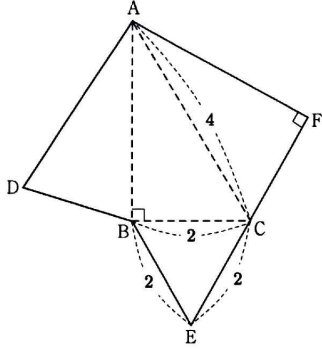
53. 그림과 같이 옆면은 모두 합동인 이등변삼각형이고 밑면은 한 변의 길이가 2인 정사각형인 사각뿔 $O-ABCD$ 에서 $\angle AOB=30^\circ$ 이다. 점 A 에서 출발하여 사각뿔의 옆면을 따라 모서리 OB 위의 한 점과 모서리 OC 위의 한 점을 거쳐 점 D 에 도착하는 최단경로를 l 이라 하자. l 위를 움직이는 점 P 에 대하여 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OP}$ 의 최댓값을 구하시오. [주의] 53)



54. 그림은 어떤 사면체의 전개도이다. 삼각형 BEC는 한 변의 길이가 2인 정삼각형이고,

$$\angle ABC = \angle CFA = 90^\circ, \overline{AC} = 4$$

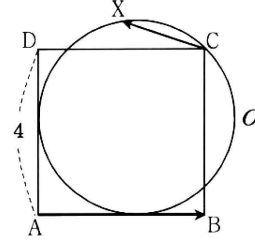
이다. 이 전개도로 사면체를 만들 때, 두 면 ACF, ABC가 이루는 예각의 크기를 θ 라 하자. $\cos\theta$ 의 값은? [4점] 54)



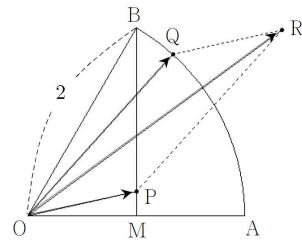
55. 좌표공간에서 구 $(x-6)^2 + (y+1)^2 + (z-5)^2 = 16$ 위의 점 P와 yz 평면 위에 있는 원 $(y-2)^2 + (z-1)^2 = 9$ 위의 점 Q 사이의 거리의 최댓값을 구하시오. [4점] 55)

56. 한 변의 길이가 4인 정사각형 ABCD에서 변 AB와 변 AD에 모두 접하고 점 C를 지나는 원을 O 라 하자. 원 O 위를 움직이는 점 X에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CX}$ 의 내적 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CX}$ 의 최댓값을 구하시오.

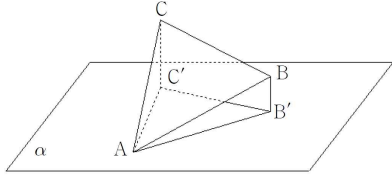
56) [4점]



57. 그림과 같이 반지름의 길이가 2이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$ 인 부채꼴 OAB에서 선분 OA의 중점을 M이라 하자. 점 P는 두 선분 OM과 BM 위를 움직이고, 점 Q는 호 AB 위를 움직인다. $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$ 를 만족시키는 점 R가 나타내는 영역 전체의 넓이는? [4점] 57)



58. 그림과 같이 평면 α 와 한 점 A에서 만나는 정삼각형 ABC가 있다. 두 점 B, C의 평면 α 위로의 정사영을 각각 B', C'이라 하자. $\overline{AB'} = \sqrt{5}$, $\overline{B'C'} = 2$, $\overline{C'A} = \sqrt{3}$ 일 때, 정삼각형 ABC의 넓이는? [4점] 58)



59. 좌표공간에 여섯 개의 점

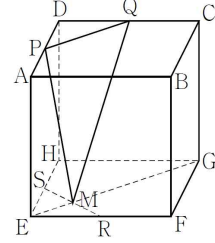
$$A(0, 0, 2), B(2, 0, 0), C(0, 2, 0) \\ D(-2, 0, 0), E(0, -2, 0), F(0, 0, -2)$$

를 꼭짓점으로 하는 정팔면체 ABCDEF가 있다. 이 정팔면체와 평면 $x+y+z=0$ 이 만나서 생기는 도형의 넓이를 S 라 할 때, S 의 값을 구하시오. [현 수능과 멀지만, 실력상승.]

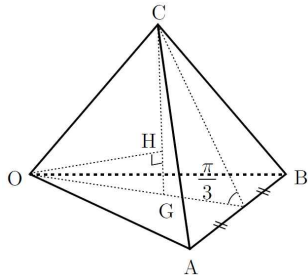
59)

60. 그림과 같은 정육면체 ABCD-EFGH에서 네 모서리 AD, CD, EF, EH의 중점을 각각 P, Q, R, S라고 하고, 두 선분 RS와 EG의 교점을 M이라 하자. 평면 PMQ와 평면 EFGH가 이루는 예각의 크기를 θ 라 할 때, $\tan^2\theta + \sec^2\theta$ 의 값을 구하시오.

60) [4점]

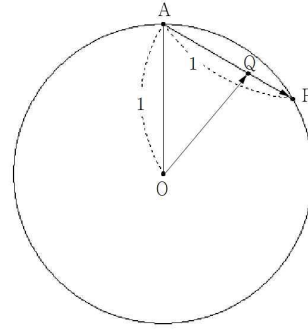


61. 그림과 같이 사면체 OABC에서 삼각형 OAB와 삼각형 CAB는 모두 정삼각형이고, 삼각형 OAB와 삼각형 CAB가 이루는 이면각의 크기는 $\frac{\pi}{3}$ 이다. 정삼각형 OAB의 무게중심을 G, 점 O에서 선분 CG에 내린 수선의 발을 H라 하자.



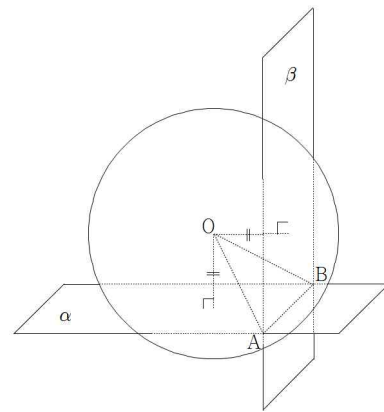
$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ 라 할 때, $\overrightarrow{OH} = p\vec{a} + q\vec{b} + r\vec{c}$ 를 만족시키는 세 상수 p , q , r 에 대하여 $p+q+r$ 의 값을 구하시오.
[현 수능과 멀지만, 실력상승.] 61)

62. 중심이 O이고 반지름의 길이가 1인 구 위에 고정된 점 A가 있고, $\overline{AP}=1$ 을 만족시키면서 이 구 위를 움직이는 점 P가 있다. 이때, 선분 AP 위의 점 Q가 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{OQ} \geq 0$ 을 만족시킬 때, 점 Q가 존재하는 영역의 넓이는 $\frac{q}{p}\sqrt{3}\pi$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p , q 는 서로소인 자연수이다.) [4점] 62)



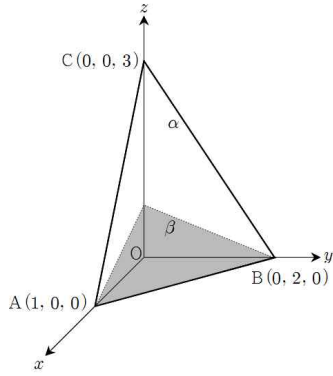
63. 중심이 O이고 반지름의 길이가 1인 구와, 점 O로부터 같은 거리에 있고 서로 수직인 두 평면 α , β 가 있다. 그림과 같이 두 평면 α , β 의 교선이 구와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 삼각형 OAB가 정삼각형일 때, 점 O와 평면 α 사이의 거리는? [4점]

63)

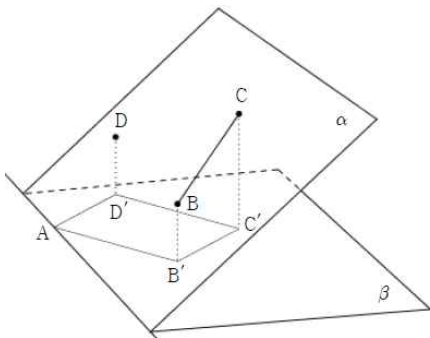


64. 좌표공간에서 세 점 $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(0, 0, 3)$ 을 지나는 평면을 α 라 하자. 그림과 같이 평면 α 와 xy 평면의 이면각 중에서 예각인 것을 이등분하면서 선분 AB 를 포함하는 평면을 β 라 할 때, 평면 β 가 z 축과 만나는 점의 y 좌표는? [4점]

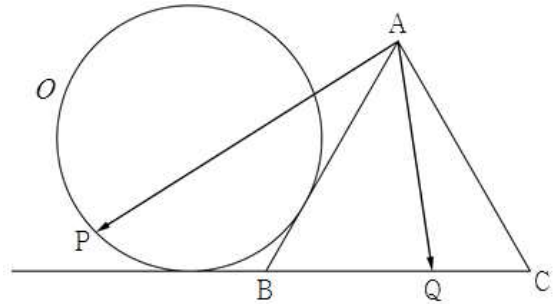
64)



65. 그림과 같이 서로 다른 두 평면 α, β 의 교선 위에 점 A 가 있다. 평면 α 위의 세 점 B, C, D 의 평면 β 위로의 정사영을 각각 B', C', D' 이라 할 때, 사각형 $AB'C'D'$ 은 한 변의 길이가 $4\sqrt{2}$ 인 정사각형 이고, $\overline{BB'} = \overline{DD'}$ 이다. 두 평면 α 와 β 가 이루는 각의 크기를 θ 라 할 때, $\tan\theta = \frac{3}{4}$ 이다. 선분 BC 의 길이는? (단, 선분 BD 와 평면 β 는 만나지 않는다.) [4점] 65)



66. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정삼각형 ABC 와 반지름의 길이가 1이고 선분 AB 와 직선 BC 에 동시에 접하는 원 O 가 있다. 원 O 위의 점 P 와 선분 BC 위의 점 Q 에 대하여 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ}$ 의 최댓값과 최솟값의 합은 $a+b\sqrt{3}$ 이다. a^2+b^2 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 유리수 이고, 원 O 의 중심은 삼각형 ABC 의 외부에 있다.) [주의] 66)



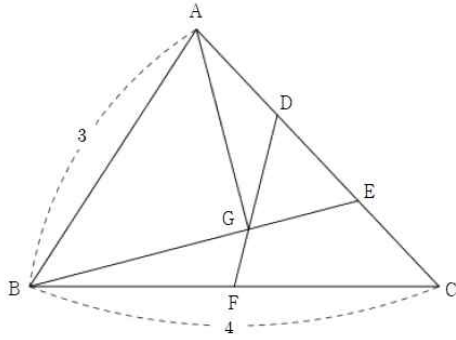
67. 좌표평면에서 점 $A(0, 12)$ 와 양수 t 에 대하여 점 $P(0, t)$ 와 점 Q 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$

(나) $\frac{t}{3} \leq |\overrightarrow{PQ}| \leq \frac{t}{2}$

$6 \leq t \leq 12$ 에서 $|\overrightarrow{AQ}|$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, Mm 의 값은? [유력] 67)

68. 그림과 같이 $\overline{AB}=3, \overline{BC}=4$ 인 삼각형 ABC 에서 선분 AC 를 1:2로 내분하는 점을 D , 2:1로 내분하는 점을 E 라 하자. 선분 BC 의 중점을 F 라 하고, 두 선분 BE, DF 의 교점을 G 라 하자. $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BE} = 0$ 일 때, $\cos(\angle ABC) = \frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [위험] 68)



69. 좌표공간에 평면 $\alpha: 2x + y + 2z - 9 = 0$ 과

구 $S: (x-4)^2 + (y+3)^2 + z^2 = 2$ 가 있다. $|\overrightarrow{OP}| \leq 3\sqrt{2}$ 인 평면 α 위의 점 P 와 구 S 위의 점 Q 에 대하여, $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ 의 최댓값이 $a+b\sqrt{2}$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하시오. (단, 점 O 는 원점이고, a, b 는 유리수이다.) [4점] 69)

$$1) \frac{1-e}{6}$$

$$2) e^{-e-1} \\ (a=e^{-e}, b=\frac{1}{e})$$

$$3) 1+k$$

$$4) 2-\sqrt{3}$$

$$5) \frac{7\sqrt{7}}{24}$$

$$6) \neg, \perp$$

$$7) \frac{3}{4}$$

$$8) \frac{1}{8}$$

$$9) -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$10) 21 \\ (n \leq 6)$$

$$11) \frac{20}{3}$$

$$12) 9-e^2$$

$$13) \neg, \perp, \sqsubset$$

$$14) 2e-3$$

$$15) \frac{9}{4}$$

$$(S(\theta) = -\frac{1}{2} \sin \theta (2 \cos \theta + 1)^2 (\cos \theta - 1))$$

$$16) \perp$$

$$17) \neg, \perp, \sqsubset$$

$$18) \neg, \sqsubset$$

$$19) 18$$

$$20) \neg, \perp, \sqsubset$$

$$21) \neg, \sqsubset$$

$$22) 16\sqrt{2}$$

$$23) \frac{3}{5}$$

$$24) \textcircled{5}$$

$$25) 2\sqrt{2}$$

$$26) 8$$

$$27) 49$$

$$28) 30$$

$$29) 32$$

$$30) \neg, \perp$$

$$31) 18$$

$$32) 36$$

$$33) \frac{9}{19}$$

$$34) \frac{78}{125}$$

$$35) 15$$

$$36) \frac{182}{3^5}$$

$$37) 59$$

$$38) 28$$

$$39) 323 \\ (\text{확률} : \frac{80}{243})$$

$$40) \frac{5}{32}$$

$$41) 21$$

$$42) \frac{45}{2}$$

$$43) \neg, \perp$$

$$44) 17$$

$$45) \frac{8}{5}$$

$$46) 106$$

$$47) 68$$

$$48) \frac{27\sqrt{11}}{11}$$

$$(\square \text{BCNM} = 27\sqrt{3}, \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{33}})$$

$$49) \sqrt{37}$$

$$50) \neg, \perp$$

$$51) 180$$

$$52) 32$$

$$53) 2\sqrt{3}-2$$

$$54) \frac{1}{3}$$

$$55) 14$$

$$56) 48-32\sqrt{2}$$

$$57) 2\sqrt{3}$$

$$58) \frac{1+2\sqrt{3}}{2}$$

$$59) 3\sqrt{3}$$

$$60) 9$$

$$(\tan \theta = 2\sqrt{2}, \sec \theta = 3)$$

$$61) \frac{5}{7}$$

$$(p = \frac{2}{7}, q = \frac{2}{7}, r = \frac{1}{7})$$

$$62) 11$$

$$63) \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$64) \frac{2}{3}$$

$$65) \sqrt{41}$$

$$66) 40$$

$$67) 18\sqrt{2}$$

$$68) 37$$

$$69) 21$$