『설아덕후의 테마별 수학칼럼』

역함수편

<역함수, 너무 식으로만 하는건 아니니?>

by우주설

안녕하세요. 우주설입니다.
전환함수에 이어서 이번에 알아볼 주제는 역함수입니다.
이번 칼럼도 일단은 문이과 공통 칼럼 되겠습니다!

사실 저의 모든 칼럼이 그렇지만 그 주제에서 제가 중요하다고 생각하는 부분을
평가원의 의도를 반영하여 분석하는 것이 주된 내용입니다.

그 중에서도! 이번에 다루는 역함수 부분은 제가 중요하다고 생각하는 부분이 어찌 보면
좀 개성적입니다. 어떻게 보면, 이번수능에 이 유형 나온다! 이런 식의 칼럼이 될 수도 있지만
최대한 말 하고자 하는 부분이 잘 전달이 되어 도움이 될 수 있게 써보겠습니다!
전환함수 편을 안읽으신 분들은 전환함수 편도 꼭 읽어주세요!

자 본격적으로! 알아볼까요?

역함수가 뭘까요?
①정의역과 치역을 바꾼 함수? 아니면 ②$y=x$에 대하여 대칭인 함수? 둘 다 맞는 말입니다.

그러면 아주 뻔한거 하나 물어볼까요?
지금부터는 혼잣말로 라도 대답을 하면서 칼럼을 읽어주세요.

질문하겠습니다. 실수 전체의 집합에서 미분 가능한 함수 $y=f(x)$의 역함수 존재 조건은 뭐죠?

에이, 너무 쉽다 구요? 함수가 일대일대응이면 된다?
$f'(x)\le 0$이거나 $f'(x)\ge 0$인 증가함수 또는 감소함수 이면 된다? 뭐 이렇게들 대답을 합니다!
맞아요 맞는 말이에요.

그런데 당신이 원래 역함수는 증가함수이거나 감소함수여야 존재해! 라고 외운 **원래족** 이라면?
맞는 말에 수능 때 실컷 얻어맞게 될 겁니다.

그런데 본인이 역함수 공부한지 오래되기도 했고 애매해서 원래족인지 아닌지 모르겠다구요?

그래서 제가 점점문제를 준비했습니다.
바로 풀어보실까요?

실수 전체의 집합에서 미분 가능한 함수 $y=f(x)$의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭시킨 그래프의 함수 $y=g(x)$가 존재할 조건 은 '전체 구간에서 $f'(x) \geq 0$이거나 $f'(x) \leq 0$ 여야 한다.

이다 그렇다면 이 $y=f(x)$의 그래프를 직선 $y=\sqrt{3}x$에 대하여 대칭시킨 그래프의 함수 $y=h(x)$가 존재할 조건을 서술하시오.

자 다들 어떤가요? 답이 나오시나요? 아니면 뭔가 알 것도 같은데 어렵나요?

못 푸신 분들은 역함수 존재조건은 '전체 구간에서 $f'(x) \geq 0$이거나 $f'(x) \leq 0$ 여야 한다.'에서 **왜 하필 0이라는 상수인지** 생각을 한번도 제대로 안해보신겁니다. 반성해야해요!

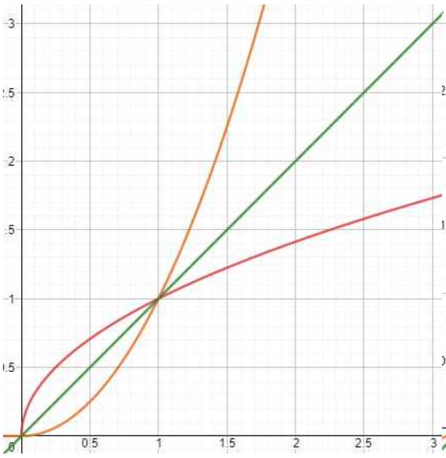
우선 푸신 분들을 위해 답을 알려드릴게요!

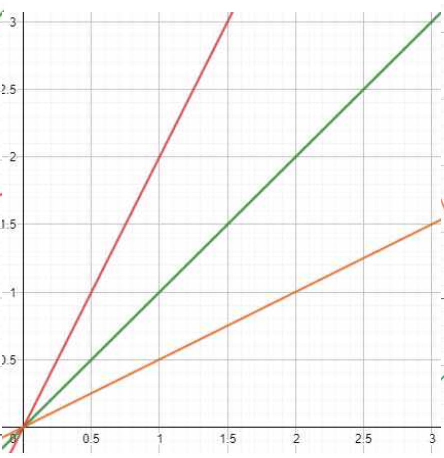
답은 '전체 구간에서 $f'(x) \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$이거나 $f'(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$ 여야 한다.'입니다.

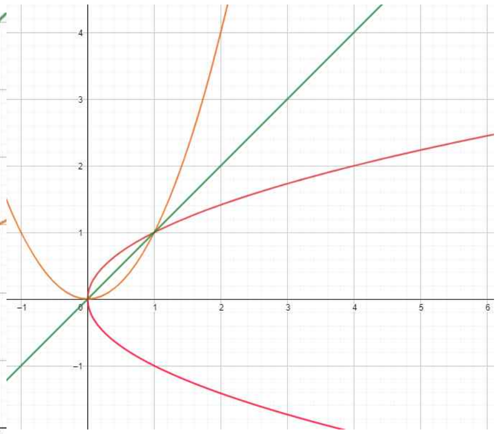
풀지 못하신 원래족 분들을 위해 이제 풀이를 시작해볼까요?

우선 수능수학에서 어떠한 문제를 접하더라도 상황파악을 위해서 그림을 그리는 것만큼 좋은 작업은 없습니다. 따라서 이 상황도 그림을 그려줘야 합니다.

먼저 역함수 존재조건에 대해서 알아보기위해 그림을 그려보겠습니다.

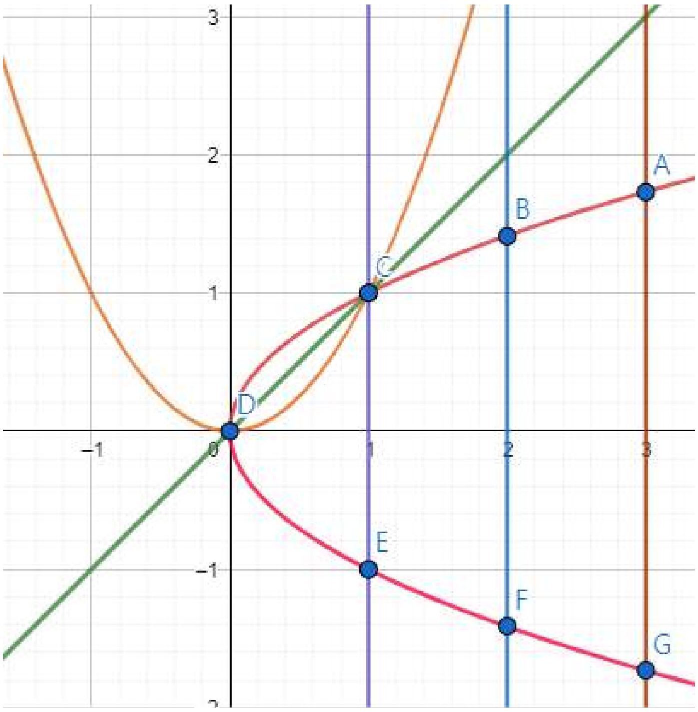

(가)


(나)


(다)

위 그림은 임의로 그린 3가지 함수의 그래프를 직접 $y=x$에 대하여 대칭시킨 그림입니다.
초록색이 $y=x$, 주황색이 원래함수, 빨간색이 대칭시킨 함수의 그래프입니다.
(가)~(다) 중에서 어떤게 역함수가 존재하지 않는것인지 보이나요? 그렇습니다 (다) 입니다.
여기서 역함수가 존재하지 않는 함수의, 존재하지 않는 이유에 대해서 알아낼 수 있습니다.

역함수도 결국에는 함수입니다. 함수가 정의되기위한 조건에서 생각하면 됩니다.
함수란? 하나의 정의역(x값)에 최대 하나의 치역(y값)이 대응해야만 합니다. 2개이상이 대응될 경우, 함수가 성립하지 않게 됩니다. (다) 그림이 그렇죠. 이해가 안되시면 아래 그림을!
x값 1에 대하여, 대응되는 y값이 1과 -1로 2개인게 보이시나요? 2일 때, 3일때도 마찬가지!



정리하자면 대칭시켰을 때, 하나의 x값에 2개이상의 y값이 대응하게 될 경우 함수가 성립하지 않게 되어서 역함수가 존재하지 않게된다. 라고 할 수 있겠네요.

그럼 위 그림을 좀더 자세히 분석하겠습니다. 그래프를 한번 그려본다 생각하고
점A로부터 $B, C, D \ldots G$까지 슥슥 그려볼까요?

분명히 A에서D까지 그릴때에는 빨각색 그래프는 하나의 x값에 2개이상의 y값이 대응하게 되는 경우가 없습니다. 함수가 되는거죠. 그런데 D에서E방향으로 그래프를 그리려고 조금이라도
선을 긋는순간 하나의 x값에 2개의 y값이 대응하게되는 경우가 생기는 것을 알 수 있습니다.

그래프가 점이 움직인 자취라는 발상으로 생각하자면, 자취의 x축에 대한 진행방향이 바뀌게 될

경우 함수가 아니게 되버린다는 생각을 할수 있습니다.

여기서 전환함수때 배운 **전환점과 의심점**이라는 개념을 도입해 보겠습니다.

빨간 그래프가 점이 A부터 G까지 움직인 자취라는 발상으로 생각하자면 어느 순간이 함수가 아니게 되버리는 전환점 일까요? 당연히 점D입니다. 자세하게 설명 해볼까요?

하나의 x값에 2개이상의 y값이 대응하려면, 그래프가 점이 움직인 자취라고 생각 하였을 때, 점이 움직이다가 x축에 대한 진행방향이 바뀔 필요가 있습니다. 한번 빈종이에다 그려보세요.

하나의 x값에 2개이상의 y값이 대응하는 그래프를 그리려 합니다! 점을 움직이듯이 그래프를 펜을 종에서 한번도 안 떨어트리고 그려보는 겁니다. x축에 대한 진행방향이 바뀌지 않고는 불가능 하다는 것을 금방 이해하실수 있을겁니다.

그러면 이 함수가 아니게 되버리는 전환점. 다른말로 하면 x축에 대한 진행방향이 바뀌는 점에

대하여 한번 알아보겠습니다.

x축에 대한 진행방향이 바뀌는 점을 수식으로 도치시켜볼 수 있을까요?

(여기까지 읽으실 때에도 그림을 통한 발상을 유지하셔야 합니다)

네 그려보시면서 그림으로 이해하신 분들은 충분히 알아낼 수 있습니다.

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수의 그래프를 대칭시킨 그래프에 대하여,

x축에 대한 진행방향이 바뀌는 점은 바로 접선의 기울기가 ∞가 되는 지점입니다.

어찌보면 너무나도 당연한거죠. 부드럽게 그림이 그려지면서 방향이 전환되어야 하니

(기울기가 무한대가 어딨냐구요? 물론 이건 설명을 위해 제가 도입한 임시적인 개념입니다)

정리 하겠습니다.

함수가 존재하지 않을 조건은 하나의 x값에 2개이상의 y값이 대응하는 것이다.

$$\Downarrow$$

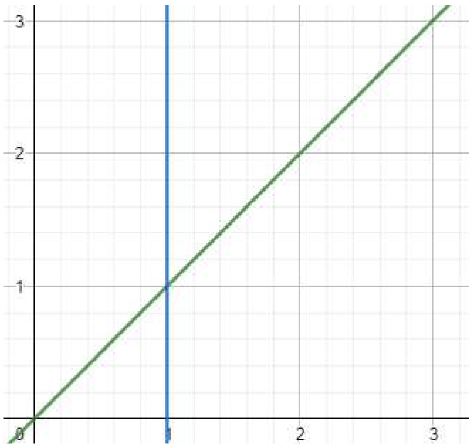
그 상황으로 전환하는 전환점은 x축에 대한 진행방향이 바뀌는 점이다.

$$\Downarrow$$

그것을 식으로 도치시켜서 표현하면 대칭시킨 그래프에서 접선의 기울기가 ∞가 되는 지점이다.

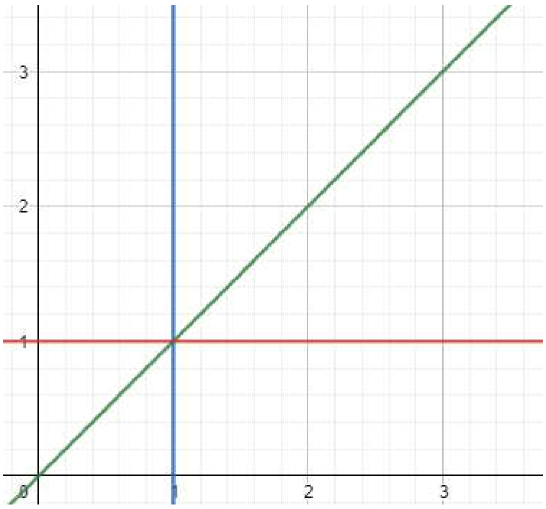
정리 되셨나요? 그러면 또 그림으로 설명 드릴 테니 계속 따라와 보실까요?

대칭시킨 그래프에서 접선의 기울기가 ∞가 나오려면, 원래 함수의 그래프는 어떤 조건을 만족시켜야 하는지 한번 알아 보겠습니다.



초록색 직선은 $y=x$의 그래프 이고 파란색 직선은 접선의 기울기가 ∞인 상황을 표현한겁니다.

그렇다면 원래함수의 접선의 기울기가 몇인 상황을 $y=x$의 그래프에 대칭시켜야, 대칭시킨 함수의 접선의 기울기가 ∞인 상황이 나올 수 있을까요? 이것도 그림을 그릴 수 있겠죠?



보이시나요? 원래함수의 접선의 기울기가 0이 될 때, $y=x$의 그래프에 대칭시킨 함수에서 기울기가 ∞인 상황이 나올 수 있습니다. $y=x$의 그래프는 x축 양의방향과 45도를 이루고 기울기가 ∞인 상황은 x축 양의방향과 이루는 각이 90도 인 상황인 상황이니 원래함수는 x축 양의방향과 0도의 각을 이루고 있는, 접선의 기울기가 0인게 대칭의 정의에 따라 맞겠죠?

자 머리가 아파오기 전에 한번더 정리하고 가겠습니다.

(여기까지 모든과정을 그림을 보면서 이해할게 아니라 그림을 그리며 이해하셔야 합니다.)

정리 하겠습니다.

함수가 존재하지 않을 조건은 하나의 x값에 2개이상의 y값이 대응하는 것이다.

$\Downarrow$

그 상황으로 전환하는 전환점은 x축에 대한 진행방향이 바뀌는 점이다.

$\Downarrow$

그것을 식으로 도치시켜서 표현하면 대칭시킨 그래프에서 접선의 기울기가 ∞가 되는 지점이다.

$\Downarrow$

원래함수의 그래프에 미분계수가 0인 지점이 있다면 대칭시킨 그래프에는 미분계수가 ∞가 되는 지점이다.

자 마지막 설명 들어가겠습니다.

전환함수칼럼에서 제가 정의한 전환점과 의심점 개념을 제가 적용한 시점에서 어떤 분들은 눈치 채셨을 거라고 생각합니다. 결론부터 말씀 드리겠습니다.

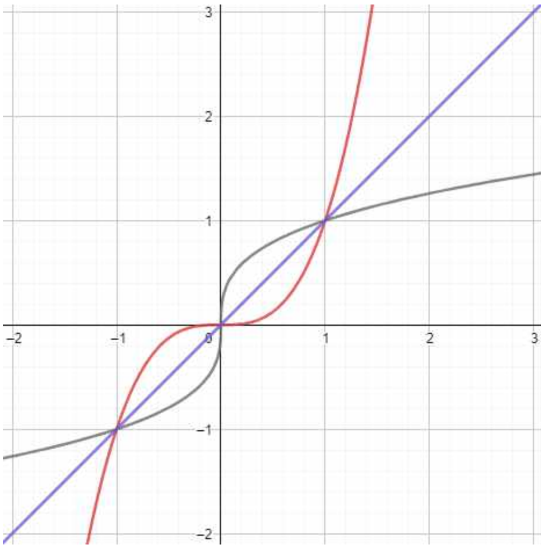
원래함수의 그래프에 미분계수가 0인 지점이 있다면 대칭시킨 그래프에는 미분계수가 ∞가 되는 지점이다. 이것은 맞는 말입니다.

x축에 대한 진행방향이 바뀌는 점이 있다면, 그 그래프는 함수의 그래프가 될 수 없고 그 점은 미분계수가 ∞가 되는 지점이다. 이것도 맞는 말입니다.

하지만, 미분계수가 ∞가 되는 지점이 존재하면 함수가 아니다. 이건 또 아닙니다.
미분계수가 ∞가 되는 지점은 어디까지나 의심해야할 의심점이지 x축에 대한 진행방향이 바뀌는 점이라고 판명된건 아니기 때문이죠. 쉽게 설명하자면, 용의자와 범인의 차이죠.

그림으로 설명하겠습니다.

(자 이것도 그려보셔야 합니다)



$y=x^3$과 그 역함수 $y=x^{\frac{1}{3}}$의 그래프를 그린 것입니다.
그래프는 점이 움직인 자취라는 관점에서 다시 생각해 보겠습니다.

분명 $y=x^{\frac{1}{3}}$는 그림으로 보았을 때 $(0,0)$에서 접선의 기울기가 ∞입니다만, x축에 대한 진행방향이 바뀌지는 않습니다. 그리면서 이해할 수 있었겠지만 원래 함수인 $y=x^3$의 미분계수가 양수값에서 감소해서 0은 되었지만, 다시 증가하여 양수가 되었기 때문이죠.

네 그렇습니다. 대칭시킨 그래프가 x축에 대한 진행방향이 바뀌려면, 원래함수의 그래프가 미분계수가 0이 되더라고 극값을 갖는 형태가 되어야 합니다.

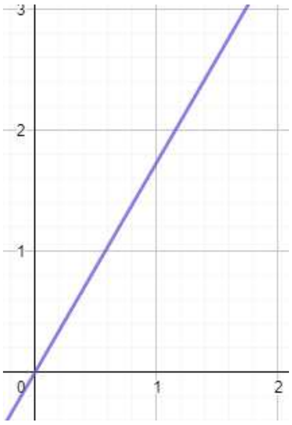
이상이 역함수가 존재하지 않기위한 조건이였습니다. 그렇다면 지금까지를 통해 알아낸 역함수가 존재할 조건은? '전체 구간에서 $f'(x) \geq 0$이거나 $f'(x) \leq 0$ 여야 한다.' 되겠습니다.

자 그러면, 여기서 다시문제!

실수 전체의 집합에서 미분 가능한 함수 $y=f(x)$의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭시킨 그래프의 함수 $y=g(x)$가 존재할 조건 은 '전체 구간에서 $f'(x) \geq 0$이거나 $f'(x) \leq 0$ 여야 한다.

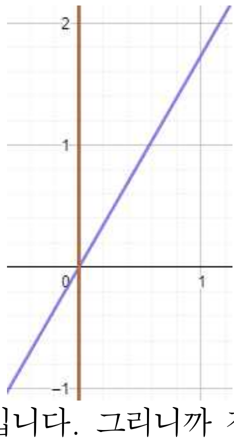
이다 그렇다면 이 $y=f(x)$의 그래프를 직선 $y=\sqrt{3}x$에 대하여 대칭시킨 그래프의 함수 $y=h(x)$가 존재할 조건을 서술하시오.

네 맞습니다. 아까그문제. 이제는 풀 수 있을거에요!
(못푸시면 다시 읽으면서 다시 그리세요ㅎㅎ)
흠… 내친김에 풀이한번 해보겠습니다.

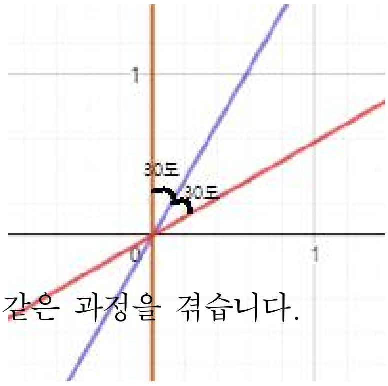


우선 $y=\sqrt{3}x$를 보시죠. 저희는 어떠한 그래프를 저 직선에 대하여 대칭시킬 것이고 그 것도 하나의 x값에 하나의 y값만 대응되어 함수가 되기를 원합니다.

이것역시 함수가 되지않을 조건을 통해 접근하겠습니다.
역시나 대칭시킨 그래프의 접선의 기울기가 ∞가 되는 의심점을 찾는것에서 시작하겠습니다.



갈색 직선이 기울기가 ∞가 되는 상황입니다. 그리니까 감이 확 오지않나요?
$y=\sqrt{3}x$는 x축 양의방향과이루는 각이 60도, 갈색 직선은 90도 이기 때문에 이 두 직선 사이의 각도는 30도가 됩니다. 따라서 대칭시켰을 때 기울기가 ∞가 나오도록 하는 원래 함수의 기울기는 직선 $y=\sqrt{3}x$과 이루는 각이 30도가 되면서, x축 양의방향과이루는 각또한 30도가 되는 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$의 상황인 것을 알 수 있습니다.



여기서 부터는 역함수 존재조건과 같은 과정을 겪습니다.

따라서

정답은 '전체 구간에서 $f'(x) \geq \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 이거나 $f'(x) \leq \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 여야 한다.' 인 것을 알 수 있습니다.

이해가 되셨나요?

수능문제를 통해 그림으로 접근하는게 단련이 되있으셨던 분들에게는 쉬운 내용들 이였다고 생각합니다. 또는 어떤분들은, 아니 이런것도 알아야되나? 싶었을 수도 있습니다.

그래서 아래 문제를 준비 했습니다!

함수 $y=x^3+ax$ 의 그래프를 원점을 중심으로 양의 방향으로 45° 회전시켜서 얻은 곡선이 실수 전체에서 정의된 어떤 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 되는 a 의 범위는?

[2점][2001학년도 수능]

① $a \geq 1$ ② $a \geq 0$ ③ $a \leq 1$

④ $a \leq -1$ ⑤ $0 \leq a \leq 2$

수능 기출을 가져왔습니다!

(가, 나형 공통입니다)
논술 준비하시는 분들에게도 도움이 될 것이라 생각되는 문제입니다.

한번 풀어 보실까요?

칼럼을 이해하셨다면 쉽게 풀 수 있을 겁니다.

답은 1번입니다.
자 그리고 이건 가형 응시자들만 풀 수 있는 문제입니다.

마지막 점검 하시고 칼럼 마무리 하시면 되겠습니다.

실수 전체의 집합에서 미분 가능한 함수 $y=f(x)$의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭시킨 그래프의 함수 $y=g(x)$가 존재할 조건 은 '전체 구간에서 $f'(x)\geq 0$이거나 $f'(x)\leq 0$ 여야 한다.

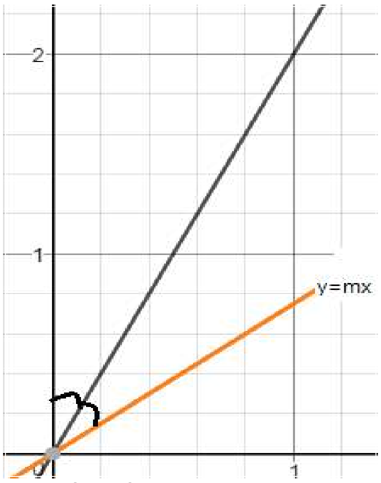
이다 그렇다면 이 $y=f(x)$의 그래프를 직선 $y=2x$에 대하여 대칭시킨 그래프의 함수 $y=h(x)$가 존재할 조건을 서술하시오.

자 수고 하셨습니다.

참고로 답은!

전체 구간에서 $f'(x) \geq \frac{3}{4}$ 이거나 $f'(x) \leq \frac{3}{4}$ 여야 한다.' 입니다!

[해설]



Θ Θ

$y=2x$와 y축이이루는 각 Θ에 대하여 $y=2x$와의 내각이 Θ인 $y=mx$에 대하여 생각하자. $f(x)$의 그래프 상에서 순간 기울기가 m이 되는 순간 $f_{2x}(x)$의 그래프 상에서는 기울기가 ∞가 되서 함수가 정의 되지 않는다.

즉, $f_{2x}(x)$가 정의되기 위해서는 닫힌구간 $[0, 4]$에서 $f'(x)0 \geq m$이거나 $f'(x) \leq m$ 여야 한다.

그렇다면 m값을 구해보자 $\tan\Theta = \frac{1}{2}$에 대하여, $\tan\alpha = 2$라 한다면, $\tan(\alpha - \Theta) = m$ 이므로,

$$\frac{2-\frac{1}{2}}{1+2\cdot\frac{1}{2}} = \frac{3}{4} = m$$

수고하셨습니다. 도움이 되시면 좋겠네요.

칼럼을 써본적이 없어서 어떤지 잘 모르겠어요
읽어보신 분들은 댓글로 나마 1번씩 피드백 부탁드립니다!