제 3 교시 수학 가형

2018	수능	연계

1. 함수 $f(x)=(2x+1)e^{3x}$에 대하여 $f'(0)$의 값은?

[2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

수능완성	P 119	필수유형연계

2. 두 벡터 $\vec{a}=(-1,\ 4)$, $\vec{b}=(3,\ 2)$에 대하여 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$의 값은?

[2점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

수능특강	P 24	2번 연계

3. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\ln(1+4x)}$의 값은?

[2점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

수능완성	P 80	29번 연계

4. 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(B|A)=\frac{2}{3}$$

일 때, $\mathrm{P}(A\cap B^C)$의 값은? (단, B^C은 B의 여사건이다.)

[3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

수능완성	P 45	필수유형연계

5. $\int_{1}^{4} 5x\sqrt{x}\,dx$의 값은?

[3점]

① 56 ② 58 ③ 60
④ 62 ⑤ 64

수능특강	기벡 P75	유제3 연계

6. 좌표공간에서 두 점 A$(1,\ 2,\ -4)$, B$(4,\ -1,\ 2)$에 대하여 선분 AB를 $t:(1-t)$로 내분하는 점의 좌표가 $(a,\ b,\ -2)$일 때, $a-b$의 값은? (단, $0<t<1$)

[3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

수능완성	P 16	2번 연계

7. 호의 길이가 3π이고 넓이가 6π인 부채꼴의 중심각의 크기는?

[3점]

① $\dfrac{\pi}{2}$ ② $\dfrac{7}{12}\pi$ ③ $\dfrac{2}{3}\pi$
④ $\dfrac{3}{4}\pi$ ⑤ $\dfrac{5}{6}\pi$

수능완성	P 95	29번 연계

8. 정규분포 N$(\mathrm{m},\ \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 9인 표본을 임의 추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 하자. 확률변수 $\overline{X}$가 정규분포 N$(100,\ 2^2)$을 따를 때, $m+\sigma^2$의 값은?

[3점]

① 112 ② 120 ③ 128
④ 136 ⑤ 144

9. $x=0$에서 연속인 함수 $f(x)$가 $x>-e$인 모든 실수 x에 대하여 $xf(x)=\ln(x+e)-1$ 을 만족시킬 때, $f(0)$의 값은?

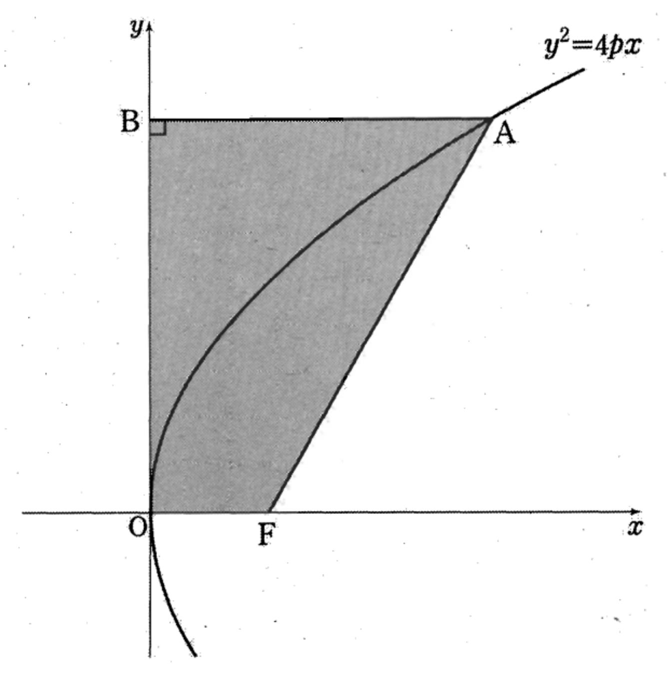
[3점]

① $\frac{1}{e^2}$ ② $\frac{1}{e}$ ③ 1

④ e ⑤ e^2

10. 그림과 같이 초점이 F인 포물선 $y^2=4px$위의 제 1사분면에 있는 점 A에서 y축에 내린 수선의 발을 B라 하자. $\overline{AF}=4\overline{OF}$이고, 사각형 $OFAB$의 넓이가 $20\sqrt{3}$일 때, 양수 p의 값은 ?(단, O는 원점이다.

[3점]



① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$

④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

수능완성	P 81	35번 연계

11. 두 사건 A, B가 서로 독립이고

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3},\ 2\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A^C\cap B^C)$$

일 때, $\mathrm{P}(B)$의 값은?(단, A^C는 A의 여사건이다.)

[3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$

④ $\frac{5}{12}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

수능완성	P 30	필수유형연계

12. 구간 $(0, \pi^2)$에서 정의된 함수 $f(x)=\cos\sqrt{x}$가 있다. 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g'(0)$의 값은?

[3점]

① $-\frac{\pi}{2}$ ② $-\frac{2}{3}\pi$ ③ $-\frac{5}{6}\pi$

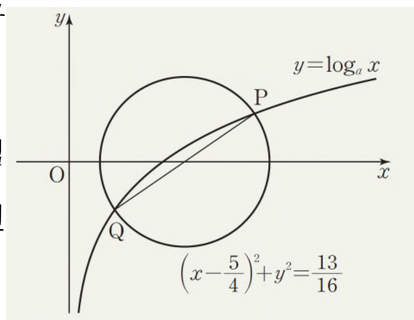
④ $-\pi$ ⑤ $-\frac{7}{6}\pi$

13. $k<0$인 상수 k에 대하여 방정식 $(\log_2 x)^2+3=k\log_2 x$의 서로 다른 두 근을 α, β라 하자. $\alpha:\beta=1:4$일 때, ak의 값은? [3 점]

① $-\frac{1}{4}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{1}{2}$
④ -1 ⑤ -2

2018	9월 모의평가	연계

14. $a>1$인 실수 a에 대하여 곡선 $y=\log_a x$와 원 $C:\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+y^2=\frac{13}{16}$의 두 교점을 P, Q라 하자. 선분 PQ가 원 C의 지름일 때, a의 값은? [4점]



① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4
④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

수능완성	P 139	37번 연계

15. 좌표공간에서 구 $x^2+y^2+z^2+2x-8y+16=0$과 구 $x^2+y^2+z^2-6x+4z+a=0$이 평면 α에 대하여 서로 대칭일 때, 평면 α가 y축과 만나는 점의 좌표는 $(0,\ b,\ 0)$이다. 두 실수 a, b의 곱 ab의 값은? [4점]

① 6 ② 9 ③ 12
④ 15 ⑤ 18

수능특강	확통 P 92	20번 연계

16. 확률변수 X가 평균이 10인 정규분포를 따르고

$$\mathrm{P}(X\le 20)=1-\mathrm{P}(0\le X\le 10)$$

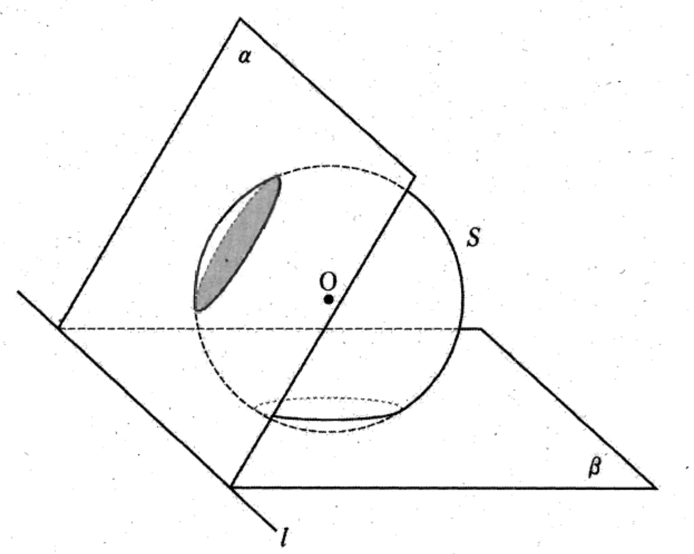
을 만족시킬 때, $\mathrm{P}(10\le X\le 20)$의 값은? [4점]

① 0.20 ② 0.25 ③ 0.30
④ 0.35 ⑤ 0.40

출제예감		

17. 그림과 같이 반지름의 길이가 4이고 중심이 O인 구 S와 교선이 l인 두 평면 α, β가 있다.
점 O에서 평면 α, 평면 β, 직선 l에 이르는 거리가 각각 3, 3, 6일 때, 구 S와 평면 α가 만나서 생기는 원의 평면 β 위로의 정사형의 넓이는 ?

[4점]



① $\frac{7\sqrt{3}\pi}{2}$ ② $\frac{7\sqrt{10}}{4}\pi$ ③ $\frac{7\sqrt{2}}{2}\pi$
④ $\frac{7\sqrt{6}\pi}{4}$ ⑤ $\frac{7}{2}\pi$

수능완성	P 65	29번 연계

18. 정의역이 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$이고 공역이 $Y=\{1, 2, 3\}$인 함수 $f : X \rightarrow Y$중에서 다음 조건을 만족시키는 함수의 개수는?

[4점]

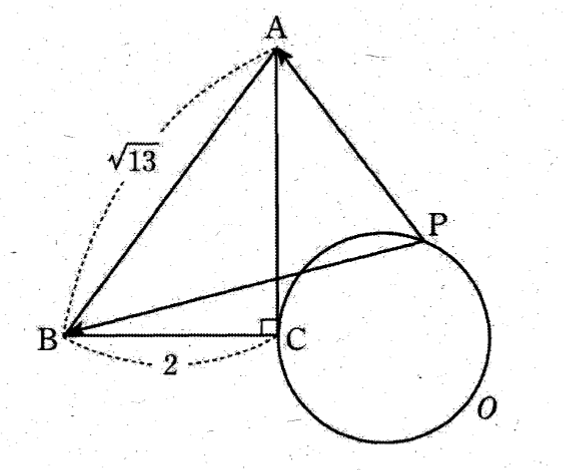
(가) 세 수 $f(1), f(2), f(3)$은 이 순서대로 등차수열을 이룬다.
(나) $f(3) \leq f(4) \leq f(5) \leq f(6)$

① 20 ② 22 ③ 24
④ 26 ⑤ 28

수능특강	기백 P 49	기출 연계

19. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{13}$, $\overline{\mathrm{BC}}=2$ 이고 $\angle \mathrm{C}=\frac{\pi}{2}$인 직각 삼각형 ABC가 있다. 직선 AC와 점 C에서 접하고 반지름의 길이가 1인 원 O 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}$ 의 최댓값은?

[4점]



① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

20. 실수 전체의 집합에서 미분 가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f'(-x)$이다.
> (나) $f(0)=2$, $f(\frac{\pi}{2})f(-\frac{\pi}{2})=-4$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{f(x)\}^2\,dx-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\{f(x)\}^2\,dx$의 값은?

[4점]

① 0 ② 4 ③ 8
④ 12 ⑤ 16

수능특강	P	연계

21. 함수 $f(x)=\dfrac{\ln(x^2+1)-\ln x}{x^2-x+1}$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[4점]

< 보기 >

ㄱ. 모든 양수 x에 대하여 $f(x)>0$이다.
ㄴ. 함수 $f(x)$는 구간 $(0,\ \infty)$에서 감소한다.
ㄷ. 방정식 $f(x)=\dfrac{1}{x}$의 실근이 존재한다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

수능완성	P 17	필수유형연계

22. $\sin\theta=\dfrac{4\sqrt{17}}{17}$일 때, $\sec^2\theta$의 값을 구하시오.

[3점]

수능특강	기벡 P 56	2번 연계

23. 좌표평면 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$의 시각 t에서의 위치가

$$\begin{cases} x=t^3+t \\ y=3e^{t-1} \end{cases}$$

이다. $t=1$일 때,의 점 P의 속력을 구하시오.

[3점]

수능특강	P 11	유제8 연계

24. 부등식

$$\log_2(x-2)^2 < \log_2(-x+22)$$

를 만족시키는 모든 정수 x 의 값의 합을 구하시오.

[3점]

수능특강	확통 P 79	9번 연계

25. $0 < p < \frac{1}{2}$ 일 때, 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(64,\ p)$ 를 따르고 X의 분산이 12이다. $100p$ 의 값을 구하시오.

[3점]

수능완성	P 19	12 연계

26. 자연수 n에 대하여 $-n\pi \le x \le n\pi$일 때, 방정식 $n\pi\sin 2nx - x = 0$의 서로 다른 실근의 개수를 a_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{6} a_n$의 값을 구하시오.

[4점]

수능완성	P 108	23번 연계

27. 쌍곡선 $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{2}=1$ 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선과 점 $(-a,\ b)$에서의 접선이 서로 수직일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a와 b는 상수이다.)

[4점]

수능완성	P 79	28번 연계

28. 어느 회사 전체 직원을 대상으로 목요일과 금요일에 자가용 및 대중교통 중 어떤 교통수단을 이용하여 출근하는지 조사하였다. 그 결과 목요일에는 자가용을 이용한 직원 수가 대중교통을 이용한 직원 수의 2배였고, 금요일에는 자가용을 이용한 직원 수와 대중교통을 이용한 직원 수가 서로 같았다. 또한, 전체 직원의 70%가 목요일과 금요일에 서로 다른 교통수단을 이용하였다. 금요일에 자가용을 이용하여 출근한 직원 중 임의로 한 명을 택할 때, 이 직원이 목요일에도 자가용을 이용하여 출근하였을 확률은 p이다. $60p$의 값을 구하시오. (단, 목요일과 금요일에 출근하는 전체 직원 수는 서로 같고, 모든 직원은 자가용 및 대중교통 중 어느 하나만을 이용하여 출근한다.)

[4점]

29. 좌표 공간 위의 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 직선 PQ는 평면 $z=3$에 포함되고,
평면 $x-\sqrt{3}y+3z=1$과 평행하다.
(나) 삼각형 OPQ는 한 변의 길이가 4인 정삼각형이다.

직선 PQ가 zx평면과 만나는 점을 A라 할 때, $\overline{\mathrm{OA}}^2$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)

[4점]

		킬러문제

30. 실수 전체의 집합에서 미분 가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f'(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고, 모든 실수 x에 대하여 $\frac{2}{e}< f'(1) \leq f'(x) \leq f'(2)$이다.
(나) 1 이상 2 이하의 모든 실수 t에 대하여
$f(t)-(t^2-t+1)e^{t-2}=\int_1^2 \frac{f(x)}{x}dx \times \int_1^t \frac{f(x)}{x}dx$
이다.

$\int_1^2 f(x)dx=2-\frac{1}{e}$일 때, $\int_0^3 f(x)dx$의 최댓값은 $p-\frac{q}{e}$이다. pq의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이다.)

[4점]

* 확인 사항
◦ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

정답 및 풀이

1. **정답** ⑤

$f(x)=(2x+1)e^{3x}$에서

$f'(x)=2e^{3x}+3(2x+1)e^{3x}=(6x+5)e^{3x}$

$\therefore\ f'(0)=5$

2. **정답** ②

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=(2,\ 6)\cdot(-4,\ 2)=2\times(-4)+6\times2=4$

3. **정답** ②

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{\ln(1+4x)}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{e^{2x}-1}{2x}\times\frac{4x}{\ln(1+4x)}\right\}=\frac{1}{2}$$

4. **정답** ①

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{2}{3}$에서 $\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{2}{3}$

$\therefore\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{3}\mathrm{P}(A)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B))=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

5. **정답** ④

$$\int_1^4 5x\sqrt{x}\,dx=\int_1^4 5x^{\frac{3}{2}}dx=\left[2x^{\frac{5}{2}}\right]_1^4$$

$$=2(4^{\frac{5}{2}}-1^{\frac{5}{2}})=2(2^5-1)=62$$

6. **정답** ①

선분 AB를 $t:(1-t)$로 내분하는 점의 좌표는

$(1+3t,\ 2-3t,\ 6t-4)$이므로 $6t-4=-2$에서 $t=\frac{1}{3}$이다.

따라서 내분하는 점의 좌표는 $(2,\ 1,\ -2)$이므로 $a=2,\ b=1$

$\therefore\ a-b=2-1=1$

7. **정답** ④

부채꼴의 반지름의 길이를 r, 중심각의 크기를 θ라 하면

부채꼴의 호의 길이는 $r\theta=3\pi$ …… ㉠

부채꼴의 넓이는 $\frac{1}{2}r^2\theta=6\pi$ …… ㉡

㉡÷㉠에서 $\frac{1}{2}r=2 \Rightarrow r=4$

㉠에서 $r=4$를 대입하면 $4\theta=3\pi$

$\therefore\ \theta=\frac{3}{4}\pi$

8. **정답** ④

모집단의 확률변수를 X라 하면, 크기가 9인 표본에 대하여 규분포 $\mathrm{N}(\mathrm{m},\ \sigma^2)$을 따를 때

$\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(\mathrm{m},\ \frac{\sigma^2}{9}\right)$을 따른다.

따라서 $m=100,\ \frac{\sigma^2}{9}=2^2$이므로

$\therefore m+\sigma^2=100+36=136$

9. **정답** ②

$\ln(x+e)-1=\ln(x+e)-\ln e=\ln\frac{x+e}{e}$이므로

$x\neq0$일 때 $f(x)=\dfrac{\ln\left(\frac{x}{e}+1\right)}{x}$이고,

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로 $f(0)=\lim_{x\to0}f(x)$이다.

$$\therefore f(0)=\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(\frac{x}{e}+1\right)}{x}$$

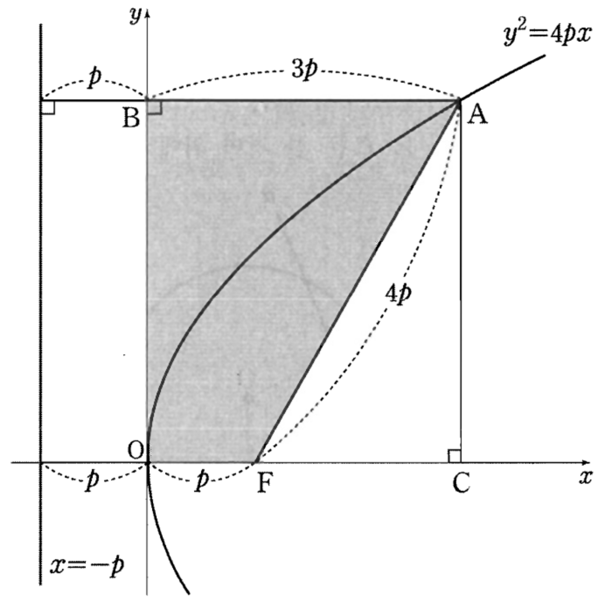
$$=\frac{1}{e}\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(\frac{x}{e}+1\right)}{\frac{x}{e}}=\frac{1}{e}\times1=\frac{1}{e}$$

참고

$t\to0$ 일 때 $\frac{\ln(t+1)}{t}\to1$ 이다.

10. **정답** ⑤

포물선 $y^2=4px$ 의 초점은 $F(p,\ 0)$, 준선의 방정식은 $\overline{OP}=p$ 이므로 $\overline{AF}=4p$이고, 포물선의 정의에 의하여 $\overline{AB}=4p-p=3p$이다.



점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 C라 하면 직각삼각형 FCA에서 $\overline{FC}=2p$이고 $\overline{AC}=\sqrt{(4p)^2-(2p)^2}=2\sqrt{3}\,p$

이므로 사다리꼴 $OFAB$의 넓이는

$$\frac{p+3p}{2}\times2\sqrt{3}p=4\sqrt{3}p^2=20\sqrt{3}$$

$\therefore p = \sqrt{5}$

11. **정답** ⑤

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}$이고 두 사건 A, B 가 서로 독립이므로

$=\frac{1}{3}+\mathrm{P}(B)-\frac{1}{3}\mathrm{P}(B)$

$=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\mathrm{P}(B)$

조건 $2\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A\cup B^C)$에서

$2\times\frac{1}{3}\mathrm{P}(B)=1-\left\{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\mathrm{P}(B)\right\}$, $\frac{4}{3}\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}$

$\therefore\ \mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$

다른 풀이

두 사건 A, B가 서로 독립이면 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이고

두 사건 A^C, B^C 도 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)$이다.

이때 $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}$이므로 $\mathrm{P}(A^C)=\frac{2}{3}$이고

조건 $2\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A^C\cap B^C)$에서

$2\times\frac{1}{3}\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}\{1-\mathrm{P}(B)\}$, $\frac{4}{3}\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}$

$\therefore\ \mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$

12. **정답** ④

$g(0)=a$라 하면 (단, a는 상수) $\cos\sqrt{a}=0\ (0<a<\pi^2)$에서

$a=\frac{\pi^2}{4}$이다.

함수 $f(x)=\cos\sqrt{x}$ 의 도함수는 $f'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}$ 이므로

$f'(x)=-\frac{1}{2\times\frac{\pi}{2}}\sin\frac{\pi}{2}=-\frac{1}{\pi}$이다.

$\therefore\ g'(0)=-\frac{1}{f'\left(\frac{\pi^2}{4}\right)}=-\pi$

13. **정답** ③

$(\log_2 x)^2+3=k\log_2 x$에서 $\log_3 x=t$로 놓으면식

$(\log_2 x)^2+3=k\log_2 x$의 두 근 α, β의 비가 $1:4$이므로 두 근을 α, 4α라 하면

로그의 진수조건에 의하여 $\alpha>0$이고, 이차방정식 $t^2-kt+3=0$의 두 근은 $\log_2\alpha$, $\log_2 4\alpha$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_2\alpha+\log_2 4\alpha=k$

즉, $2\log_2\alpha+2=k$ …… ㉠

$(\log_2\alpha)(\log_2 4\alpha)=3$

즉, $(\log_2\alpha)(\log_2\alpha+2)=3$ …… ㉡

㉡에서 $\log_2\alpha=s$로 놓으면

$s(2+s)=3$

$s^2+2s-3=0$

$(s-1)(s+3)=0$

$s=1$ 또는 $s=-3$

$s=1$, 즉 $\log_2\alpha=1$이면

㉠에서 $2\times1+2=4=k$이므로 $k<0$을 만족시키지 못한다.

$s=-3$, 즉 $\log_2\alpha=-3$이면

㉠에서 $2\times(-3)+2=-4=k$

이때 $\alpha=2^{-3}=\frac{1}{8}$이므로

$\alpha k=\frac{1}{8}\times(-4)=-\frac{1}{2}$

14. **정답** ③

$\mathrm{P}(p,\ \log_a p)$, $\mathrm{Q}(q,\ \log_a q)(p>q)$로 놓으면 선분 PQ의 중점이 $\left(\frac{5}{4},\ 0\right)$이므로 $\frac{p+q}{2}=\frac{5}{4}$, $\frac{\log_a p+\log_a q}{2}=0$에서

$p+q=\frac{5}{2}$, $pq=1$

p, q를 두 실근으로 갖는 t에 대한 이차방정식은

$t^2-\frac{5}{2}t+1=0$, $2t^2-5t+2=0$, $(2t-1)(t-2)=0$

$t=\frac{1}{2}$ 또는 $t=2$

따라서 $p=2$, $q=\frac{1}{2}$

이때 $\mathrm{P}(2,\ \log_a 2)$, $\mathrm{Q}\left(\frac{1}{2},\ -\log_a 2\right)$이고 선분 PQ의 길이가 원의 반지름의 길이 $\frac{\sqrt{13}}{2}$이므로

$\left(2-\frac{1}{2}\right)^2+\{\log_a 2-(-\log_a 2)\}^2=\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2$

$(\log_a 4)^2=1$

$a>1$이므로 $\log_a 4=1$에서 $a=4$

15. **정답** ①

구 $x^2+y^2+z^2+2x-8y+16=0$의 중심을 P라 하면 $\mathrm{P}(-1,\ 4,\ 0)$이고,

구 $x^2+y^2+z^2-6x+4z+a=0$의 중심을 Q라 하면

$(x-3)^2+y^2+(z+2)^2=13-a$에서 $\mathrm{Q}(3,\ 0,\ -2)$이다.

이 때 두 구의 반지름의 길이는 서로 같으므로

$1=13-a \Rightarrow a=12$

선분 PQ의 중점을 M이라 하면 M$(1, 2, -1)$이고

벡터 $\overrightarrow{PM}=(2, -2, -1)$은 평면 α의 법선벡터이므로

평면 α의 방정식을 $2x-2y-z=d$라 할 수 있다. (단, d는 상수)

점 M은 평명 α위의 점이므로 평면 α의 방정식에

$x=1$, $y=2$, $z=-1$을 대입하면 $d=-1$이다.

따라서 평면 $\alpha: 2x-2y-z=-1$이 y축과 만나는 점의 좌표는

$\left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$이다. $\Rightarrow b=\frac{1}{2}$

$\therefore ab=12\times\frac{1}{2}=6$

★참고

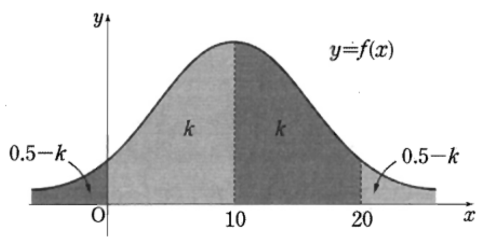
두 구 $x^2+y^2+z^2+2x-8y+16=0 \cdots\cdots$ ㉠
$x^2+y^2+z^2-6x+4z+12=0 \cdots\cdots$ ㉡에 대하여
㉠−㉡에서 $\alpha: 2x-2y-z+1=0$ 이다.

16. **정답** ②

확률변수 X가 평균이 10인 정규분포를 따르므로면

$P(0\le X\le 10)=k$, $P(X\le 0)=0.5-k$, $P(X\ge 20)=0.5-k$이다.

확률변수 X의 확률밀도함수를 $f(x)$라 하면



$P(X\le 20)=0.5+k$이고

$1-P(0\le X\le 10)=1-k$이므로

$0.5+k=1-k$에서 $k=0.25$이다.

$\therefore P(10\le X\le 20)=0.25$

17. **정답** ⑤

점 O에서 두 평면 α, β에 내린 수선의 발을 각각 A, B라 하면 두 평면 α, β와 만나서 생기는 원의 중심이 각각 A, B 이다. 구 S의 반지름의 길이는 4이고 $\overline{OA}=3$이므로

구 S와 평면 α가 만나서 생기는 원의 반지름의 길이는

$\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$이고 넓이는 7π이다.

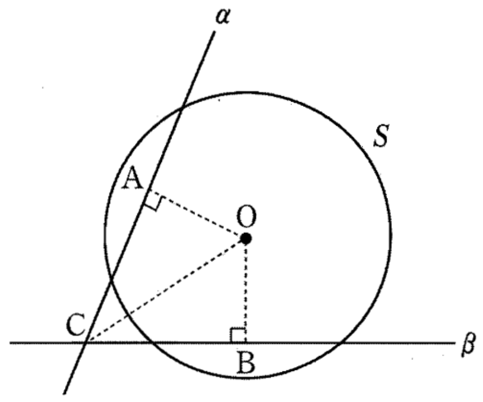
한편, 점 O에서 직선 l에 내린 수선의 발을 C라 하자.

직선 l은 평면 α 위에 있고 동시에 평면 β 위에 있으므로

삼수선의 정리에 의해 두 직선 l과 AC는 서로 수직이고

두 직선 l과 BC도 서로 수직이다.

따라서 네 점 O, A, B, C는 한 평면 위에 있다.



$\overline{OA}=\overline{OB}=3$이고 $\overline{OC}=6$이므로 $\angle OCA=\angle OCB=\frac{\pi}{6}$

이다. $\angle ACB=\frac{\pi}{3}$이므로 두 평면 α, β가 이루는 예각의 크기는

$\frac{\pi}{3}$이다. 따라서 구하는 정사형의 넓이는 $7\pi\times\cos\frac{\pi}{3}=\frac{7}{2}\pi$이다.

18. **정답** ④

i) $f(3)=1$인 경우순서쌍 $(f(1), f(2))$는 $(1, 1)$, $(3, 2)$로 2개,

순서쌍 $(f(4), f(5), f(6))$은 ${}_3H_3=10$개다.

ii) $f(3)=2$인 경우

순서쌍 $(f(1), f(2))$는 $(2, 2)$로 1개,

순서쌍 $(f(4), f(5), f(6))$은 ${}_2H_3=4$개다.

iii) $f(3)=3$인 경우

순서쌍 $(f(1), f(2))$는 $(1, 2)$, $(3, 3)$으로 2개,

순서쌍 $(f(4), f(5), f(6))$은 ${}_1H_3=1$개다.

따라서 구하는 함수 f의 개수는 $2\times10+1\times4+2\times1=26$

19. **정답** ②

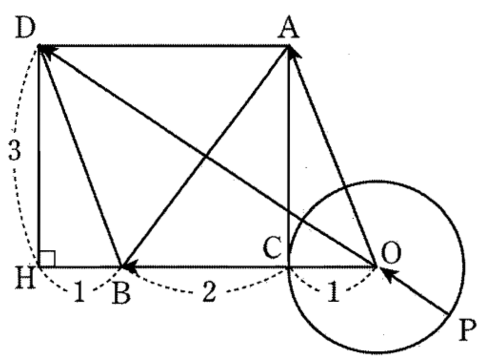
직각삼각형 ABC에서 $\overline{AC}=\sqrt{\sqrt{13^2-2^2}}=3$이다. 의 중심을 O라 하면

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OB})$

$=|\overrightarrow{PO}|^2+(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} \quad \cdots\cdots$ ㉠

점 P는 반지름의 길이가 1인 원 O위의 점이므로 $|\overrightarrow{PO}|=1$이다.

한편, 그림과 같이 $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BD}$ 를 만족시키는 점 D에서 직선 BC에 내린 수선의 발을 H라 하자.



$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}$ 이고

직각삼각형 OHD에서 $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\sqrt{3^2+4^2}=5$ 이므로

두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OD}}, \overrightarrow{\mathrm{PO}}$ 의 방향이 서로 같을 때

$\overrightarrow{\mathrm{OD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PO}}$ 는 최댓값 $|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|\times|\overrightarrow{\mathrm{PO}}|=5\times1=5$를 갖는다.

또한, $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\times|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=1\times3=3$이므로

구하는 ㉠의 최댓값은 $1^2+5+3=9$이다.

20. **정답** ③

조건 (가)에서수 x에 대하여 $f'(x)=f(-x)$ …㉠

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{f(x)\}^2\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f'(x)f(-x)\,dx \ (\because \text{ 조건 (가)})$$

$$=[-f(x)f(-x)]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}f'(x)f(-x)\,dx$$

$$=-f\left(\frac{\pi}{2}\right)f\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\{f(0)\}^2+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{f(-x)\}^2\,dx \ (\because \text{㉠})$$

이때 조건 (나)에 의하여 $-f\left(\frac{\pi}{2}\right)f\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\{f(0)\}^2=8$이고

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{f(-x)\}^2\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\{f(t)\}^2\,dt$이므로($\because -x=t$로 치환)

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{f(x)\}^2\,dx=8+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\{f(t)\}^2\,dt$이다.

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}}\{f(x)\}^2\,dx-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\{f(x)\}^2\,dx=8$$

21. **정답** ③

로그의 진수 조건에 의해 함수 $f(x)=\dfrac{\ln(x^2+1)-\ln x}{x^2-x+1}$는 정의된다.

ㄱ. 항상 $x^2-x+1=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$이고

$x^2+1>x$이므로 $\ln(x^2+1)>\ln x$

따라서 항상 $\ln(x^2+1)-\ln x>0$이므로

모든 양수 x에 대하여 $f(x)>0$이다. (참)

ㄴ. 함수 $g(x)=\ln x$에 대하여 $f(x)=\dfrac{g(x^2+1)-g(x)}{(x^2+1)-x}$이다.

이때 곡선 $y=g(x)$는 위로 볼록하므로

두 양수 $a,\ b(a<b)$에 대하여

$\dfrac{g(a^2+1)-g(a)}{(a^2+1)-a}>\dfrac{g(b^2+1)-g(b)}{(b^2+1)-b}$,

즉 $f(a)>f(b)$가 성립한다.

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(0,\ \infty)$에서 감소한다. (참)

ㄷ. 함수 $g(x)=\ln x$에 대하여 $g'(x)=\dfrac{1}{x}$이므로

평균값 정리에 의하여 $\dfrac{g(x^2+1)-g(x)}{(x^2+1)-x}=\dfrac{1}{c}$인 실수 $c(x<c<x^2+1)$가 존재한다.

이때 x는 임의의 양수이고 $x<\dfrac{1}{f(x)}<x^2+1$, 즉

$\dfrac{1}{x^2+1}<f(x)<\dfrac{1}{x}$이므로

방정식 $f(x)=\dfrac{1}{x}$의 실근은 존재하지 않는다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

22. **정답** 17

$\sin\theta=\dfrac{4\sqrt{17}}{17}$이므로 $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=\dfrac{1}{17}$

23. **정답** 5

$x=t^3+t$에서 $\dfrac{dx}{dt}=3t^2+1$이고 $\dfrac{dy}{dt}=3e^{t-1}$이므로

$t=1$일 때의 점 P의 속도는 $(4,\ 3)$이다.

따라서 $t=1$일 때의 점 P의 속력은 $\sqrt{4^2+3^2}=5$이다.

24. **정답** 10

진수의 조건에 의해 $x\neq2,\ x<22$ ……㉠

$(x-2)^2<-x+22,\quad x^2-3x-18<0$

$-3<x<6$ ……㉡

㉠, ㉡을 모두 만족시키는 정수 x의 값의 합은

$(-2)+(-1)+0+1+3+4+5=10$ 이다.

25. **정답** 25

확률변수 X가 이항분포 $B(64,\ p)$를 따르므로

$(4p-1)(4p-3)=0$

$0<p<\dfrac{1}{2}$ 이므로 $p=\dfrac{1}{4}$ 이다.

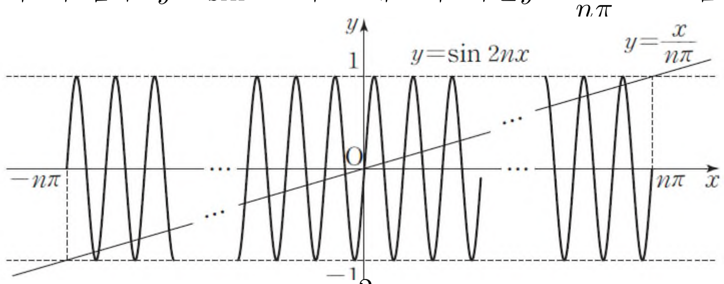
$\therefore 100p=25$

26. **정답** 358

$n\pi\sin2nx-x=0$에서 $\sin2nx=\dfrac{x}{n\pi}$이므로

$-n\pi\le x\le n\pi$일 때 이 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=\sin2nx$의 그래프와 직선 $y=\dfrac{x}{n\pi}$의 교점의 개수와 같다.

이 때 함수 $y=\sin2nx$의 그래프와 직선$y=\dfrac{x}{n\pi}$는 그림과 같다.



함수 $y=\sin2nx$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{2n}=\dfrac{\pi}{n}$

또 주어진 구간의 길이가 $n\pi-(-n\pi)=2n\pi$이므로
$\dfrac{2n\pi}{\frac{\pi}{n}}=2n^2$
즉, $-n\pi\le x\le n\pi$에서 함수 $y=\sin 2nx$의 그래프는 한 주기에 속하는 구간 $\left[0,\ \frac{\pi}{n}\right]$에서의 그래프가 $2n^2$번 반복된다.
이때 각각의 주기에서 2개의 교점이 존재하는데 $x=0$에서의 교점은 구간 $\left[-\frac{\pi}{n}, 0\right]$과 구간 $\left[0, \frac{\pi}{n}\right]$에 모두 포함된다.
따라서 서로 다른 교점의 개수는 $2n^2\times2-1=4n^2-1$ 이므로
$a_n=4n^2-1$
$\sum_{n=1}^{6}a_n=\sum_{n=1}^{6}(4n^2-1)=4\times\dfrac{6\times7\times13}{6}-6=358$

27. **정답** 13

두 점 $(a,\ b)$, $(-a,\ b)$는 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{2}=1$위의 점이므로

$b^2=\dfrac{2}{3}a^2-2$ …… ㉠

등식 $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{2}=1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\dfrac{2x}{3}-yy'=0$, 즉 $y'=\dfrac{2x}{3y}$이므로 (단, $y\ne0$)

점 $(a,\ b)$에서의 접선의 기울기는 $\dfrac{2a}{3b}$이고

점 $(-a,\ b)$에서의 접선의 기울기는 $-\dfrac{2a}{3b}$이다.

따라서 두 접선이 서로 수직이려면

$\dfrac{2a}{3b}\times\left(-\dfrac{2a}{3b}\right)=-1$, 즉 $b^2=\dfrac{4}{9}a^2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a^2=9$, $b^2=4$이므로 $a^2+b^2=13$

28. **정답** 28

이 회사 전체 직원 수를 $30a$라 하면는 자가용을 이용한 직원 수가 대중교통을 이용한 직원 수의 2배이므로

목요일에 자가용, 대중교통을 이용한 직원 수는 각각 $20a$, $10a$이고 금요일에는 자가용을 이용한 직원 수와 대중교통을 이용한 직원 수가 서로 같으므로 금요일에 자가용, 대중교통을 이용한 직원 수는 각각 $15a$, $15a$이다.

전체 직원의 70%인 $21a$명이 목요일과 금요일에 서로 다른 교통수단을 이용하였으므로 목요일에 자가용을 이용하고 금요일에 대중교통을 이용한 직원 수를 x라 하면 목요일에 대중교통을 이용하고 금요일에 자가용을 이용한 직원 수는 $21a-x$이다.

구분	금요일 자가용	금요일 대중교통	계
목요일 자가용		x	$20a$
목요일 대중교통	$21a-x$		$10a$
계	$15a$	$15a$	$30a$

위의 표에서 목요일과 금요일 모두 자가용을 이용한 직원 수는

$15a-(21a-x)=20a-x$

이므로 $x=13a$이다.

구분	금요일 자가용	금요일 대중교통	계
목요일 자가용	$7a$	$13a$	$20a$
목요일 대중교통	$8a$	$2a$	$10a$
계	$15a$	$15a$	$30a$

따라서 구하는 확률은 $p=\dfrac{7a}{15a}=\dfrac{7}{15}$이다.

$\therefore 60p=28$

29. **정답** 21

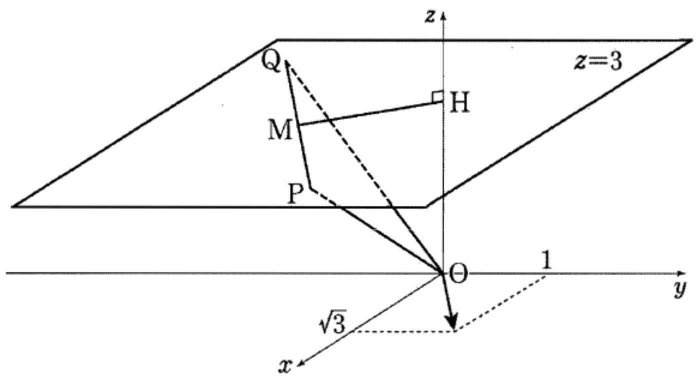
직선 PQ가 xy평면과 평행한 평면 $z=3$에 포함되므로 방향벡터를 $\vec{d}=(a,b,0)$이라 하면 (단, a, b는 실수)

직선 PQ가 평면 $x-\sqrt{3}y+3z=1$과 평행하므로

$(a,b,0)\bullet(1,-\sqrt{3},3)=0\ \Rightarrow\ a=\sqrt{3}b$

따라서 $\vec{d}=(\sqrt{3},1,0)$이라 할 수 있다.

선분 PQ의 중점을 M이라 하고, 점 M에서 z축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{OH}=3$ 이다.

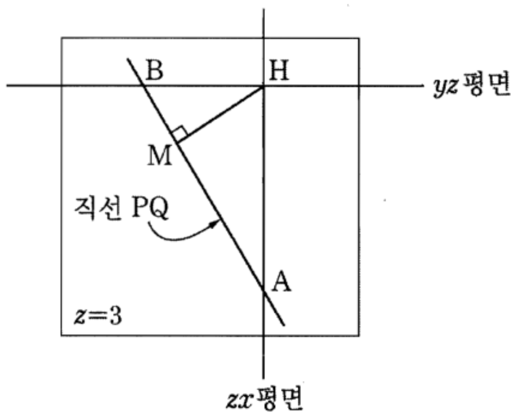


정삼각형 OPQ의 한 변의 길이가 4이므로 $\overline{OM}=2\sqrt{3}$ 이고

직각삼각형 OHM에서 $\overline{HM}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2-3^2}=\sqrt{3}$ 이다.

이때 삼수선의 정리에 의하여 두 직선 PQ, HM은 서로 수직이다.

한편 직선 PQ가 zx평면과 만나는 점이 A이고, 직선 PQ가 yz평면과 만나는 점을 B라 하면



직각삼각형 AHB에서 $\angle BAH=\dfrac{\pi}{6}$이므로 $\left(\because \vec{d}=(\sqrt{3},1,0)\right)$

$\overline{HA}=\overline{HM}\times\csc\dfrac{\pi}{6}=\sqrt{3}\times2=2\sqrt{3}$ 이다.

$\therefore \overline{OA}^2=\overline{OH}^2+\overline{HA}^2=9+12=21$

참고

주어진 조건을 만족시키는 직선 PQ는 2개다. 위 풀이의 그림에

서의 직선 PQ를 점 H에 대하여 대칭이동시킨 것도 존재하지만, 구하는 답($\overline{OA}^2$의 값)은 다르지 않다.

30. 정답 15

$\int_1^2 \frac{f(x)}{x}dx = k$ (k는 상수)라 하면 조건 (나)에서 $1 \le t \le 2$일 때, $f(t)-(t^2-t+1)e^{t-2} = k \times \int_1^t \frac{f(x)}{x}dx$ ⋯㉠

㉠에 $t=1$을 대입하면 $f(1)-\frac{1}{e}=0 \Rightarrow f(1)=\frac{1}{e}$

㉠에 $t=2$를 대입하면 $f(2)-3=k^2 \Rightarrow f(2)=k^2+3$

㉠의 양변을 t로 미분하면

$1<t<2$일 때 $f'(t)-(t^2+t)e^{t-2} = k \times \frac{f(t)}{t}$

두 함수 $f(x)$와 $f'(x)$는 모두 $x=1$, $x=2$에서 연속이므로 (∵ 조건(가))

$1 \le t \le 2$일 때 $f'(t)-(t^2+t)e^{t-2} = k \times \frac{f(t)}{t}$ ⋯⋯ ㉡

㉡에 $t=1$을 대입하면 $f'(1)-\frac{2}{e}-kf(1) \Rightarrow f'(1)=\frac{k+2}{e}$

이때 조건 (가)에 의하여 $k>0$이어야 한다. ⋯⋯ ㉢

㉡에 $t=2$를 대입하면

$f'(2)-6=\frac{k}{2}f(2) \Rightarrow f'(2)=\frac{k}{2}(k^2+3)+6$

㉡에서 $1 \le t \le 2$일 때 $tf'(t)-(t^3+t^2)e^{t-2}=kf(t)$이므로

$\int_1^2 tf'(t)dt - \int_1^2 (t^3+t^2)e^{t-2}dt = k\int_1^2 f(t)dt$ ⋯⋯ ㉣

$\int_1^2 tf'(t)dt = [tf(t)]_1^2 - \int_1^2 f(t)dt$

$=\{2f(2)-f(1)\}-\int_1^2 f(t)dt$

$=\left(2k^2+6-\frac{1}{e}\right)-\left(2-\frac{1}{e}\right)=2k^2+4$

$\int_1^2 (t^3+t^2)e^{t-2}dt = \left[(t^3-2t^2+4t-4)e^{t-2}\right]_1^2 = 4+\frac{1}{e}$

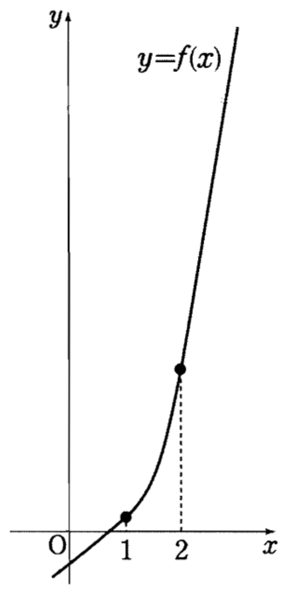
$k\int_1^2 f(t)dt = k\left(2-\frac{1}{e}\right)=2k-\frac{k}{e}$

㉣에서 $(2k^2+4)-\left(4+\frac{1}{e}\right)=2k-\frac{k}{e}$

즉 $2k(k-1)=-\frac{1}{e}(k-1)$에서 $k=1$ 또는 $k=-\frac{1}{2e}$이다.

이때 ㉢에 의하여 $k=1$이다.

따라서 $f(1)=\frac{1}{e}$, $f(2)=4$, $f'(1)=\frac{3}{e}$, $f'(2)=8$이다.



조건 (가)에 의하여 $0 \le x \le 1$에서 $f'(x)=f'(1)$이고 $2 \le x \le 3$에서 $f'(x)=f'(2)$일 때 $\int_0^3 f(x)dx$의 값이 최대이다.

따라서 $\int_0^3 f(x)dx$의 최댓값은

$\int_0^1 \left(\frac{3}{e}x-\frac{2}{e}\right)dx + \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 (8x-12)dx$

$=\left(-\frac{1}{2e}\right)+\left(2-\frac{1}{e}\right)+8=10-\frac{3}{2e}$

$\therefore pq = 10 \times \frac{3}{2} = 15$