2019학년도 9월 평가원 나형 30번 해설

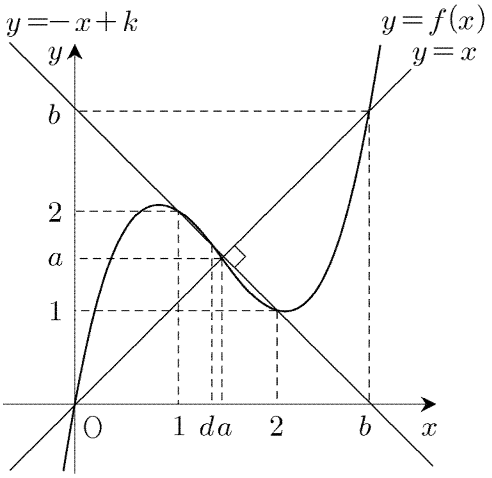
[풀이]
우선 문제에서 주어진 방정식이 가진 성질에 대하여 알아보자.
p가 문제에서 주어진 방정식의 실근이라고 하면
$f(f(p))=p$
이다. 이때, $f(p)=q$라고 하면
$f(p)=q$, $f(q)=p$
이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 두 점 (p, q), (q, p)를 모두 지난다.
그리고 $f(f(q))=f(p)=q$이므로
$x=q$는 방정식 $f(f(x))=x$의 실근이다.

- $p=q$인 경우

점 (p, q)는 직선 $y=x$ 위에 있다.

- $p\neq q$인 경우

두 점 (p, q), (q, p)는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 다음이 성립한다.
(수직) 두 점 (p, q), (q, p)를 잇는 직선의 기울기는 $-1\left(=\dfrac{p-q}{q-p}\right)$이므로 두 점 (p, q), (q, p)는 직선 $y=-x+k$(단, k는 상수) 위에 있다.
(중점) 두 점 (p, q), (q, p)를 잇는 선분의 중점 $\left(\dfrac{p+q}{2}, \dfrac{p+q}{2}\right)$는 직선 $y=x$ 위에 있다.
문제에서 주어진 조건에 의하여 다음이 성립한다.
$\{0, 1, a, 2, b\}$
$=\{f(0), f(1), f(a), f(2), f(b)\}$
방정식 $f(f(x))=x$의 해집합에 속하는 서로 다른 두 원소 p, q에 대하여 $f(p)=q$, $f(q)=p$가 되도록 하는 순서쌍 (p, q)의 개수는 최소 0개, 최대 2개다.
순서쌍 (p, q)의 개수가 0일 때, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 개수는 5이다. 하지만 삼차방정식 $f(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수의 최댓값은 3이므로 이는 가정에 모순이다. 따라서 순서쌍 (p, q)의 개수는 1 또는 2이다.
순서쌍 (p, q)의 개수가 1일 때, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 개수는 3이다.
순서쌍 (p, q)의 개수가 2일 때, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 개수는 1이다. (←[참고4]에서 가능하지 않음을 증명함)
이제 함수 $f(x)$의 그래프의 개형에 대하여 생각하자.
삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이고, $f'(1)<0$이므로 함수 $f(x)$는 극값을 갖는다.
아래 그림처럼 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$가 세 점에서 만나고, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-x+k$가 세 점에서 만난다고 하자. 이때, 세 교점 중에서 x좌표가 1, 2가 아닌 점의 x좌표를 d라고 하자. (←$d=1$ 또는 $d=2$인 경우가 성립하지 않음은 [참고3]에서 증명함)
(※ 만약 $d=a$이면 $x=d$는 방정식 $f(f(x))=x$의 해이지만, $d\neq a$이면 $x=d$는 방정식 $f(f(x))=x$의 해가 아니다.)



(※ d의 값은 a의 값 보다 클 수도 있고, a의 값과 같을 수도 있고, a의 값 보다 작을 수도 있다. 위의 그림은 d의 값이 a의 값 보다 작은 경우만을 그린 것이다.)

$f(0)=0$, $f(a)=a$, $f(b)=b$이므로

$f(1)=2$, $f(2)=1$일 수 밖에 없다.

인수정리에 의하여

$f(x)-(-x+k)=c(x-1)(x-d)(x-2)$

(단, c는 양의 상수)

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=c(x-1)(x-d)(x-2)-x+k$

$f(1)=-1+k=2$에서 $k=3$

$f(0)=-2cd+k=0$에서 $d=\dfrac{3}{2c}$

함수 $f(x)$의 방정식은

$$f(x)=c(x-1)\left(x-\frac{3}{2c}\right)(x-2)-x+3$$

함수 $f(x)$의 도함수는

$$f'(x)=c\left(x-\frac{3}{2c}\right)(x-2)+c(x-1)(x-2)$$

$$+c(x-1)\left(x-\frac{3}{2c}\right)-1$$

문제에서 주어진 조건에 의하여

$$f'(0)-f'(1)=2c+\frac{7}{2}-\left(-c+\frac{1}{2}\right)$$

$3c+3=6$에서 $c=1$

함수 $f(x)$의 방정식은

$$f(x)=(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right)(x-2)-x+3$$

방정식 $f(x)=x$를 정리하면

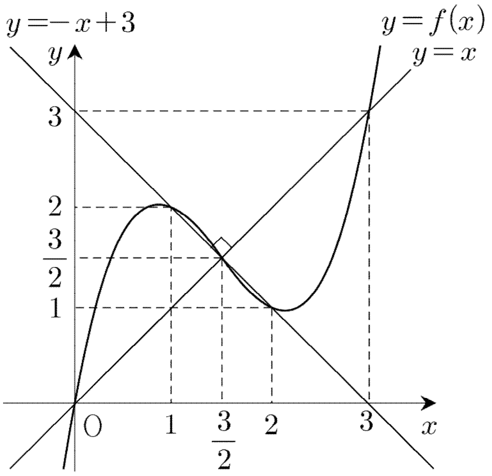
$x\left(x-\frac{3}{2}\right)(x-3)=0$

풀면

$x=0,\ x=\frac{3}{2}(=a=d),\ x=3(=b)$

이므로 a, b, d의 존재성을 확인할 수 있다.

함수 $y=f(x)$의 그래프는



$\therefore\ f(5)=40$

※ 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 개수가 2 또는 1인 경우는 성립하지 않음은 [참고4]에서 증명하였습니다.

답 40

[참고1]

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수일 때,

'모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이다.'

$\Leftrightarrow$

'함수 $f(x)$는 증가한다.'

$\Leftrightarrow$

'함수 $f(x)$는 일대일대응이다.'

$\Leftrightarrow$

'함수 $f(x)$는 극값을 갖지 않는다.'

따라서 아래의 참인 명제를 생각할 수 있다.

'어떤 실수 t에 대하여 $f'(t)<0$이다.'

$\Leftrightarrow$

'함수 $f(x)$는 극값을 갖는다.'

[참고2]

함수 $f(x)$의 방정식을 다음과 같이 유도할 수도 있다.

인수정리에 의하여

$f(x)-x=cx(x-a)(x-b)$
(단, c는 양의 상수)
함수 $f(x)$의 방정식은
$f(x)=cx(x-a)(x-b)+x$
$f(1)=2$, $f(2)=1$이므로
$f(1)=c(1-a)(1-b)+1=2$,
$f(2)=2c(2-a)(2-b)+2=1$
정리하면

$1-a-b+ab=\frac{1}{c}$,

$4-2a-2b+ab=-\frac{1}{2c}$

위의 두 식을 변변히 빼서 정리하면

$a+b=3+\frac{3}{2c}$ …㉠

이를 위의 두 식 중 한 식에 대입하여 정리하면

$ab=2+\frac{5}{2c}$ …㉡

함수 $f(x)$의 도함수는
$f'(x)=c(x-a)(x-b)+cx(x-b)$
$+cx(x-a)+1$
$f'(0)=abc+1$,
$f'(1)=c(1-a)(1-b)+c(2-a-b)+1$
$=c(3-2a-2b+ab)+1$

$=c\left(3-6-\frac{3}{c}+2+\frac{5}{2c}\right)+1=-c+\frac{1}{2}$ ($\because$ ㉠, ㉡)

문제에서 주어진 조건에 의하여

$f'(0)-f'(1)=abc+c+\frac{1}{2}=6$

정리하면

$c(ab+1)=\frac{11}{2}$

$c\left(3+\frac{5}{2c}\right)=\frac{11}{2}$ ($\because$ ㉡)

정리하면

$3c+\frac{5}{2}=\frac{11}{2}$ 풀면 $c=1$

이를 ㉠, ㉡에 대입하면

$a+b=\frac{9}{2}$, $ab=\frac{9}{2}$

두 수 a, b는 이차방정식 $t^2-\dfrac{9}{2}t+\dfrac{9}{2}=0$의 서로 다른 두 실근이다.

이 이차방정식을 정리하면

$2t^2-9t+9=0$, $(2t-3)(t-3)=0$

풀면

$t=\dfrac{3}{2}(=a)$ 또는 $t=3(=b)$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=x\left(x-\dfrac{3}{2}\right)(x-3)+x$

$\therefore\ f(5)=40$

물론 a, b의 값을 각각 구하지 않고, $f(5)$의 값을 구할 수도 있다.

$f(5)=5c(5-a)(5-b)+5$

$=5\{25-5(a+b)+ab\}+5$

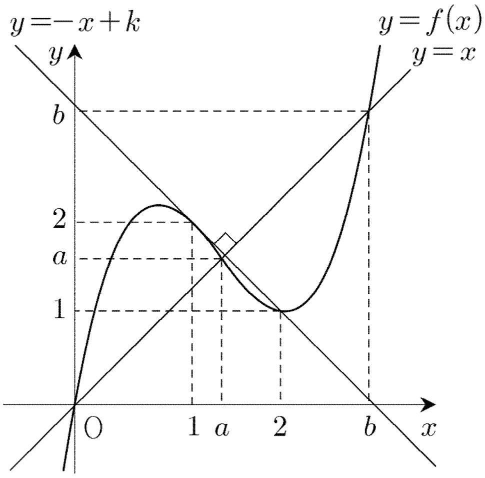
$=5\left\{25-5\times\dfrac{9}{2}+\dfrac{9}{2}\right\}+5$

$=40$

[참고3]

곡선 $y=f(x)$에 직선 $y=-x+k$가 접하는 경우에 대하여 생각해보자.

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 개수가 3이고, 직선 $y=-x+k$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 한 점에서 접한다고 하자. (단, 접점의 x좌표는 a보다 작다.) 이때, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-x+k$의 교점의 개수는 2이고, 이 2개의 교점은 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이어야 한다.



직선 $y=-x+k$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ 2)$에서 접하고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,\ 1)$을 지나므로 인수정리에 의하여

$f(x)-(-x+k)=c(x-1)^2(x-2)$

(단, c는 양의 상수)

정리하면

$f(x)=c(x-1)^2(x-2)-x+k$

곡선 $y=f(x)$가 원점을 지나므로

$0=-2c+k$에서 $k=2c$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=c(x-1)^2(x-2)-x+2c$

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=2c(x-1)(x-2)+c(x-1)^2-1$

문제에서 주어진 조건에 의하여

$f'(0)-f'(1)=5c-1-(-1)=5c=6$

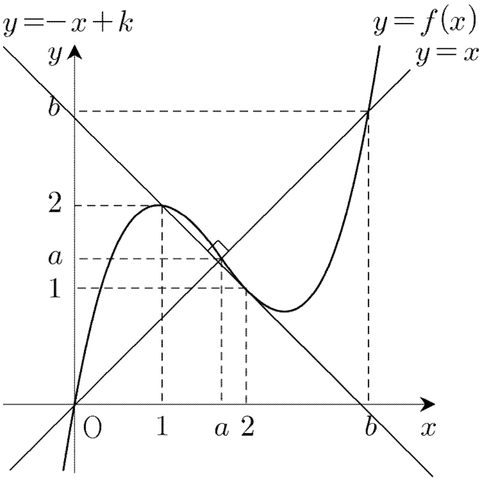
풀면 $c=\dfrac{6}{5}$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=\dfrac{6}{5}(x-1)^2(x-2)-x+\dfrac{12}{5}$

그런데 $f(1)=\dfrac{7}{5}\neq 2$이므로 이는 가정에 모순이다.

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 개수가 3이고, 직선 $y=-x+k$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 한 점에서 접한다고 하자. (단, 접점의 x좌표는 a보다 크다.) 이때, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-x+k$의 교점의 개수는 2이고, 이 2개의 교점은 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이어야 한다.



직선 $y=-x+k$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,\ 1)$에서 접하고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ 2)$을 지나므로 인수정리에 의하여

$f(x)-(-x+k)=c(x-1)(x-2)^2$

(단, c는 양의 상수)

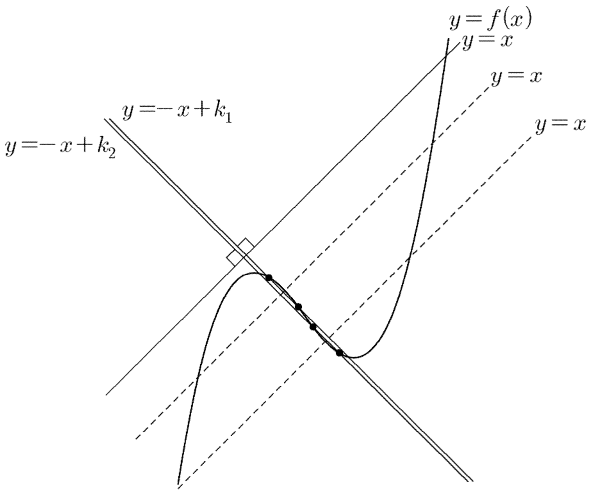
정리하면

$f(x)=c(x-1)(x-2)^2-x+k$

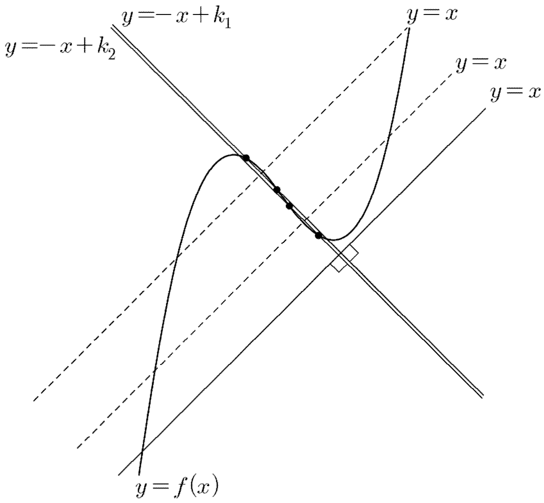
곡선 $y=f(x)$가 원점을 지나므로

$0=-4c+k$에서 $k=4c$
함수 $f(x)$의 방정식은
$f(x)=c(x-1)(x-2)^2-x+4c$
함수 $f(x)$의 도함수는
$f'(x)=c(x-2)^2+2c(x-1)(x-2)-1$
문제에서 주어진 조건에 의하여
$f'(0)-f'(1)=8c-1-(c-1)=7c=6$
풀면 $c=\dfrac{6}{7}$
함수 $f(x)$의 방정식은
$f(x)=\dfrac{6}{7}(x-1)(x-2)^2-x+\dfrac{24}{7}$
그런데 $f(1)=\dfrac{17}{7}\neq 2$이므로 이는 가정에 모순이다.

[참고4]
곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 개수가 1인 경우를 살펴보자.

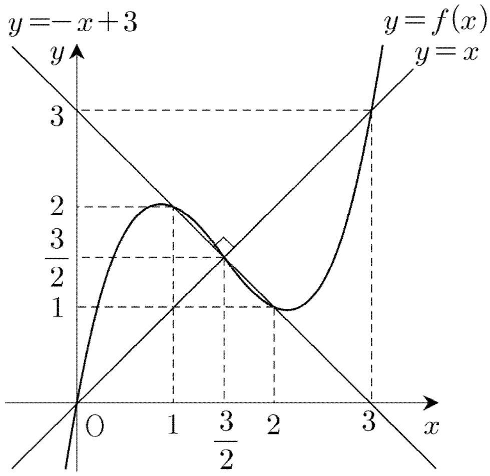


위의 그림에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-x+k_1$의 두 교점은 직선 $y=x$에 대하여 대칭일 수 없음을 확인할 수 있다. 그리고 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-x+k_2$의 두 교점은 직선 $y=x$에 대하여 대칭일 수 없음을 확인할 수 있다.



위의 그림에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-x+k_1$의 두 교점은 직선 $y=x$에 대하여 대칭일 수 없음을 확인할 수 있다. 그리고 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-x+k_2$의 두 교점은 직선 $y=x$에 대하여 대칭일 수 없음을 확인할 수 있다.

[참고5] 교육과정 외
삼차함수 $f(x)$의 그래프가 변곡점에 대하여 대칭임을 이용하면 빠르게 문제를 해결할 수 있다.
삼차함수 $f(x)$의 그래프는 변곡점에 대하여 대칭이므로 아래 그림처럼 두 직선 $y=x$, $y=-x+k$의 교점을 곡선 $y=f(x)$의 변곡점과 일치시키자. 이때, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-x+k$의 세 교점 중 두 점은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고, 나머지 한 점은 직선 $y=x$ 위에 있게 된다. 그리고 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 세 교점 중 두 점은 직선 $y=-x+k$에 대하여 대칭이고, 나머지 한 점은 직선 $y=-x+k$ 위에 있게 된다.



$f(0)=0$, $f(a)=a$, $f(b)=b$이므로
$f(1)=2$, $f(2)=1$일 수 밖에 없다.
점 $(a,\ a)$는 두 점 $(1,\ 2)$, $(2,\ 1)$을 잇는 선분의 중점이므로 선분의 내분점의 공식에 의하여
$\frac{1+2}{2}=a$에서 $a=\frac{3}{2}$

직선 $y=-x+k$는 점 $\left(\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\right)$을 지나므로

$\frac{3}{2}=-\frac{3}{2}+k$에서 $k=3$

점 $\left(\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\right)$은 두 점 $(0,\ 0)$, $(b,\ b)$를 잇는 선분의 중점이므로 선분의 내분점의 공식에 의하여

$\frac{0+b}{2}=\frac{3}{2}$에서 $b=3$

인수정리에 의하여

$$f(x)-x=cx\left(x-\frac{3}{2}\right)(x-3)$$

(단, c는 양의 상수)

함수 $f(x)$의 방정식은

$$f(x)=cx\left(x-\frac{3}{2}\right)(x-3)+x$$

함수 $f(x)$의 도함수는

$$f(x)=c\left(x-\frac{3}{2}\right)(x-3)+cx(x-3)$$

$$+cx\left(x-\frac{3}{2}\right)+1$$

문제에서 주어진 조건에 의하여

$f'(0)-f'(1)=6c=6$에서 $c=1$

함수 $f(x)$의 방정식은

$$f(x)=x\left(x-\frac{3}{2}\right)(x-3)+x$$

$\therefore\ f(5)=40$