

제 3 교시

수학 나형

1

수능완성 P 35 22번 연계

1.  $\sum_{k=1}^3 k^2$ 의 값은?

- ① 12                      ② 14                      ③ 16
- ④ 18                      ⑤ 20

[2점]

수능특강 확통 P 26 4번 연계

2.  ${}_5P_2 + {}_4C_3$ 의 값을 구하시오.

- ① 16                      ② 20                      ③ 24
- ④ 28                      ⑤ 32

[2점]

수능완성 P 42 2번 연계

3. 16의 네제곱근 중 실수인 것의 개수는?

- ① 0                      ② 1                      ③ 2
- ④ 3                      ⑤ 4

[2점]

수능완성 P 7 필수유형연계

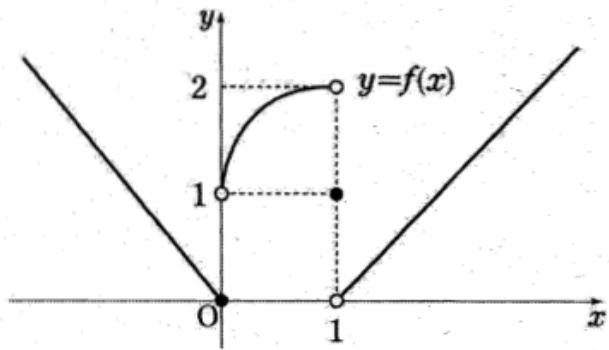
4. 두 집합  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \{2, 4, 6\}$ 에 대하여  
집합  $A \cup B$ 의 부분집합의 개수는?

- ① 4                      ② 8                      ③ 16
- ④ 32                      ⑤ 64

[3점]

수능완성 P 64 필수유형연계

5. 함수  $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ 의 값은?

[3점]

- ① 0                      ② 1                      ③ 2
- ④ 3                      ⑤ 4

수능완성 P 82 필수유형연계

6. 한 개의 동전을 4번 던질 때, 앞면이 나온 횟수가 3 이상일 확률은?

[3점]

- ①  $\frac{5}{16}$                       ②  $\frac{3}{8}$                       ③  $\frac{7}{16}$
- ④  $\frac{1}{2}$                       ⑤  $\frac{9}{16}$

수능특강 미적1 P 176 2번 연계

7.  $\int_3^1 x^{-3} dx + \int_{-1}^3 x^3 dx$ 의 값은?

[3점]

- ① -40                      ② -20                      ③ 0
- ④ 20                      ⑤ 40

수능특강 미적1 P 145 유제1 연계

8. 함수  $f(x) = x^3 + 5x^2 - x$ 에 대하여

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1)}{h}$ 의 값은?

[3점]

- ① 16                      ② 18                      ③ 20
- ④ 22                      ⑤ 24

# 수학 영역

3

수능완성 P 23 29번 연계

9. 함수  $f(x) = \frac{4x}{x-1}$ 에 대하여 곡선  $y = f^{-1}(x)$ 의 두 점근선의 방정식을 각각  $x = a$ ,  $y = b$ 라 할 때,  $a+b$ 의 값은?  
(단,  $a$ ,  $b$ 는 상수이다.)

- ① 1                      ② 2                      ③ 3  
④ 4                      ⑤ 5

[3점]

수능완성 P 95 29번 연계

10. 정규분포  $N(m, \sigma^2)$ 을 따르는 모집단에서 크기가 9인 표본을 임의 추출하여 구한 표본평균을  $\bar{X}$ 라 하자. 확률변수  $\bar{X}$ 가 정규분포  $N(100, 2^2)$ 을 따를 때,  $m + \sigma^2$ 의 값은?

- ① 112                    ② 120                    ③ 128  
④ 136                    ⑤ 144

[3점]

수능특강 미적1 P 109 1번 연계

11. 수열  $\{a_n\}$ 은 모든 자연수  $n$ 에 대하여  $3n^2 + 3n \leq a_n \leq 3n^2 + 4n$ 이고, 수열  $\{b_n\}$ 은  $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n^2 + 5n)b_n = 10$ 을 만족시킨다.

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n$ 의 값은?

- ① 10                      ② 15                      ③ 20  
④ 25                      ⑤ 30

[3점]

수능완성 P 81 35번 연계

12. 두 사건  $A, B$ 가 서로 독립이고  $P(A) = \frac{1}{3}$ ,  $2P(A \cap B) = P(A^c \cap B^c)$

일 때,  $P(B)$ 의 값은?(단,  $A^c$ 은  $A$ 의 여사건이다.)

- ①  $\frac{1}{6}$                       ②  $\frac{1}{4}$                       ③  $\frac{1}{3}$   
④  $\frac{5}{12}$                     ⑤  $\frac{1}{2}$

[3점]

수능완성 P 110 20번 연계

13. 두 집합  $X = \{1, 2, 3\}$ ,  $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는  $X$ 에서  $Y$ 로의 함수  $f$ 의 개수는?  
[3점]

(가)  $f(1) \leq f(2) \leq f(3)$   
(나)  $f(1) + f(2) + f(3) = 10$

- ① 6                      ② 7                      ③ 8  
④ 9                      ⑤ 10

수능특강 미적1 P 142 2번 연계

14. 좌표평면에 세 점  $A(1, 0)$ ,  $B(3, 0)$ ,  $C(3, 7)$ 이 있다. 직선  $y = mx + 1$ 이 삼각형  $ABC$ 와 만나는 점의 개수를  $f(m)$ 이라 할 때, 실수 전체의 집합에서 정의된 함수  $f(m)$ 이 불연속인 모든  $m$ 의 값의 합은?  
[4점]

- ① 1                      ②  $\frac{3}{2}$                       ③ 2  
④  $\frac{5}{2}$                       ⑤ 3

수능특강 확통 P 16 2번 연계

15. 수열  $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 수열  $\{a_n a_{n+1}\}$ 은 공비가 3인 등비수열이다.  
(나)  $a_1 = 3, a_2 = 6$

$\log_3(a_{41} + a_{42})$ 의 값은?

[4점]

- ① 20                      ② 22                      ③ 24  
④ 26                      ⑤ 28

수능특강 확통 P 16 2번 연계

16. 어느 문방구에는 서로 다른 3종류의 공책과 서로 다른

2종류의 연필을 판매하고 있다. 학생 3명이 이 문방구에서 각자 공책 1권과 연필 1자루를 구입할 때, 공책 및 연필 총 5종류 중 적어도 한 종류를 3명 모두 구입하는 경우의 수는? (단, 공책과 연필은 충분히 많다.)

[4점]

- ① 60                      ② 66                      ③ 72  
④ 78                      ⑤ 84

# 수학 영역

5

수능특강 | 미적1 P 165 | 2번 연계

17. 삼차함수  $f(x) = x^3 + ax^2 - ax$ 가  $-4 < x < 0$ 에서 극댓값을 갖고,  $x > 0$ 에서 극솟값을 갖도록 하는 모든 정수  $a$ 의 값의 합은?

[4점]

- ① 10            ② 15            ③ 20  
④ 25            ⑤ 30

18. 실수 전체의 집합의 두 부분집합  $A, B$ 가

$$A = \{k, -1, 3\}, B = \{-k+1, 0, 2\}$$

일 때, 집합  $A - (A \cap B^c)$ 의 원소의 개수가 1이 되도록 하는 모든 실수  $k$ 의 값의 합은?

[4점]

- ①  $-\frac{3}{2}$             ②  $-1$             ③  $-\frac{1}{2}$   
④ 0                ⑤  $\frac{1}{2}$

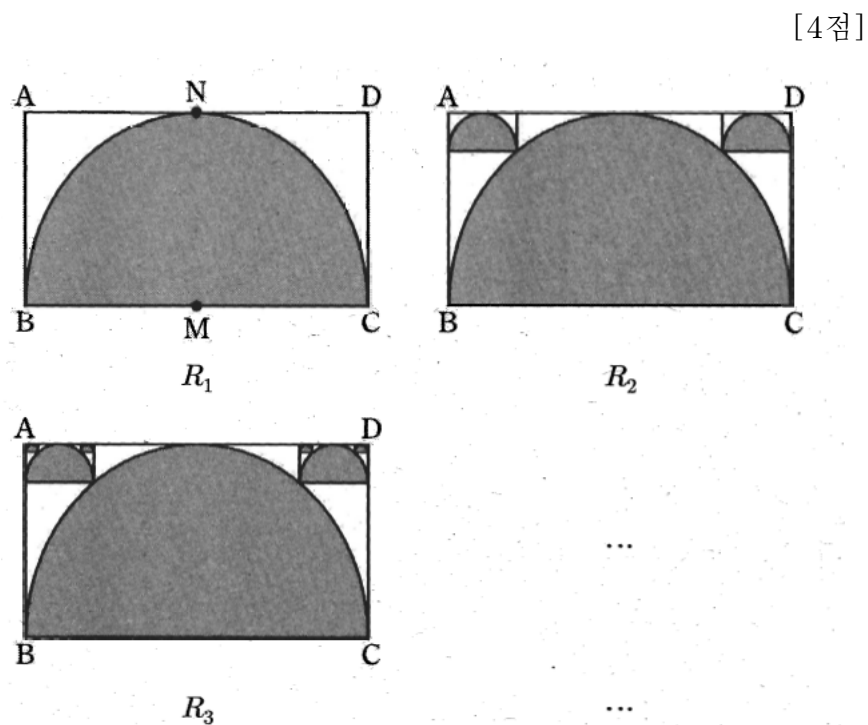
수능특강 | 미적1 P 120 | 3번 연계

19.  $\overline{AB}=1, \overline{BC}=2$ 인 직사각형  $ABCD$ 에 대하여 그림과 같이 두 선분  $BC, AD$ 의 중점을 각각  $M, N$ 이라 하자. 점  $M$ 을 중심으로 하고 세 점  $B, N, C$ 를 지나는 반원의 내부를 색칠하여 얻은 그림을  $R_1$ 이라 하자.

그림  $R_1$ 에 점  $A$ , 선분  $AB$  위의 한 점, 호  $BN$  위의 한 점, 선분  $NA$  위의 한 점을 꼭짓점으로 하는 직사각형과 점  $D$ , 선분  $DC$  위의 한 점, 호  $CN$  위의 한 점, 선분  $ND$  위의 한 점을 꼭짓점으로 하는 직사각형을 직사각형  $ABCD$ 와 닮음이 되도록 그리고, 이 두 개의 직사각형 안에  $R_1$ 을 얻는 과정과 같은 방법으로 각각 만들어지는 반원 모양의 2 개의 도형에 색칠하여 얻은 그림을  $R_2$ 라 하자.

그림  $R_2$ 에 새로 만들어진 두 개의 직사각형에 각각  $R_1$ 에서  $R_2$ 를 얻는 과정과 같은 방법으로 만들어지는 반원 모양의 4개의 도형에 색칠하여 얻은 그림을  $R_3$ 이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여  $n$ 번째 얻은 그림  $R_n$ 에 색칠되어 있는 모든 부분의 넓이를  $S_n$ 이라 할 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은?



- [4점]
- ①  $\frac{25}{48}\pi$       ②  $\frac{10}{19}\pi$       ③  $\frac{25}{27}\pi$   
 ④  $\frac{50}{93}\pi$       ⑤  $\frac{25}{46}\pi$

수능특강 | 미적1 P 165 | 3번 연계

20. 실수 전체의 집합에서 미분 가능한 함수  $f(x)$ 의 도함수가

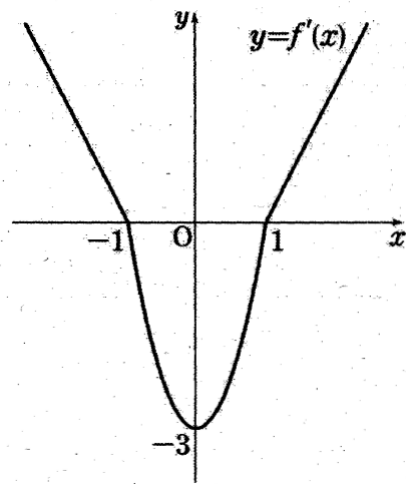
$$f'(x) = \begin{cases} -2x-2 & (x \leq -1) \\ 3x^2-3 & (-1 < x < 1) \\ 2x-2 & (x \geq 1) \end{cases}$$

이고  $f(0)=0$ 일 때, < 보기 > 에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[4점]

- < 보기 >
- ㄱ. 함수  $f(x)$ 는  $x=0$ 에서 극값을 갖는다.  
 ㄴ. 함수  $y=f'(x)$ 의 그래프와 직선  $y=2$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는  $8-2f(2)$ 이다.  
 ㄷ. 함수  $|f(x)-2|$ 는  $x=3$ 에서 미분가능하지 않다.

- ① ㄴ                      ② ㄷ                      ③ ㄱ, ㄴ  
 ④ ㄴ, ㄷ                ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



# 수학 영역

7

수능특강 | 확통 P 79 | 28번 연계

21. 어느 회사 전체 직원을 대상으로 목요일과 금요일에 자가용 및 대중교통 중 어떤 교통수단을 이용하여 출근하는지 조사하였다. 그 결과 목요일에는 자가용을 이용한 직원 수가 대중교통을 이용한 직원 수의 2배였고, 금요일에는 자가용을 이용한 직원 수와 대중교통을 이용한 직원 수가 서로 같았다. 또한, 전체 직원의 70%가 목요일과 금요일에 서로 다른 교통수단을 이용하였다. 금요일에 자가용을 이용하여 출근한 직원 중 임의로 한 명을 택할 때, 이 직원이 목요일에도 자가용을 이용하여 출근하였을 확률은? (단, 목요일과 금요일에 출근하는 전체 직원 수는 서로 같고, 모든 직원은 자가용 및 대중교통 중 어느 하나만을 이용하여 출근한다.)

[4점]

- ①  $\frac{2}{5}$     ②  $\frac{13}{30}$     ③  $\frac{7}{15}$     ④  $\frac{1}{2}$     ⑤  $\frac{8}{15}$

수능특강 | 수2 P 24 | 필수유형연계

22. 함수  $y = \sqrt{2x}$ 의 그래프를  $x$ 축의 방향으로  $a$ 만큼 평행 이동시키면 함수  $y = \sqrt{2x-12}$ 의 그래프와 일치할 때, 상수  $a$ 의 값을 구하시오.

[3점]

수능완성 | P 58 | 19번 연계

23. 수열  $\{a_n\}$ 에 대하여  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 8) = 4$ 일 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값을 구하시오.

[3점]

수능완성 P 29 5번 연계

24. 등차수열  $\{a_n\}$ 이  $a_1 = 3$ ,  $a_{20} - a_{17} = 12$ 를 만족시킬 때,  $a_4 + a_5 + a_6 + a_7$ 의 값을 구하시오.

[3점]

수능특강 확통 P 79 9번 연계

25.  $0 < p < \frac{1}{2}$  일 때, 확률변수  $X$ 가 이항분포  $B(64, p)$ 를 따르고  $X$ 의 분산이 12이다.  $100p$ 의 값을 구하시오.

[3점]

수능특강 미적1 P 173 예제2 연계

26. 다항함수  $f(x)$ 가 모든 실수  $x$ 에 대하여

$$xf(x) = x^2 + \int_1^x f(t)dt$$

를 만족시킬 때,  $f(10)$ 의 값을 구하시오.

[4점]

수능완성 P 11 20번 연계

27. 실수  $x$ 에 대한 세 조건  $p, q, r$ 가 다음과 같다.

$$p : -1 < x < 5 \text{ 또는 } 7 < x < 11$$

$$q : a < x < a + 15$$

$$r : b < x < b + 3$$

$q$ 는  $p$ 이기 위한 필요조건이고,  $r$ 는  $p$ 이기 위한 충분조건이 되도록 하는 두 실수  $a, b$ 에 대하여  $b - a$ 의 최댓값을 구하시오.

[4점]

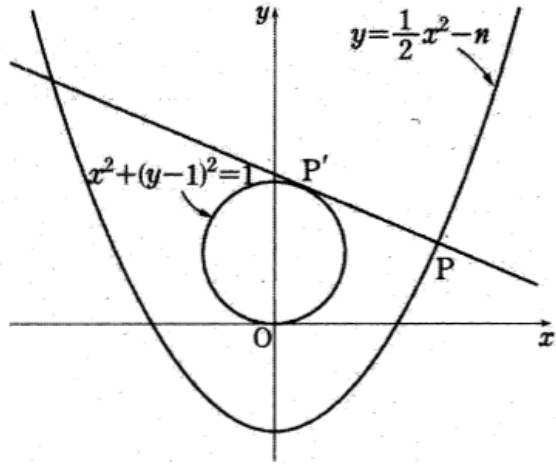


--	--	--

수능특강	확통 P 16	3번 연계
------	---------	-------

28. 자연수  $n$ 에 대하여 곡선  $y = \frac{1}{2}x^2 - n$  위를 움직이는 점  $P$ 에서 원  $x^2 + (y-1)^2 = 1$ 에 그은 접선의 접점을  $P'$ 이라 할 때  $\overline{PP'}$ 의 최솟값을  $f(n)$ 이라 하자.  $\sum_{n=1}^{10} f(n)$ 의 값을 구하시오.

[4점]



29. 한 개의 주사위를 4번 던질 때 나오는 눈의 수를 차례로  $a_1, a_2, a_3, a_4$ 라 하자. 등식  $a_1 + a_2 + a_3 = 7a_4$ 를 만족시키는 모든 순서쌍  $(a_1, a_2, a_3, a_4)$ 의 개수를 구하시오.

[4점]

킬러문제

30. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수  $f(x)$ 와 함수  $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 임의의 실수  $a$ 에 대하여  $f(a)=b$ 이면  $f(b)=a$ 이다.

(나) 모든 실수  $x$ 에 대하여 상수함수가 아닌 다항함수  $g(x)$ 가

$$\int_1^x g(t)dt = \{g(x)\}^2$$

을 만족시킨다.

(다)  $x \leq 0$ 일 때,  $f(x) = 2 \int_1^x g(t)dt - \frac{1}{2}$ 이다.

$\int_{-4}^4 |f(x)| dx = \frac{q}{p}$ 일 때,  $p+q$ 의 값을 구하시오. (단,  $p$ 와  $q$ 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

\* 확인 사항

◦ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

정답 및 풀이

1. 정답 ②

$$\sum_{k=1}^3 k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = 14$$

2. 정답 ③

$${}_5P_2 + {}_4C_3 = 20 + 4 = 24$$

3. 정답 ③

16의 네제곱근 중 실수인 것은 방정식  $x^4 = 16$ 의 실근과 같으므로

$$x^4 - 16 = 0, (x^2 + 4)(x^2 - 4) = 0,$$

$$(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2) = 0$$

따라서 16의 네제곱근 중 실수인 것은  $-2, 2$ 로 2개다.

4. 정답 ④

집합  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ 의 원소의 개수는 5이므로 집합  $A \cup B$ 의 부분집합의 개수는  $2^5 = 32$ 이다.

5. 정답 ①

주어진 그래프에서  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0 \text{ 이다.}$$

6. 정답 ①

한 개의 동전을 4번 던질 때, 앞면이 나온 횟수가 3 또는 4일 확

$$\text{률은 } {}_4C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^1 + {}_4C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$$

7. 정답 ③

함수  $y = x^3$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로

$$\int_{-1}^1 x^3 dx = 0 \text{ 이고 } \int_{-3}^3 x^3 dx = 0 \text{ 이다.}$$

$$\therefore \int_{-3}^1 x^3 dx + \int_{-1}^3 x^3 dx$$

$$= \left( \int_{-3}^{-1} x^3 dx + \int_{-1}^1 x^3 dx \right) + \int_{-1}^3 x^3 dx$$

$$= \int_{-3}^{-1} x^3 dx + \int_{-1}^3 x^3 dx = \int_{-3}^3 x^3 dx = 0$$

[다른 풀이]

$$\int_{-3}^1 x^3 dx = \left[ \frac{1}{4} x^4 \right]_{-3}^1 = \frac{1}{4} - \frac{81}{4} = -20$$

$$\int_{-1}^3 x^3 dx = \left[ \frac{1}{4} x^4 \right]_{-1}^3 = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = 20 \text{ 이므로}$$

$$\int_{-3}^1 x^3 dx + \int_{-1}^3 x^3 dx = (-20) + 20 = 0$$

8. 정답 ⑤

$f(x) = x^3 + 5x^2 - x$ 에서  $f'(x) = 3x^2 + 10x - 1$ 이므로

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(1+2h) - f(1)}{2h} \times 2 \right\} \\ = 2f'(1) = 2 \times 12 = 24$$

9. 정답 ⑤

$$f(x) = \frac{4x}{x-1} = 4 + \frac{4}{x-1} \text{에서}$$

곡선  $y = f(x)$ 의 두 점근선의 방정식은  $x = 1, y = 4$ 이므로 곡선  $y = f^{-1}(x)$ 의 두 점근선의 방정식은  $x = 4, y = 1$ 이다.

$$\therefore a + b = 4 + 1 = 5$$

[다른 풀이]

함수  $y = \frac{4x}{x-1}$ 의 역함수를 구하면

$$x = \frac{4y}{y-1}, xy - x = 4y, (x-4) = x, y = \frac{x}{x-4}$$

따라서  $f^{-1}(x) = 1 + \frac{4}{x-4}$ 이므로

곡선  $y = f^{-1}(x)$ 의 두 점근선의 방정식은  $x = 4, y = 1$ 이다.

$$\therefore a + b = 4 + 1 = 5$$

10. 정답 ④

모집단의 확률변수를  $X$ 라 하면, 크기가 9인 표본에 대하여  $X$ 가 정규분포  $N(m, \sigma^2)$ 을 따를 때

$\bar{X}$ 는 정규분포  $N\left(m, \frac{\sigma^2}{9}\right)$ 을 따른다.

따라서  $m = 100, \frac{\sigma^2}{9} = 2^2$ 이므로

$$\therefore m + \sigma^2 = 100 + 36 = 136$$

11. 정답 ②

$$3n^2 + 3n \leq a_n \leq 3n^2 + 4n \text{에서 } 3 + \frac{3}{n} \leq \frac{a_n}{n^2} \leq 3 + \frac{4}{n}$$

$$\text{이때 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{3}{n}\right) = 3, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{4}{n}\right) = 3 \text{ 이므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2} = 3$$

또한,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n^2 + 5n)b_n = 10$ 이므로

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{a_n}{n^2} \times (2n^2 + 5n)b_n \times \frac{n}{2n+5} \right\} \\ = 3 \times 10 \times \frac{1}{2} = 15$$

12. **정답** ⑤

$P(A) = \frac{1}{3}$ 이고 두 사건  $A, B$ 가 서로 독립이므로

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{3}P(B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{1}{3} + P(B) - \frac{1}{3}P(B)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}P(B)$$

조건  $2P(A \cap B) = P((A \cup B)^c)$ 에서

$$2 \times \frac{1}{3}P(B) = 1 - \left\{ \frac{1}{3} + \frac{2}{3}P(B) \right\}, \frac{4}{3}P(B) = \frac{2}{3}$$

$$\therefore P(B) = \frac{1}{2}$$

13. **정답** ③

구하려는 함수  $f$ 의 개수는  $P(10, 3)$ 과 같다.

$$10 = 8 + 1 + 1$$

$$= 7 + 2 + 1$$

$$= 6 + 3 + 1 = 6 + 2 + 2$$

$$= 5 + 4 + 1 = 5 + 3 + 2$$

$$= 4 + 4 + 2 = 4 + 3 + 3$$

이므로  $P(10, 3) = 8$ 이다.

[참고] 예를 들어 '8+1+1'의 경우

$$f(1) = 1, f(2) = 1, f(3) = 8 \text{이고,}$$

'5+3+2'의 경우

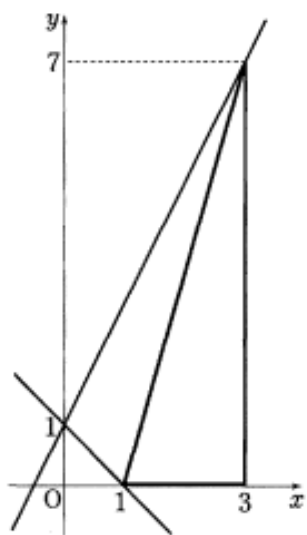
$$f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 5 \text{를 뜻한다.}$$

14. **정답** ①

직선  $y = mx + 1$ 은 점  $(0, 1)$ 을 지나고 기울기가  $m$ 이다.

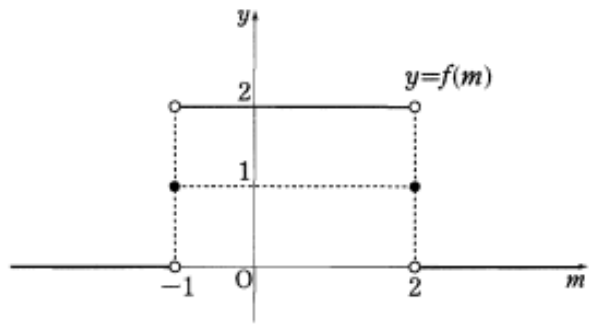
직선  $y = mx + 1$ 이 삼각형  $ABC$ 와 만나는 점의 개수가 1인 경우는 점  $A(1, 0)$ 을 지날 때  $m = -1$ 이고

점  $C(3, 7)$ 을 지날 때  $m = 2$ 이다.



$$\text{따라서 } f(m) = \begin{cases} 2 & (-1 < m < 2) \\ 1 & (m = -1, m = 2) \\ 0 & (m < -1, m > 2) \end{cases} \text{ 이므로}$$

함수  $f(m)$ 은  $m = -1$ 과  $m = 2$ 에서만 불연속이다.



따라서 구하는 답은  $(-1) + 2 = 1$ 이다.

15. **정답** ②

조건 (가)에 의하여  $a_{n+1}a_{n+2} = 3a_n a_{n+1}$ ,

즉  $a_{n+2} = 3a_n (n \geq 1)$ 이다.

따라서  $a_{41} = 3^{20}a_1, a_{42} = 3^{20}a_2$ 이므로

$$a_{41} + a_{42} = 3^{20}(a_1 + a_2) = 3^{20} \times 9 = 3^{22} (\because \text{조건(나)})$$

$$\therefore \log_3(a_{41} + a_{42}) = 22$$

16. **정답** ③

3명 모두 같은 종류의 공책을 구입하는 경우의 수는

$${}_3C_1 \times {}_2H_3 = 3 \times 8 = 24 \text{이고}$$

3명 모두 같은 종류의 연필을 구입하는 경우의 수는

$${}_2C_1 \times {}_3H_3 = 2 \times 27 = 54 \text{이다.}$$

이때, 3명 모두 같은 종류의 공책과 같은 종류의 연필을 구입하는 경우의 수는  ${}_3C_1 \times {}_2C_1 = 6$ 이므로

구하는 경우의 수는  $24 + 54 - 6 = 72$

17. **정답** ②

$f(x) = x^3 + ax^2 - ax$ 에서  $f'(x) = 3x^2 + 2ax - a$ 이다.

삼차함수  $f(x)$ 가  $x = p$ 에서 극대,  $x = q$ 에서 극소라고 하면

방정식  $f'(x) = 0$ 이 서로 다른 두 실근  $p, q$ 를 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을  $D$ 라 할 때

$$\frac{D}{4} = a^2 + 3a > 0 \dots \text{㉠}$$

한편, 최고차항의 계수가 1인 삼차함수  $f(x)$ 는 구간  $(-\infty, p)$

에서 증가하고, 구간  $(p, q)$ 에서 감소하므로  $f'(-4) > 0$ 에서

$$-9a + 48 > 0 \dots \text{㉡}$$

$$f'(0) < 0 \text{에서 } -a < 0 \dots \text{㉢}$$

㉠에서  $a < -3$ , ㉡에서  $a < \frac{16}{3}$ , ㉢에서  $a > 0$  따라서

㉠, ㉡, ㉢을 모두 만족시키려면  $0 < a < \frac{16}{3}$  이므로 구하는 정수

$a$ 의 값의 합은  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$

18. **정답** ①

$$A - (A \cap B^c) = A \cap (A \cap B^c)^c = a \cap (A^c \cup B)$$

$$= (A \cap A^c) \cup (A \cap B) = A \cap B$$

i)  $k = -k + 1$  일 때 (즉,  $k = \frac{1}{2}$  일 때)

$$A = \left\{ \frac{1}{2}, -1, 3 \right\}, B = \left\{ \frac{1}{2}, 0, 2 \right\} \text{이므로}$$

집합  $A \cap B = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ 의 원소의 개수가 1이다.

ii)  $k = 0$  일 때

$$A = \{0, -1, 3\}, B = \{-1, 0, 2\} \text{이므로}$$

집합  $A \cap B = \{0\}$ 의 원소의 개수가 1이다.

iii)  $k = 2$  일 때

$$A = \{2, -1, 3\}, B = \{-1, 0, 2\} \text{이므로}$$

집합  $A \cap B = \{-1, 2\}$ 의 원소의 개수가 2이다.

iv)  $-k + 1 = -1$  일 때 (즉,  $k = 2$  일 때)

iii)의 결과와 같다.

v)  $-k + 1 = -1$  일 때 (즉,  $k = -2$  일 때)

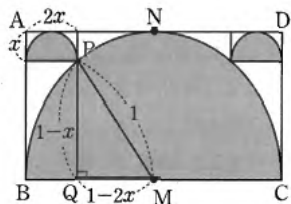
$$A = \{-2, -1, 3\}, B = \{3, 0, 2\} \text{이므로}$$

집합  $A \cap B = \{3\}$ 의 원소의 개수가 1이다.

따라서 구하는 모든 실수  $k$ 의 값의 합은  $\frac{1}{2} + 0 + (-2) = -\frac{3}{2}$

### 19. 정답 ⑤

그림  $R_1$ 에서 반원의 반지름의 길이는  $\overline{MN} = 1$ 이므로  $S_1 = \frac{\pi}{2}$ 이다. 그림  $R_2$ 에 새로 생긴 2개의 직사각형에서 짧은 변의 길이를  $x$  ( $0 < x < 1$ )라 하자. 다음 그림과 같이 직사각형의 한 꼭짓점인 호  $BN$  위의 점을  $P$ 라 하고, 점  $P$ 에서 선분  $BC$ 에 내린 수선의 발의  $Q$ 라 하자.



직각삼각형  $PQM$ 에서  $(1-x)^2 + (1-2x)^2 = 1^2$ 이므로  $5x^2 - 6x + 1 = 0$ ,  $(x-1)(5x-1) = 0$

따라서  $x = \frac{1}{5}$ 이므로 직사각형  $ABCD$ 와 그림  $R_2$ 에서

새로 그려진 직사각형의 닮음비는  $\frac{1}{5}$ 이다.

즉, 그림  $R_n$ 에서 새로 그려진 반원과 그림  $R_{n+1}$ 에서 새로 그려진 반원의 닮음비도  $\frac{1}{5}$ 이므로 넓이의 비는  $\frac{1}{25}$ 이며 그 개수는 2배이다.

따라서 첫째항이  $\frac{\pi}{2}$ 이고 공비가  $\frac{2}{25}$ 인 등비수열의 첫째항부터 제  $n$ 항까지의 합이  $S_n$ 이다.

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\frac{\pi}{2}}{1 - \frac{2}{25}} = \frac{25}{46} \pi$$

### 20. 정답 ④

ㄱ. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수  $f(x)$ 에 대하여  $f'(0) = -3$ , 즉  $f'(0) \neq 0$ 이므로 함수  $f(x)$ 는  $x=0$ 에서 극값을 갖지 않는다. (거짓)

ㄴ. 함수  $y = f'(x)$ 의 그래프는  $y$ 축에 대하여 대칭이고,  $f(0) = 0$ 이므로

함수  $y = f(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다. .... ㉠

함수  $y = f'(x)$ 의 그래프와 직선  $y = 2$ 가 만나는 점의 좌표는  $(-2, 2), (2, 2)$ 이므로 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 \{2 - f'(x)\} dx &= [2x - f(x)]_{-2}^2 \\ &= \{4 - f(2)\} - \{-4 - f(-2)\} \\ &= 8 - f(2) + f(-2) \\ &= 8 - 2f(2) \quad (\because \text{㉠}) \quad (\text{참}) \end{aligned}$$

ㄷ.  $f'(x) = \begin{cases} -2x-2 & (x \leq -1) \\ 3x^2-3 & (-1 < x < 1) \\ 2x-2 & (x \geq 1) \end{cases}$  이고  $f(0) = 0$ 이므로

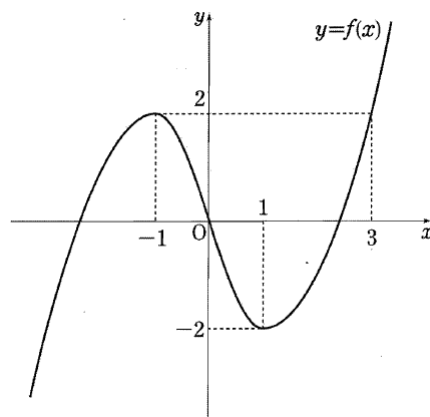
$$f(x) = \begin{cases} -x^2-2x+1 & (x \leq -1) \\ x^3-3x & (-1 < x < 1) \\ x^2-2x-1 & (x \geq 1) \end{cases} \text{이다.}$$

(여기서  $f'(x)$ 의 식 으로부터 부정적분을 이용하여  $f(x)$ 의 식을 구할 때 함수  $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이어야 하는 점을 착안하여 적분상수는  $f(0), f(-1), f(1)$ 의 값에 따라 결정한다.)

$f(-1) = 2$ 이고,  $x \geq 1$ 에서 방정식  $f(x) = 2$

즉  $x^2 - 2x - 1 = 2$ 의 해를 구하면

$$x^2 - 2x - 3 = 0, (x+1)(x-3) = 0 \Rightarrow x = 3$$



따라서 함수  $|f(x) - 2|$ 는  $x = 3$ 에서 미분가능하지 않다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

### ☆ ㉠

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수  $f(x)$ 에 대하여 함수  $|f(x) - a|$ 가  $x = b$ 에서 미분가능하지 않기 위한 필요충분조건은  $f(b) = a, f'(b) \neq 0$ 이다.

### 21. 정답 ③

이 회사 전체 직원 수를  $30a$ 라 하면

목요일에는 자가용을 이용한 직원 수가 대중교통을 이용한 직원 수의 2배이므로

목요일에 자가용, 대중교통을 이용한 직원 수는 각각  $20a, 10a$ 이고 금요일에는 자가용을 이용한 직원 수와 대중교통을 이용한 직원 수가 서로 같으므로

금요일에 자가용, 대중교통을 이용한 직원 수는 각각  $15a, 15a$ 이다.

전체 직원의 70%인  $21a$ 명이 목요일과 금요일에 서로 다른 교통수단을 이용하였으므로

목요일에 자가용을 이용하고 금요일에 대중교통을 이용한 직원 수를  $x$ 라 하면

목요일에 대중교통을 이용하고 금요일에 자가용을 이용한 직원 수는  $21a - x$ 이다.

(단위 : 명)

구분	금요일 자가용	금요일 대중교통	계
목요일 자가용		$x$	$20a$
목요일 대중교통	$21a - x$		$10a$
계	$15a$	$15a$	$30a$

위의 표에서 목요일과 금요일 모두 자가용을 이용한 직원 수는

$$15a - (21a - x) = 20a - x$$

이므로  $x = 13a$ 이다.

(단위 : 명)

구분	금요일 자가용	금요일 대중교통	계
목요일 자가용	$7a$	$13a$	$20a$
목요일 대중교통	$8a$	$2a$	$10a$
계	$15a$	$15a$	$30a$

따라서 구하는 확률은  $\frac{7a}{15a} = \frac{7}{15}$ 이다.

22. 정답 6

함수  $y = \sqrt{2x}$ 의 그래프를  $x$ 축의 방향으로  $a$ 만큼 평행이동시키면 함수  $y = \sqrt{2(x-a)}$ 의 그래프가 된다.

$\sqrt{2(x-a)} = \sqrt{2x-12}$ 에서  $2x-2a = 2x-12$ 이어야 하므로

$$\therefore a = 6$$

23. 정답 8

급수  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 8)$ 이 수렴하므로  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 8) = 0$ 이다.

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{(a_n - 8) + 8\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 8) + \lim_{n \rightarrow \infty} 8 \\ &= 0 + 8 = 8 \end{aligned}$$

24. 정답 84

등차수열  $\{a_n\}$ 의 공차를  $d$ 라 하면

$$a_{20} - a_{17} = (a_1 + 19d) - (a_1 + 16d) = 3d = 12$$

이므로  $d = 4$

$$\therefore a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 4a_1 + 18d = 4 \times 3 + 18 \times 4 = 84$$

25. 정답 25

확률변수  $X$ 가 이항분포  $B(64, p)$ 를 따르므로

$$V(X) = 64p(1-p) = 12$$

$$16p^2 - 16p + 3 = 0, (4p-1)(4p-3) = 0$$

$0 < p < \frac{1}{2}$ 이므로  $p = \frac{1}{4}$ 이다.

$$\therefore 100p = 25$$

26. 정답 19

모든 실수  $x$ 에 대하여  $xf(x) = x^2 + \int_1^x f(t)dt \dots \dots \textcircled{1}$

$\textcircled{1}$ 의 양변을  $x$ 로 미분하면  $f(x) + xf'(x) = 2x + f(x)$

즉  $xf'(x) = 2x$ 에서  $f'(x) = 2$ 이다.

$\textcircled{1}$ 에  $x = 1$ 을 대입하면  $f(1) = 1$ 이므로  $f(x) = 2x - 1$ 이다.

$$\therefore f(10) = 19$$

27. 정답 12

$q$ 는  $p$ 이기 위한 필요조건, 즉  $p \Rightarrow q$ 이라면  $a \leq -1$ 이고  $a + 15 \geq 11$ 이어야 한다.

$$\therefore -4 \leq a \leq -1$$

$r$ 는  $p$ 이기 위한 충분조건, 즉  $r \Rightarrow p$ 이라면

$(b \geq -1$ 이고  $b + 3 \leq 5)$  또는  $(b \geq 7$ 이고  $b + 3 \leq 11)$ 이어야 한다.

$$\therefore -1 \leq b \leq 2 \text{ 또는 } 7 \leq b \leq 8$$

따라서  $a$ 의 최솟값은  $-4$ ,  $b$ 의 최댓값은  $8$ 이므로

구하는  $b - a$ 의 최댓값은  $8 - (-4) = 12$ 이다.

28. 정답 110

점  $P$ 의 좌표를  $(t, \frac{1}{2}t^2 - n)$ 이라 할 때,  $\overline{PP'}$ 의 값을  $g(t)$ 라 하면

(단,  $t$ 는 실수)

원  $x^2 + (y-1)^2 = 1$ 의 반지름의 길이는  $1$ 이고 중심을  $C(0, 1)$ 이라 하면

$$\begin{aligned} g(t) &= \overline{CP^2} - \overline{CP'^2} \\ &= \sqrt{t^2 + \left(\frac{1}{2}t^2 - n - 1\right)^2} - 1^2 \\ &= \frac{1}{4}t^4 - nt^2 + n^2 + 2n \\ &= \left(\frac{1}{2}t^2 - n\right)^2 + 2n \end{aligned}$$

따라서 함수  $g(t)$ 는  $\frac{1}{2}t^2 - n = 0$ , 즉  $t = \pm \sqrt{2n}$ 일 때 최솟값

$2n$ 을 갖는다.

$$\therefore \sum_{n=1}^{10} f(n) = \sum_{n=1}^{10} 2n = 2 \times \frac{10 \times 11}{2} = 110$$

다른풀이

점  $P$ 의 좌표를  $(t, \frac{1}{2}t^2 - n)$ 이라 할 때,  $\overline{PP'}$ 의 값을  $g(t)$ 라 하면

(단,  $t$ 는 실수)

원  $x^2 + (y-1)^2 = 1$ 의 반지름의 길이는 1이고 중심을  $C(0,1)$ 이라 하면

$$\begin{aligned} g(t) &= \overline{CP^2} - \overline{CP'^2} \\ &= \sqrt{t^2 + \left(\frac{1}{2}t^2 - n - 1\right)^2} - 1^2 \\ &= \frac{1}{4}t^4 - nt^2 + n^2 + 2n \end{aligned}$$

$$g'(t) = t^3 - 2nt = t(t^2 - 2n)$$

이때 함수  $g(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

$t$	...	$-\sqrt{2n}$	...	0	...	$\sqrt{2n}$	...
$g'(t)$	-	0	+	0	-	0	+
$g(t)$	$\searrow$	$2n$	$\nearrow$	$n^2 + 2n$	$\searrow$	$2n$	$\nearrow$

따라서 함수  $g(t)$ 는  $t = \pm \sqrt{2n}$ 에서 극솟값이자 최솟값인  $2n$ 을 갖는다.

$$\therefore \sum_{n=1}^{10} f(n) = \sum_{n=1}^{10} 2n = 2 \times \frac{10 \times 11}{2} = 110$$

### 29. 정답 30

[해설]  $3 \leq a_1 + a_2 + a_3 \leq 18$ 이므로  $3 \leq 7a_4 \leq 18$

$$\frac{3}{7} \leq a_4 \leq \frac{18}{7} \text{에서 } a_4 = 1 \text{ 또는 } a_4 = 2 \text{이다.}$$

(i)  $a_4 = 1$ 일 때,  $a_1 + a_2 + a_3 = 7$ 이고

$$7 = 5 + 1 + 1 = 4 + 2 + 1 = 3 + 3 + 1 = 3 + 2 + 2$$

이므로 순서쌍  $(a_1, a_2, a_3, a_4)$ 의 개수는

$$\frac{3!}{2!} + 3! + \frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!} = 3 + 6 + 3 + 3 = 15$$

(ii)  $a_4 = 2$ 일 때,  $a_1 + a_2 + a_3 = 14$ 이고

$$14 = 6 + 6 + 2 = 6 + 5 + 3 \\ = 6 + 4 + 4 = 5 + 5 + 4$$

이므로 순서쌍  $(a_1, a_2, a_3, a_4)$ 의 개수는

$$\frac{3!}{2!} + 3! + \frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!} = 3 + 6 + 3 + 3 = 15$$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍  $(a_1, a_2, a_3, a_4)$ 의 개수는  $15 + 15 = 30$

### 30. 정답 73

[해설] 조건 (가)에 의해 함수  $y=f(x)$ 의 그래프가 두 점  $(a, b)$ ,  $(b, a)$ 를 모두 지나야 하므로 함수  $y=f(x)$ 의 그래프는 직선  $y=x$ 에 대하여 대칭이다. 두 조건 (나), (다)를 만족시키는 다항함수  $g(x)$ 를 먼저 구해보자.

양변을  $x$ 에 대하여 미분하면

$$g(x) = 2g(x)g'(x)$$

임의의 실수  $x$ 에 대하여 성립하므로

$$g'(x) = \frac{1}{2} \quad (\because g(x) \text{는 상수함수가 아니다.})$$

$$g(x) = \frac{1}{2}x + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})$$

$$g(1) = 0 \text{이므로 } C = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore g(x) = \frac{1}{2}(x-1)$$

$$x \leq 0 \text{일 때, } f(x) = 2 \int_1^x g(t)dt - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}x^2 - x$$

$x > 0$ 일 때,  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x$  ( $x \leq 0$ )를 직선  $y=x$ 에 대하여 대칭 이동한 것이므로

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - x & (x \leq 0) \\ f^{-1}(x) & (x > 0) \end{cases}$$

$$\int_{-4}^4 |f(x)| dx$$

$$= \int_{-4}^0 \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right) dx + \int_0^4 |f^{-1}(x)| dx$$

$$= \int_{-4}^{-2} \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right) dx + \int_{-2}^0 f(x) dx - \int_{f(0)}^{f(-2)} f^{-1}(x) dx$$

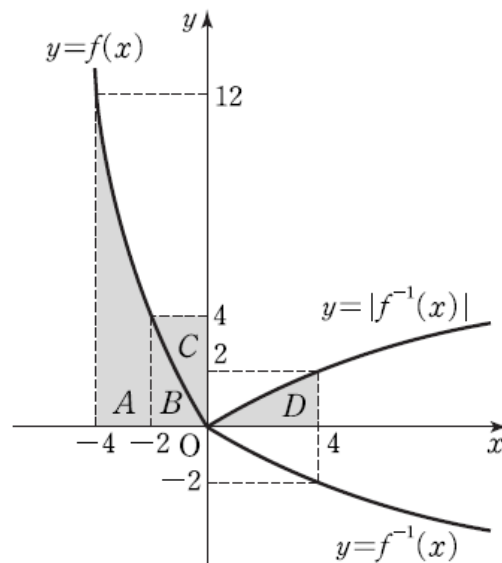
$$= \int_{-4}^{-2} \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right) dx + \left\{ \int_{-2}^0 f(x) dx + \int_{f(-2)}^{f(0)} f^{-1}(x) dx \right\}$$

$$= \left[ \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right]_{-4}^{-2} - (-2) \times f(-2)$$

$$= \frac{28}{3} + 6 + 8 = \frac{70}{3}$$

$$\therefore p + q = 73$$

### 참고



$$\int_{-4}^0 f(x) dx = A + B$$

$$\int_0^4 |f^{-1}(x)| dx = D = C$$

$$\therefore \int_{-4}^4 |f(x)| dx = A + B + C$$

$$= \int_{-4}^{-2} f(x) dx + 2 \times 4$$