『설아덕후의 테마별 수학칼럼』

전환함수편

by우주설

안녕하세요. 우주설입니다.
이번에 함께 알아볼 테마는 바로! **전환함수**입니다.

전환함수가 뭐냐 구요?

1.함수 $f(x) = \begin{cases} x^3 + ax^2 + bx & (x \geq 1) \\ 2x^2 + 1 & (x < 1) \end{cases}$
가 모든 실수 x 에서 미분 가능하도록 상수 a, b 를 정할 때, ab 의 값은?

바로 위 문제에 나와 있는 함수 $f(x)$처럼 $f(x) = \begin{cases} g(x)\ (\text{조건}p) \\ h(x)\ (\text{조건} \sim p) \end{cases}$ 꼴의 함수를 말합니다.
위 문제의 함수 $f(x)$를 예로 들자면, $x \geq 1$에선 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$이지만 $x < 1$가 되는 순간 $f(x) = 2x^2 + 1$ 가되기 때문에 $x = 1$ 에서 전환하는 것처럼 보인다 해서 전환함수라 부르는 거죠

처음 들어 본다구요? 당연합니다. 제가 지어낸 이름이니까!
그럼 본격적으로 전환함수에 대하여 해체를 해보도록 하겠습니다.

먼저 전환함수의 큰 틀을 보겠습니다. $f(x) = \begin{cases} g(x)\ (\text{조건}p) \\ h(x)\ (\text{조건} \sim p) \end{cases}$ 에 대하여.
① 99% 확률로 $g(x), h(x)$는 해당구간에서 연속, 미분 가능한 함수가 나옵니다.
② 문제에서는 $f(x)$의 미분가능성, 연속, $f(x) = k$의 실근의 개수 등을 물어봅니다.

또 다른 특성들이 있겠지만 우선은 이 2가지가 대표적입니다.
사실 2가지라고 적긴 했지만 수능을 분석하신 분들은 저게 같은 말 이라는 것을 아실 겁니다.

생각해봅시다.

수능문제는 문제풀이의 과정에서 교육과정에서 강조하는 어떤 행동을 하게 만들고
그 행동을 하였을 때 문제가 풀리도록 제작되어 있습니다.

전환함수 유형에서 수험생들에게 묻고 싶은 것은 무엇일까? 어떤 행동을 하게 만들고 싶을까
바로 연속의 정의와 미분가능의 정의를 알고 있는가를 묻고 있습니다.
풀어서 말하면 어떠한 함수에서의 좌 극한값 우 극한값 함숫값이 같은지 비교하게 만드는 것이
전환함수 출제의 목적입니다.

$f(x)=\begin{cases} g(x)\ (x>0) \\ h(x)\ (x\le 0) \end{cases}$ 이라는 함수의 연속성을 판단하라는 문제가 나오면 기계적으로 $g(0)=h(0)$ **이렇게 놓고 풀이할 것이 아니라 좀 더 들여 다 보아야 합니다.**
그렇지 않으면 수능에서 큰코다치고 말테니까요.

수능에서 원하는 풀이는 아래와 같습니다.

우선 $g(x)$와 $h(x)$는 연속함수이기 때문에 $f(x)$의 연속성은 $x=0$에서만 따져주면 됩니다.
$g(x)$는 연속 함수 이기 때문에 $\lim_{x\to 0+} g(x)=g(0)$, $g(0)$은 $f(x)$의 $x=0$에서의 우 극한 값이 되고
$h(x)$도 연속 함수 이기 때문에 $\lim_{x\to 0-} h(x)=h(0)$, $h(0)$은 $f(x)$의 $x=0$에서의 좌 극한 값, 함숫값이 됩니다.
따라서 연속의 정의에 따라 좌 극한값 우 극한값 함숫값이 같아야 하므로 $g(0)=h(0)$이 도출됩니다.

위 과정을 이해하여 $g(0)=h(0)$을 도출하는 것과, '이런 것은 원래 이렇다.' 라는 생각으로 $g(0)=h(0)$을 놓고 풀이하는 것은 **하늘과 땅의 차이**입니다.

> 모의고사 때에는 괜찮다가도 수능만 되면 무너지시는 분들은 자기가 '원래 이렇다.' 라는 방식으로 풀이하는 **원래족**은 아니었는지 고민해 보셔야 합니다.

무튼, 위 과정을 이해한 상황이라면 이렇게 한 줄로 정리해도 무관합니다.

『전환함수문제는 항상 함수의 **전환점**에서의 상황을 물어본다.』

여기서 전환점이란? 함수 $f(x)=\begin{cases} g(x)\ (\text{조건}p) \\ h(x)\ (\text{조건}\sim p) \end{cases}$에 대하여, $f(x)$가 $g(x)$에서 $h(x)$로 또는 $h(x)$에서 $g(x)$로 바뀌는 x의 값, 지점을 말합니다.

전환점을 어떤 방식으로 해석을 시키는지 알아보겠습니다. 예를 들어, 어떤 문제에 연속함수 $f(x)$에 대하여, $f(x)=\begin{cases} g(x)\ (1\le |x|<2) \\ h(x)\ (|x|<1,\ |x|\ge 2) \end{cases}$ 라고 제시되었다 해보겠습니다.

이때, 전환점은 $x=-2,-1,1,2$가 됩니다. 총 4군데 존재하네요. 그런데 여기서 생각해봅시다.
좀 전에 말씀드렸다 시피 평가원에서는 수험생들에게 어떠한 행동을 요구합니다. 당연하지만 이 문제에서 요구하는 행동도 극한값과 함숫값의 비교입니다. 그렇다면 어떻게 그 행동을 자연스럽게 요구할 수 있을까? 그건 당연히 문제를 풀려면 행동을 해야만 하도록 출제를 하는 겁니다!
바로, $f(x)$가 N개의 점에서만 불연속일 때, 라는 조건을 제시하는 것이지요.

$f(x)$가 특정 몇 개의 점에서만 불연속이다?
이 조건을 해석하여 우리는 필연적으로 $x=-2, -1, 1, 2$ 라는 4개의 전환점 중 어디가 불연속인 지점인지 알아보게 됩니다. 4개중에 몇 개는 불연속점이고 나머지는 연속인 점일 테니까!
그리고 그 과정에서 극한값과 함숫값을 비교하게 됩니다. 역시나! 평가원의 의도대로 말이죠.

그렇다면 여기서 질문하나 박고 들어갈까요?
위 문제에서 $f(x)$가 4개의 점에서만 불연속일 때, 라는 조건을 혹시 줄 수 있을까요?

어떨까요? 당연히 평가원은 그렇게 못합니다.
전환점의 총 개수가 $x=-2, -1, 1, 2$로 4개인데, 그중 4개가 불연속 이라는 것은 불연속이 의심되는 전환점들의 연속여부를 따져볼 필요도 없이! 전환점 4개가 불연속점이 되기 때문이죠.

자신들이 의도하는 행동을 하지 않고 문제를 풀게 만든다? 그럴리가요! 정리하자면,
『전환점은 불연속 • 미분불가능의 의심점이고 그중 몇은 연속 몇은 불연속이게 출제된다.』
어찌 보면 당연한 말 이었습니다만 최대한 **수능틱** 하게 설명해드리고 싶었다보니 길어졌네요.

머리가 아파오기 전에 한번 요약하고 가겠습니다.

수능에서 전환함수문제가 출제되고 연속성이나 미분가능성을 묻는 조건이 있다면.
① 함수의 전환점을 모두 찾습니다. 상황은 전환점에서 99%발생하기 때문에.
② 전환점은 곧 연속성과 미분가능성을 따지는 의심점! 몇은 가능하고 몇은 불가능한 점이다.

그렇다면 바로 예제 문제를 보고 적용해볼까요?

2. 좌표평면에서 삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx$와 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서 접선이 y축과 만나는 점을 P라 할 때, 원점에서 P까지의 거리를 $g(t)$라 하자. 함수 $f(x)$와 함수 $g(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)=2$
(나) 함수 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

$f(3)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점][2014학년도 수능]

자! 풀어봅시다. 어? 그런데 지금까지 전환함수 $f(x)=\begin{cases} g(x)\ (조건 p) \\ h(x)\ (조건 \sim p) \end{cases}$에 대해서 분석해놓고 문제에 전환함수가 없다 구요?

당연히 전환함수 라는 놈이 $f(x)=\begin{cases} g(x)\ (조건 p) \\ h(x)\ (조건 \sim p) \end{cases}$와 같이 대놓고 나 전환함수에요! 하고 출제될 수 도 있겠지만 갈수록 수능에서는 전환함수를 출제할 때 살짝 숨겨서 출제하는 추세입니다.

평가원의 의도와 교과서 개념을 이해한 전환함수 알고리즘에 의한 풀이는 아래와 같습니다.

삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx$와 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서 접선이 y축과 만나는 점을 P라 할 때, 원점에서 P까지의 거리를 $g(t)$라 한다고 했습니다. 점P의 좌표는 $y=f'(t)(x-t)+f(t)$의 y절편 이므로 $P(0,-tf'(t)+f(t))$이고 $g(t)=|-tf'(t)+f(t)|$가 됩니다.

눈치 채셨나요? $g(t)=\begin{cases} -tf'(t)+f(t) & (-tf'(t)+f(t)\ge 0) \\ tf'(t)-f(t) & (-tf'(t)+f(t)<0) \end{cases}$ 이므로, 전환함수입니다.

참고로 절댓값함수는 $|f(x)|=\begin{cases} f(x) & (f(x)\ge 0) \\ -f(x) & (f(x)<0) \end{cases}$이고, $(|f(x)|)'=\begin{cases} f'(x) & (f(x)\ge 0) \\ -f'(x) & (f(x)<0) \end{cases}$ 이므로,

$f(x)=0$이 되는 전환점 $x=\alpha$에서 미분가능하기 위해서는 $f'(\alpha)=-f'(\alpha)$이므로 $f'(\alpha)=0$이 되어야 합니다.

절댓값 함수는 대표적인 전환함수중 하나이니 유의해두세요.

그렇다면 여기서 부터는 쉽습니다. $f(x)=\begin{cases} g(x)\ (조건 p) \\ h(x)\ (조건 \sim p) \end{cases}$의 유형과 같으니까요.

(나)조건. 함수 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다고 하네요.

$-tf'(t)+f(t)=0$인 전환점들을 찾습니다. 몇 개가 됐든 존재는 하겠네요.

전환점이 없어서 미분불가능 의심점도 없고, 그래서 실수전체의 집합에서 미분가능한건 혹시 아니냐구요? 평가원에서 그럴 리 없겠죠? 그들은 우리의 행동을 요구하니까요!

$-tf'(t)+f(t)=-t(3t^2+2at+b)+t^3+at^2+bt$

$=-2t^3-at^2=-t^2(2t+a)$

이렇게 전환점 $t=0,-\frac{a}{2}$를 구했습니다. 이제 남은 건 하나 $g'(0)=g'\left(-\frac{a}{2}\right)=0$만 되면 되겠네요.

$g'(t) = -tf''(t) = -6t^2 - 2at$, $g'\left(-\frac{a}{2}\right) = -\frac{6}{4}a^2 + a^2 = -\frac{a^2}{2} = 0$, $a = 0$

조건 (가)에 의해 $b = 1$

$f(x) = x^3 + x$, $f(3) = 30$

오랜만에 이 문제를 보니 주변 친구들에게 전환함수를 이렇게 분석해준 해에 운 좋게 이 문제가 수능에 나와 다 같이 행복했던 기억이 나네요.

마지막으로 한번 더 정리해봅시다!

① 전환함수는 전환점에서의 상황을 물어본다. (문제에서 전환점을 항상 드러내는 것은 아니다.)

② 전환점은 연속과 미분가능성의 의심점이며, 풀이 과정에서 가능과 불가능의 판별을 요구한다. **(불연속의심 점의 수 > 불연속점의 수)**

정리가 되셨나요?

그렇다면 바로 다음장 부터 문제들이 기다리고 있습니다.

풀어봅시다!

<전환함수> (가형)

1. 함수 $f(x)=\begin{cases}(x-2)^2e^x+k & (x \geq 0) \\ -x^2 & (x<0)\end{cases}$ 에 대하여

함수 $g(x)=|f(x)|-f(x)$ 가 다음 조건을 만족하도록 하는 정수 k의 개수는?

① [4점][2015년 4월]

(가) 함수 $g(x)$는 모든 실수에서 연속이다. (나) 함수 $g(x)$는 미분가능하지 않은 점이 2개다.

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

2. 함수 $f(x)=xe^{-2x+1}$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases}f(x)-a & (x>b) \\ 0 & (x \leq b)\end{cases}$$

가 실수 전체에서 미분가능할 때, 두 상수 a, b의 곱 ab의 값은?

① [4점][2016년 4월]

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{6}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

3. $f(4)=f'(4)$ 인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=e^x f(x)$$

라 할 때, 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(1)=g'(1)$
(나) 함수 $\lvert g(x)+k \rvert$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 실수 k의 최솟값은 e^2이다.

$f(3)$의 값은?

② [4점][2016년 10월]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

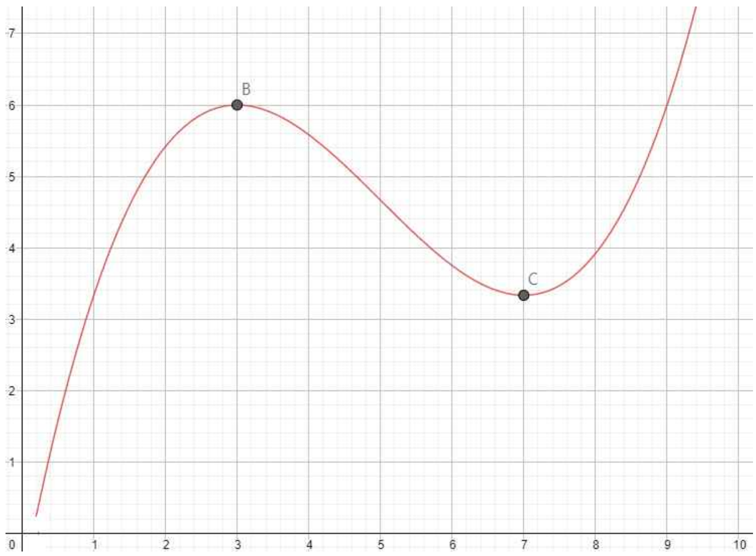
4.함수 $f(x)=kx^2e^{-x}$ $(k>0)$과 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서 x축까지의 거리와 y축까지의 거리 중 크지 않은 값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 한 점에서만 미분가능하지 않도록 하는 k의 최댓값은?

② [4점][2013학년도 수능]

① $\frac{1}{e}$ ② $\frac{1}{\sqrt{e}}$ ③ $\frac{e}{2}$ ④ $\sqrt{e}$ ⑤ e

5. $1 < x$에서 정의된 함수 $y=f(x)$에 대하여 원점O와 점$A(t, f(t))$점$B(t+1, f(t+1))$를 세꼭지점으로 하는 $\triangle OAB$의 넓이를 $g(t)$라 정의하자 또한 아래의 조건을 만족시킨다.

((가) 함수 $y=g(t)$는 $t=\alpha, \beta$ 에서만 미분 불가능 하다.
(나) 자연수 a, b에 대하여 $a<\alpha<a+1$, $b<\beta<b+1$ 이다.
(다) 함수 $y=\dfrac{f(x)}{x}$는 $x=3, 7$ 에서 극값을 갖는다.



이때. 위 의$y=\dfrac{f(x)}{x}$의 그래프를 이용하여 a^2+b^2의 값을 구하시오. (자작문제)

<전환함수> (나형)

1.두 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2-x+2a & (x\geq 1) \\ 3x+a & (x<1) \end{cases}$$

$$g(x)=x^2+ax+3$$

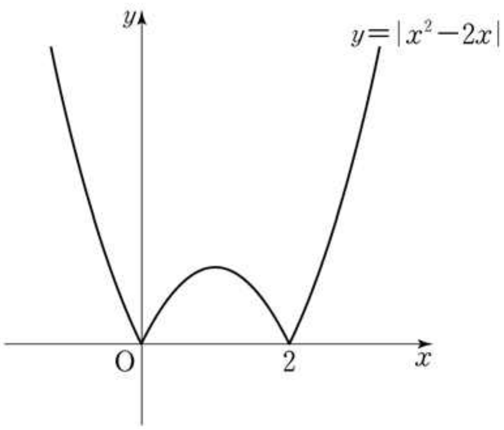
에 대하여 합성함수 $(g\circ f)(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 상수 a의 값의 합은?

[4점][2014년 3월]

① $\frac{7}{4}$ ② $\frac{15}{8}$ ③ 2 ④ $\frac{17}{8}$ ⑤ $\frac{9}{4}$

2.실수 t에 대하여 직선 $y=t$가 곡선 $y=|x^2-2x|$와 만나는 점의 개수를 $f(t)$라 하자. 최고항수의 계수가 1인 이차함수 $g(t)$에 대하여 함수 $f(t)g(t)$가 모든 실수 t에서 연속일 때, $f(3)+g(3)$의 값을 구하시오.

[4점][2015년 6월]



3.삼차함수 $f(x) = x^3+3x^2-9x$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x< a) \\ m-f(x) & (a \le x< b) \\ n+f(x) & (x\ge b) \end{cases}$$

로 정의한다. 함수 $g(x)$ 가 모든 실수 x에 대하여 미분가능하도록 상수 a, b와 m, n 의 값을 정할 때, $m+n$ 의 값을 구하시오.

4.함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x-1$ 과 실수 m 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\ge mx) \\ mx & (f(x)< mx) \end{cases}$$

라 하자. $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, m 의 값은?

[4점][2012년 6월]

① -14 ② -12 ③ -10 ④ -8 ⑤ -6

5.좌표평면에서 삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx$와 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서 접선이 y축과 만나는 점을 P라 할 때, 원점에서 P까지의 거리를 $g(t)$라 하자. 함수 $f(x)$와 함수 $g(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)=2$
(나) 함수 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

$f(3)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

[4점][2014학년도 수능]

① 21 ② 24 ③ 27 ④ 30 ⑤ 33

$6.$삼차함수 $f(x)=x^3-x^2-9x+1$ 에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \geq k) \\ f(2k-x) & (x < k) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 모든 실수 k의 값의 합을 $\frac{q}{p}$ 라 할 때, p^2+q^2 의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

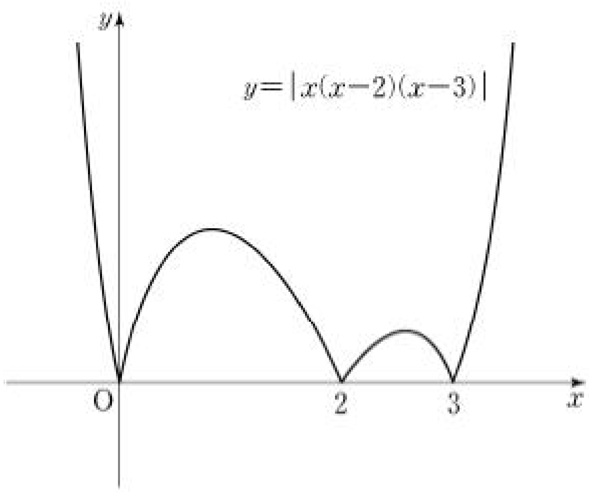
[4점][2015년 3월]

$7.$다음 조건을 만족시키며 최고차항의 계수가 음수인 모든 사차함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)$의 최댓값은?

[4점][2016년 9월]

(가) 방정식 $f(x)=0$의 실근은 0, 2, 3뿐이다.
(나) 실수 x에 대하여 $f(x)$와 $|x(x-2)(x-3)|$중 크지 않은 값을 $g(x)$라 할 때, 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$



8. 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & (x<1) \\ -2x+4 & (x\geq 1) \end{cases}$$

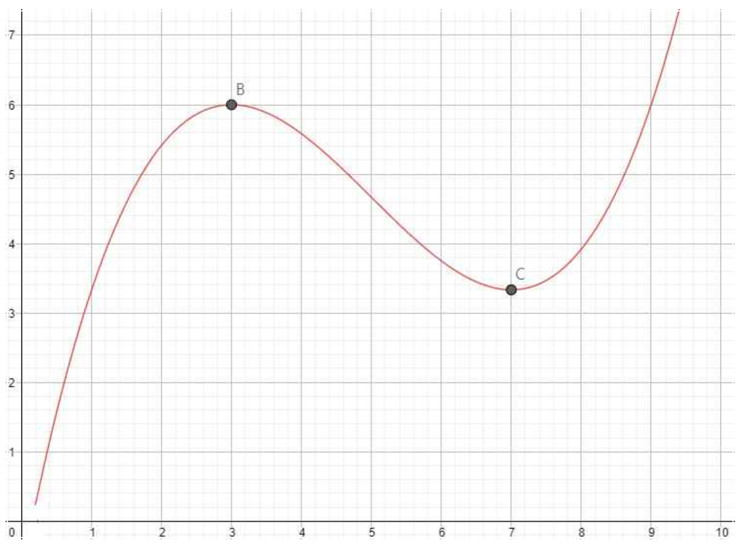
이고, 좌표평면 위에 두 점 A$(-1,\ -1)$, B$(1,\ 2)$가 있다. 실수 x에 대하여 점 $(x,\ f(x))$에서 점 A까지의 거리의 제곱과 점 B까지의 거리의 제곱 중 크지 않은 값을 $g(x)$라 하자. 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 모든 a의 값의 합이 p일 때, $80p$의 값을 구하시오.

9. $1<x$에서 정의된 함수 $y=f(x)$에 대하여 원점O와 점$A(t,f(t))$점$B(t+1,f(t+1))$를 세꼭지점으로 하는 $\triangle OAB$의 넓이를 $g(t)$라 정의하자 또한 아래의 조건을 만족시킨다.

((가) 함수 $y=g(t)$는 $t=\alpha,\beta$ 에서만 미분 불가능 하다.

(나) 자연수 a,b에 대하여 $a<\alpha<a+1$, $b<\beta<b+1$ 이다.

(다) 함수 $y=\dfrac{f(x)}{x}$는 $x=3,7$ 에서 극값을 갖는다.



이때. 위 의$y=\dfrac{f(x)}{x}$의 그래프를 이용하여 a^2+b^2의 값을 구하시오. (자작문제)