01

[풀이]

지수법칙에 의하여

$27^{\frac{1}{3}}=(3^3)^{\frac{1}{3}}=3^{3\times\frac{1}{3}}=3^1=3$

답 ①

02

[풀이]

집합 A의 원소 중에서 집합 B에 속하는 원소는 1, 5 이므로

$A-B=\{3,\ 7\}$

따라서 구하는 값은 $10(=3+7)$이다.

답 ③

03

[풀이]

수열의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3\times4^n+2^n}{4^n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1+3\times\left(\frac{1}{4}\right)^n}$$

$$=\frac{3+0}{1+3\times0}=3$$

답 ③

04

[풀이]

문제에서 주어진 함수 f에 의하여

$f(2)=5$

$f^{-1}(3)=a$로 두면 역함수의 성질에 의하여

$f(a)=3$

문제에서 주어진 함수 f에 의하여

$a=3$

$\therefore\ f(2)+f^{-1}(3)=5+3=8$

답 ⑤

05

[풀이]

확률의 덧셈정리에 의하여

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B^C)$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{5}=\frac{3}{10}$

드모르간의 법칙에 의하여

$A^C\cup B^C=(A\cap B)^C$

여사건의 확률의 정의에 의하여

$\therefore\ \mathrm{P}(A^C\cup B^C)=1-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=1-\frac{3}{10}=\frac{7}{10}$

답 ④

06

[풀이]

$x\to1-$일 때, $f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to1-}f(x)=1$

$x\to2+$일 때, $f(x)$는 1 보다 큰 값을 가지면서 1에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to2+}f(x)=1$

$\therefore\ \lim_{x\to1-}f(x)+\lim_{x\to2+}f(x)=1+1=2$

답 ②

07

[풀이]

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하자.

조건 p에서 주어진 일차방정식을 풀면

$x=1+\frac{a}{2}$ 즉, $P=\left\{1+\frac{a}{2}\right\}$

조건 q에서 주어진 연립일차부등식을 풀면

$\frac{3}{2}\le x\le\frac{13}{2}$ 즉, $Q=\left\{x\,\middle|\,\frac{3}{2}\le x\le\frac{13}{2}\right\}$

p가 q이기 위한 충분조건이므로 $P\subset Q$이다.

$\frac{3}{2}\le1+\frac{a}{2}\le\frac{13}{2}$

연립일차부등식을 풀면

$1\le a\le11$

따라서 자연수 a의 개수는 11이다.

답 ①

08

[풀이]
미적분의 기본 정리에 의하여

$$\int_0^2 (3x^2+2x)dx = [x^3+x^2]_0^2 = 8+4 = 12$$

답 ④

09

[풀이]
다항식의 일반항은
${}_5\mathrm{C}_k x^k a^{5-k}$
이므로 x^3의 계수는 ${}_5\mathrm{C}_3 a^2 = {}_5\mathrm{C}_2 a^2 = 10a^2$이다.
문제에서 주어진 조건에 의하여
$10a^2 = 40$ 풀면 $a^2 = 4$
따라서 x의 계수는 ${}_5\mathrm{C}_1 a^4 = 80$이다.
답 ⑤

10

[풀이]
함수 $y = \sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면 함수
$y = \sqrt{3(x-1)}+2$ 즉, $y = \sqrt{3x-3}+2$
의 그래프와 일치한다. 문제에서 주어진 조건에 의하여
$a = -3$, $b = 2$
$\therefore$ $a+b = -1$
답 ④

11

[풀이]
문제에서 주어진 수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의에 의하여
$a_2 a_3 = 4$에서 $a_3 = 1$이므로 $a_2 = 4$
$a_3 a_4 = 6$에서 $a_3 = 1$이므로 $a_4 = 6$
$a_4 a_5 = 8$에서 $a_4 = 6$이므로 $a_5 = \dfrac{4}{3}$

$\therefore$ $a_2 + a_5 = 4 + \dfrac{4}{3} = \dfrac{16}{3}$

답 ②

12

[풀이]
이 학교 100명의 학생 중에서 임의로 1명을 뽑았을 때, 이 학생이 남학생일 사건을 A, 이 학생이 축구를 선호할 사건을 B라고 하자.
문제에서 주어진 조건에 의하여
$\mathrm{P}(A \cap B) = \dfrac{x}{100} = \dfrac{2}{5}$에서 $x = 40$이다.
문제에서 주어진 모든 조건을 표로 정리하면 다음과 같다.

	A	A^C	합
B	40 $(=100\times\frac{2}{5})$	30 $(=70-40)$	70
B^C	20 $(=60-40)$	10 $(=30-20)$	30
합	60	40	100

조건부 확률의 정의와 수학적 확률의 정의에 의하여

$$\mathrm{P}(A^C|B^C) = \frac{\mathrm{P}(A^C \cap B^C)}{\mathrm{P}(B^C)} = \frac{\frac{10}{100}}{\frac{30}{100}} = \frac{1}{3}$$

답 ②

[참고]
물론 다음과 같이 계산하는 것이 빠르다.

$$\mathrm{P}(A^C|B^C) = \frac{n(A^C \cap B^C)}{n(B^C)} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

13

[풀이1]
등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라고 하자.
$a_4 = |a_3| \geq 0$ 즉, $a_4 \geq 0$
$a_4 - a_1 =$(음이 아닌 실수)$+15 > 0$
이므로 $a_4 - a_1 = 3d > 0$에서 $d > 0$
수열 $\{a_n\}$을 쓰면
$-15(=a_1)$, $-15+d(=a_2)$, $-15+2d(=a_3)$,
$-15+3d(=a_4)$, $\cdots$
$|a_3| = a_4$에서

$|-15+2d|=-15+3d$ $\cdots(*)$

$d\geq\frac{15}{2}$일 때, (*)는

$-15+2d=-15+3d$ 풀면 $d=0$

이는 가정에 모순이다. 따라서 $d<\frac{15}{2}$이다.

$d<\frac{15}{2}$이므로 (*)는

$15-2d=-15+3d$ 풀면 $d=6$

일반항 a_n은

$a_n=-15+6(n-1)=6n-21$

$\therefore\ a_7=21$

답 ①

[풀이2]

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라고 하자.

$a_4=|a_3|\geq 0$ 즉, $a_4\geq 0$

$a_4-a_1=$(음이 아닌 실수)$+15>0$

이므로 $a_4-a_1=3d>0$에서 $d>0$

만약 $a_3\geq 0$라고 하면 $a_3=a_4$

즉, $d=0$이므로 이는 가정에 모순이다.

따라서 $a_3<0$이다.

문제에서 주어진 등식에서

$a_4=|a_3|=-a_3$

수열 $\{a_n\}$을 쓰면

$-15(=a_1),\ a_2,\ a_3,\ -a_3(=a_4),\ \cdots$

$d=a_4-a_3=-2a_3$이므로 수열 $\{a_n\}$을 다시 쓰면

$5a_3(=a_1),\ 3a_3(=a_2),\ a_3,\ -a_3(=a_4),\ \cdots$

$5a_3=-15$에서 $a_3=-3$, $d=6$이다.

$\therefore\ a_7=a_4+3d=3+3\times 6=21$

답 ①

14

[풀이]

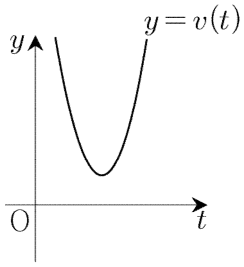
점 P의 시각 t에서의 속도는

$v(t)=\frac{dx}{dt}=3t^2-10t+a$

$=3\left(t-\frac{5}{3}\right)^2+a-\frac{25}{3}$ (단, $t\geq 0$)

이차함수 $v(t)$의 꼭짓점의 좌표는 $\left(\frac{5}{3},\ a-\frac{25}{3}\right)$이다.

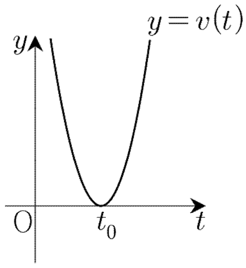
(1) $a>\frac{25}{3}$인 경우



$t\geq 0$일 때, $v(t)>0$이므로 점 P는 움직이는 방향을 바꾸지 않는다.

(2) $a=\frac{25}{3}$인 경우

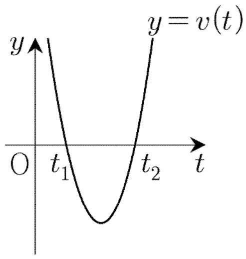
방정식 $v(t)=0$의 중근은 $\frac{5}{3}$이고, 이를 t_0라고 하자.



$t\geq 0$일 때, $v(t)\geq 0$이므로 점 P는 움직이는 방향을 바꾸지 않는다. 특히 $t=t_0$의 좌우에서 $v(t)$의 부호가 양으로 변함이 없으므로 점 P는 $t=t_0$에서 움직이는 방향을 바꾸지 않는다.

(3) $0\leq a<\frac{25}{3}$인 경우

방정식 $v(t)=0$의 서로 다른 두 실근을 t_1, t_2라고 하자.



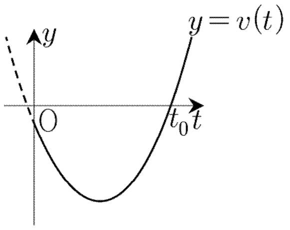
$t=t_1$일 때, $v(t)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 점 P는 $t=t_1$에서 움직이는 방향을 바꾼다. (수직선의 양의 방향에서 음의 방향으로 바꿈.)

$t=t_2$일 때, $v(t)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 점 P는 $t=t_2$에서 움직이는 방향을 바꾼다. (수직선의 음

의 방향에서 양의 방향으로 바꿈.)

(4) $a<0$인 경우

방정식 $v(t)=0$의 실근을 t_0라고 하자.



$t=t_0$일 때, $v(t)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 점 P는 $t=t_0$에서 움직이는 방향을 바꾼다. (수직선의 음의 방향에서 양의 방향으로 바꿈.)

(1)~(4)에서 a의 범위는

$$a \geq \frac{25}{3} \approx 8.33$$

따라서 자연수 a의 최솟값은 9이다.

답 ①

15

[풀이1]

$x^3-3x^2-9x-k=0$

$\Leftrightarrow$

$x^3-3x^2-9x=k$

이므로 곡선 $y=x^3-3x^2-9x$와 직선 $y=k$의 교점의 개수가 3이 되도록 하는 정수 k의 최댓값을 구하면 된다.

$f(x)=x^3-3x^2-9x$로 두자.

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x-3)(x+1)$

방정식 $f'(x)=0$을 풀면

$x=-1$ 또는 $x=3$

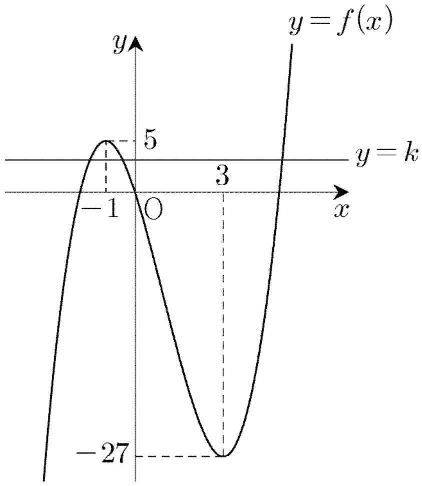
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 정리하면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

극댓값: $f(-1)=5$

극솟값: $f(3)=-27$

함수 $f(x)$의 그래프는



곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 개수가 3이 되는 k의 범위는

$-27<k<5$

따라서 정수 k의 최댓값은 4이다.

답 ②

[풀이2]

곡선 $y=x^3-3x^2-9x-k$와 x축의 교점의 개수가 3이 되도록 하는 정수 k의 최댓값을 구하자.

$f(x)=x^3-3x^2-9x-k$로 두자.

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x-3)(x+1)$

방정식 $f'(x)=0$을 풀면

$x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 정리하면 다음과 같다.

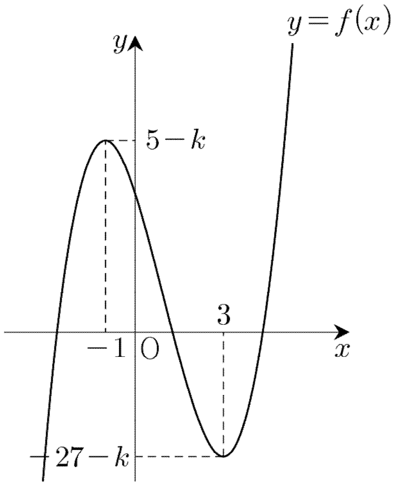
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 정리하면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

극댓값: $f(-1)=5-k$

극솟값: $f(3)=-27-k$

함수 $f(x)$의 그래프는



곡선 $y=f(x)$와 x축의 교점의 개수가 3이 되기 위해서는

$5-k>0$, $-27-k<0$

연립방정식을 풀면

$-27<k<5$

따라서 정수 k의 최댓값은 4이다.

답 ②

16

[풀이]

서로 다른 종류의 사탕 3개를 각각 A, B, C라고 하자.

각 주머니에 사탕이 각각 1개 이상씩 들어가야 하므로 각 주머니에는 오직 1개의 사탕만이 들어가야 한다.

사탕 A가 들어간 주머니를 A주머니,

사탕 B가 들어간 주머니를 B주머니,

사탕 C가 들어간 주머니를 C주머니

라고 하자.

A주머니, B주머니, C주머니에 들어가는 구슬의 개수를 각각 a, b, c라고 하자.

이제 방정식

$a+b+c=7$

(단, $a\geq 1$, $b\geq 1$, $c\geq 1$)

을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수를 구하자.

$a-1=a'$, $b-1=b'$, $c-1=c'$로 두면

$a'+b'+c'=4$

(단, $a'\geq 0$, $b'\geq 0$, $c'\geq 0$)

이 방정식의 해의 개수는 a', b', c' 중에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3\mathrm{H}_4={}_{3+4-1}\mathrm{C}_4={}_6\mathrm{C}_4={}_6\mathrm{C}_2=15$

순서쌍 $(a',\ b',\ c')$의 개수와 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수가 같으므로 구하는 경우의 수는 15이다.(←일대일대응)

답 ⑤

17

[풀이]

헌혈을 한 비율은

$\hat{p}=\dfrac{30}{100}=0.3$

$n\hat{p}=100\times 0.3=30>5$,

$n\hat{q}=100\times 0.7=70>5$

이므로 100은 충분히 큰 수라고 말할 수 있다.

100은 충분히 큰 수이므로 모비율 p의 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$0.3-1.96\sqrt{\frac{0.3\times 0.7}{100}}\leq p\leq 0.3+1.96\sqrt{\frac{0.3\times 0.7}{100}}$$

문제에서 주어진 조건에 의하여

$$0.3-1.96\sqrt{a}=0.3-1.96\sqrt{\frac{0.3\times 0.7}{100}}$$

$$0.3+1.96\sqrt{a}=0.3+1.96\sqrt{\frac{0.3\times 0.7}{100}}$$

풀면

$$\therefore\ a=\frac{0.3\times 0.7}{100}=0.0021$$

답 ①

18

[풀이]

함수 $f(x)$의 방정식은

$$f(x)=\begin{cases}-x-1 & (-1\leq x<0)\\ \dfrac{1}{2} & (x=0)\\ \dfrac{1}{2}x & (0<x\leq 1)\end{cases}$$

함수 $|f(x)|$의 방정식은

$$|f(x)|=\begin{cases}x+1 & (-1\leq x<0)\\ \dfrac{1}{2} & (x=0)\\ \dfrac{1}{2}x & (0<x\leq 1)\end{cases}$$

함수 $f(-x)$의 방정식은

$$f(-x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x & (-1\le x<0)\\ \frac{1}{2} & (x=0)\\ x-1 & (0<x\le 1)\end{cases}$$

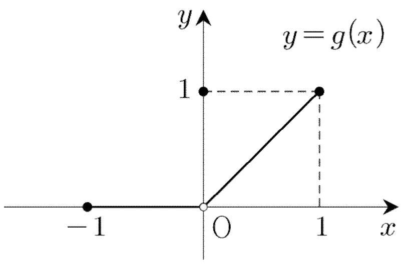
함수 $g(x)$의 방정식은

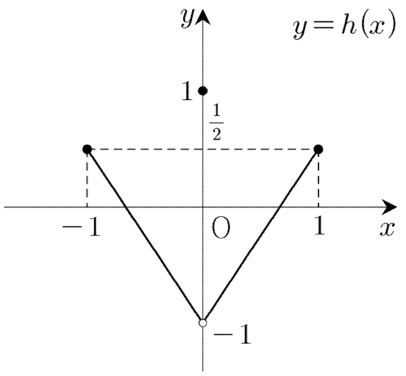
$$g(x)=\begin{cases}0 & (-1\le x<0)\\ 1 & (x=0)\\ x & (0<x\le 1)\end{cases}$$

함수 $h(x)$의 방정식은

$$h(x)=\begin{cases}-\frac{3}{2}x-1 & (-1\le x<0)\\ 1 & (x=0)\\ \frac{3}{2}x-1 & (0<x\le 1)\end{cases}$$

두 함수 $g(x)$, $h(x)$의 그래프는 각각





ㄱ. (참)

$x\to0+$일 때, $g(x)$는 0보다 큰 값을 가지면서 0에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x\to0+}g(x)=0$$

$x\to0-$일 때, $g(x)=0$이므로

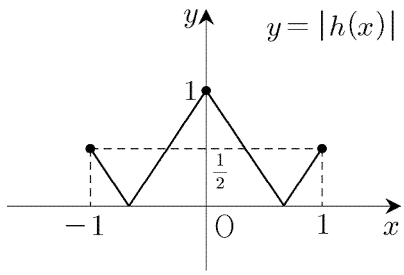
$$\lim_{x\to0-}g(x)=0$$

함수의 극한에 대한 정의에 의하여

$$\therefore\ \lim_{x\to0}g(x)=0$$

ㄴ. (참)

함수 $|h(x)|$의 그래프는



위의 그림에서 함수 $|h(x)|$가 $x=0$에서 연속임을 알 수 있다.

함수의 연속에 대한 정의를 적용하여 이를 증명해보자.(※실전에서 반드시 증명해야 하는 것은 아니다.)

$x\to0+$일 때, $|h(x)|$는 1보다 작은 값을 가지면서 1에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x\to0+}|h(x)|=1$$

$x\to0-$일 때, $|h(x)|$는 1보다 작은 값을 가지면서 1에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x\to0-}|h(x)|=1$$

함수의 극한에 대한 정의에 의하여

$$\lim_{x\to0}|h(x)|=1$$

함수 $|h(x)|$의 $x=0$에서의 함숫값은

$$|h(0)|=1$$

$\lim_{x\to0}|h(x)|=|h(0)|$이므로 함수의 연속에 대한 정의에 의하여 함수 $|h(x)|$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄷ. (거짓)

$x\to0+$일 때, $g(x)\to0+$, $|h(x)|\to1-$이므로

$$\lim_{x\to0+}g(x)|h(x)|=0$$

$x\to0-$일 때, $g(x)=0$, $|h(x)|\to1-$이므로

$$\lim_{x\to0-}g(x)|h(x)|=0$$

함수의 극한에 대한 정의에 의하여

$$\lim_{x\to0}g(x)|h(x)|=0$$

함수 $g(x)|h(x)|$의 $x=0$에서의 함숫값은

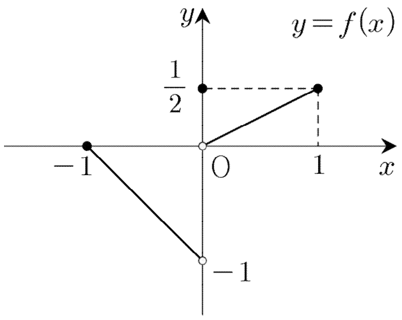
$$g(0)|h(0)|=1\times1=1$$

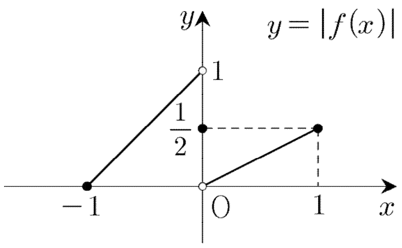
$\lim_{x\to0}g(x)|h(x)|\ne g(0)|h(0)|$이므로 함수의 연속에 대한 정의에 의하여 함수 $g(x)|h(x)|$는 $x=0$에서 불연속이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

[참고1]
다음과 같은 방법으로 두 함수 $g(x)$, $h(x)$의 그래프의 개형을 그려도 좋다.
두 함수 $f(x)$, $|f(x)|$의 그래프의 개형은





• 구간 $[-1,\ 0)$에서 두 함수 $f(x)$, $|f(x)|$는 각각 선분($\subset$1차식)이므로, 구간 $[-1,\ 0)$에서 함수 $g(x)$는 선분($\subset$1차식)이다. (단, 세 선분의 맨 오른쪽 점은 제외이다.)

$g(-1)=f(-1)+|f(-1)|=0+0=0$,

$\lim_{x\to 0-} g(x)=\lim_{x\to 0-} f(x)+\lim_{x\to 0-}|f(x)|$

$=-1+1=0$

이므로 구간 $[-1,\ 0)$에서 함수 $g(x)$는 두 점 $(-1,\ 0)$, $(0,\ 0)$을 잇는 선분($\subset$1차식)이다. (단, 선분의 맨 오른쪽 점은 제외이다.)

• $x=0$에서의 함수 $g(x)$의 함숫값을 구하자.

$$g(0)=f(0)+|f(0)|=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

• 구간 $(0,\ 1]$에서 두 함수 $f(x)$, $|f(x)|$는 각각 선분($\subset$1차식)이므로, 구간 $(0,\ 1]$에서 함수 $g(x)$는 선분($\subset$1차식)이다. (단, 세 선분의 맨 오른쪽 점은 제외이다.)

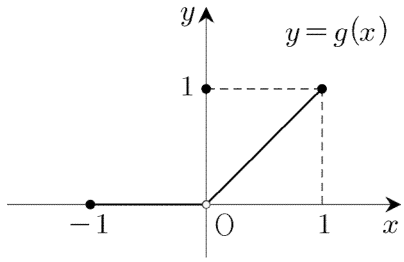
$\lim_{x\to 0+} g(x)=\lim_{x\to 0+} f(x)+\lim_{x\to 0+}|f(x)|$

$=0+0=0$,

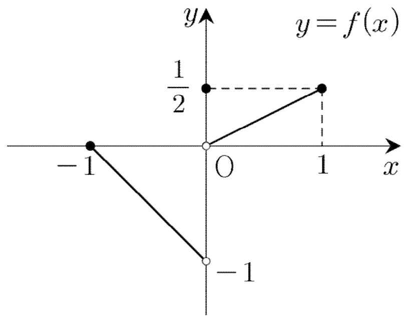
$$g(1)=f(1)+|f(1)|=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1,$$

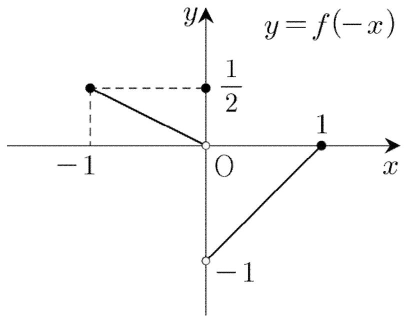
이므로 구간 $(0,\ 1]$에서 함수 $g(x)$는 두 점 $(0,\ 0)$, $(1,\ 1)$을 잇는 선분($\subset$1차식)이다. (단, 선분의 맨 오른쪽 점은 제외이다.)

함수 $g(x)$의 그래프의 개형은



두 함수 $f(x)$, $f(-x)$의 그래프의 개형은





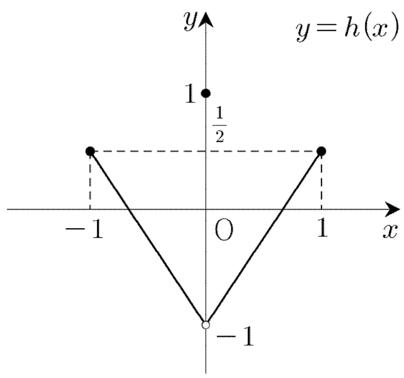
마찬가지의 방법으로

구간 $[-1,\ 0)$에서 함수 $h(x)$는 두 점 $\left(-1,\ \frac{1}{2}\right)$, $(0,\ -1)$을 잇는 선분($\subset$1차식)이다.

$h(0)=f(0)+f(0)=1$

구간 $(0,\ 1]$에서 함수 $h(x)$는 두 점 $(0,\ -1)$, $\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$을 잇는 선분($\subset$1차식)이다.

함수 $h(x)$의 그래프의 개형은



[참고2]

보기 ㄷ이 거짓임을 다음과 같이 보여도 좋다.

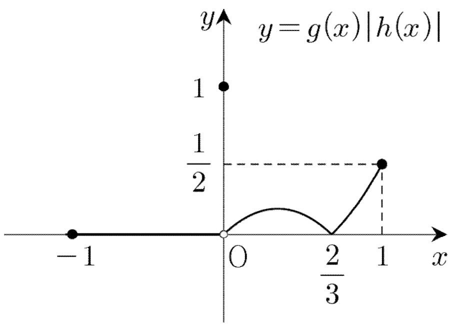
함수 $|h(x)|$의 방정식은

$$|h(x)|=\begin{cases} -\frac{3}{2}x-1 & \left(-1\le x\le -\frac{2}{3}\right) \\ \frac{3}{2}x+1 & \left(-\frac{2}{3}< x\le 0\right) \\ -\frac{3}{2}x+1 & \left(0< x\le \frac{2}{3}\right) \\ \frac{3}{2}x-1 & \left(\frac{2}{3}< x\le 1\right) \end{cases}$$

함수 $g(x)|h(x)|$의 방정식은

$$g(x)|h(x)|=\begin{cases} 0 & (-1\le x<0) \\ 1 & (x=0) \\ -\frac{3}{2}x^2+x & \left(0< x\le \frac{2}{3}\right) \\ \frac{3}{2}x^2-x & \left(\frac{2}{3}< x\le 1\right) \end{cases}$$

함수 $g(x)|h(x)|$의 그래프는



위의 그래프에서 함수 $g(x)|h(x)|$는 $x=0$에서 불연속이다.

따라서 보기 ㄷ에서 주어진 명제는 거짓이다.

[참고3] 교육과정 외

ㄱ. ㄴ에 대한 참, 거짓 판단을 그래프의 개형 없이도 판단할 수 있다.

ㄱ. (참)

$$\lim_{x\to 0+} g(x)=\lim_{x\to 0+} f(x)+\lim_{x\to 0+} |f(x)|$$

$=0+0=0$

$$\lim_{x\to 0-} g(x)=\lim_{x\to 0-} f(x)+\lim_{x\to 0-} |f(x)|$$

$=-1+1=0$

함수의 극한에 대한 정의에 의하여

$$\therefore \lim_{x\to 0} g(x)=0$$

ㄴ. (참)

$$\lim_{x\to 0+} |h(x)|=\lim_{x\to 0+} |f(x)+f(-x)|$$

$=|0+(-1)|=1$

($\because x\to 0+$일 때, $-x\to 0-$)

$$\lim_{x\to 0-} |h(x)|=\lim_{x\to 0-} |f(x)+f(-x)|$$

$=|-1+0|=1$

($\because x\to 0-$일 때, $-x\to 0+$)

함수의 극한에 대한 정의에 의하여

$$\lim_{x\to 0} |h(x)|=1$$

함수 $|h(x)|$의 $x=0$에서의 함숫값은

$|h(0)|=1$

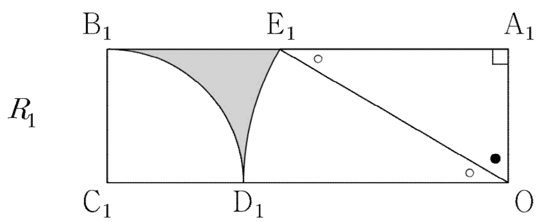
$\lim_{x\to 0} |h(x)|=h(0)$이므로 함수의 연속의 정의에 의하여

함수 $|h(x)|$는 $x=0$에서 연속이다.

19

[풀이]

그림 R_n에서 새롭게 그려진 도형 ◸의 넓이를 a_n이라고 하자.



(단, ●$=60^\circ$, ○$=30^\circ$)

원의 정의에 의하여

$\overline{C_1D_1}=\overline{B_1C_1}=1$이므로

$\overline{D_1O}=\overline{C_1O}-\overline{C_1D_1}=2$

원의 정의에 의하여

$\overline{E_1O}=\overline{D_1O}=2$

피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{E_1A_1}=\sqrt{\overline{E_1O}^2-\overline{OA_1}^2}=\sqrt{3}$

특수각의 삼각비에 의하여

$\angle A_1E_1O=30^\circ$

평행사변형의 정의에 의하여 두 쌍의 대변 A_1B_1, OC_1은 서로 평행하므로

$\angle E_1OD_1=\angle A_1E_1O=30^\circ$ (엇각)

부채꼴, 삼각형, 사각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$a_1 = S_1 =$(□$OA_1B_1C_1$의 넓이)−(▽$B_1C_1D_1$의 넓이)−(▽E_1D_1O의 넓이)−(△OA_1E_1의 넓이)

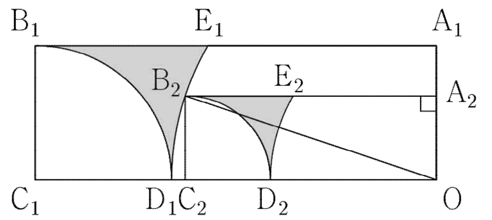
$= \overline{OA_1} \times \overline{A_1B_1} - \pi \overline{B_1C_1}^2 \times \dfrac{90}{360}$

$- \pi \overline{E_1O}^2 \times \dfrac{30}{360} - \dfrac{1}{2} \overline{OA_1} \times \overline{A_1E_1}$

$= 3 - \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 3 - \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{7}{12}\pi$

$\overline{OA_2} = x$로 두면 $\overline{A_2B_2} = 3x$이다.

R_2



원의 정의에 의하여

$\overline{B_2O} = \overline{D_1O} = 2$

직각삼각형 OA_2B_2에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{OB_2}^2 = \overline{OA_2}^2 + \overline{A_2B_2}^2$ 즉, $2^2 = x^2 + (3x)^2$

풀면

$x = \dfrac{2}{\sqrt{10}}$

두 직사각형 $OA_1B_1C_1$, $OA_2B_2C_2$의 닮음비가 $1 : x$이므로 그림 R_1에서 새롭게 그려진 ◸ 모양의 도형과 그림 R_2에서 새롭게 그려진 ◸ 모양의 도형의 넓이의 비는 $1^2 : x^2$이다. 즉,

$a_2 = x^2 a_1 = \dfrac{2}{5} a_1$

2 이상의 자연수 n에 대하여 마찬가지의 방법으로

$a_{n+1} = \dfrac{2}{5} a_n$

수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의는

$a_1 = 3 - \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{7}{12}\pi$,

$a_{n+1} = \dfrac{2}{5} a_n \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $3 - \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{7}{12}\pi$이고, 공비가 $\dfrac{2}{5}$인 등비수열이다.

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$이므로 등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\therefore \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{3 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{7}{12}\pi}{1 - \frac{2}{5}}$$

$= 5 - \dfrac{5\sqrt{3}}{6} - \dfrac{35}{36}\pi$

답 ②

20

[풀이]

동전의 앞면이 n번 나온다고 하면 뒷면은 $6-n$번 나온다. (단, n은 6 이하의 음이 아닌 정수)

6번째 시행 후 두 상자 A, B에 들어 있는 공의 개수는 각각

상자 A: $6 + 1 \times (6-n) - 1 \times n = 12 - 2n$

상자 B: $6 + 1 \times n - 1 \times (6-n) = 2n$

문제에서 주어진 조건에 의하여

$2n = 8$이므로 $n = 4$이다.

따라서 6번째 시행까지 동전의 앞면과 뒷면은 각각 4번, 2번 나온다.

만약 5번째 시행 직후 상자 B에 들어 있는 공의 개수가 9이면, 5번째 시행 이전에 상자 B에 들어 있는 공의 개수가 8인 적이 있어야 한다. 이는 가정에 모순이다. 따라서 5번째 시행 직후 상자 B에 들어 있는 공의 개수는 7이다.

문제에서 주어진 조건에 의하여 4번째 시행 직후 상자 B에 들어 있는 공의 개수는 8일 수 없다. 따라서 4번째 시행 직후 상자 B에 들어 있는 공의 개수는 6이다.

이를 표로 정리하면 다음과 같다.

	1회	2회	3회	4회	5회	6회
동전				?	H	H
A				6	5	4
B				6	7	8
합	12	12	12	12	12	12

(단, H는 동전의 앞면, T는 동전의 뒷면이다.)

1번째 시행부터 4번째 시행까지 동전의 앞면과 뒷면은 각각 2번, 2번 나온다.

1번째 시행부터 4번째 시행까지 상자 B에 들어 있는

공의 개수의 변화는 다음과 같다.

HHTT: $7\to\boxed{8}\to7\to6$ (×)

HTHT: $7\to6\to7\to6$ (◯)

HTTH: $7\to6\to5\to6$ (◯)

TTHH: $5\to4\to5\to6$ (◯)

THTH: $5\to6\to5\to6$ (◯)

THHT: $5\to6\to7\to6$ (◯)

따라서 4번째 시행 직후 상자 B에 들어 있는 공의 개수가 6인 경우의 수는 5이다.

이때, 같은 것이 있는 순열의 수에 의하여 5는 $\frac{4!}{2!2!}-1$과 같다.

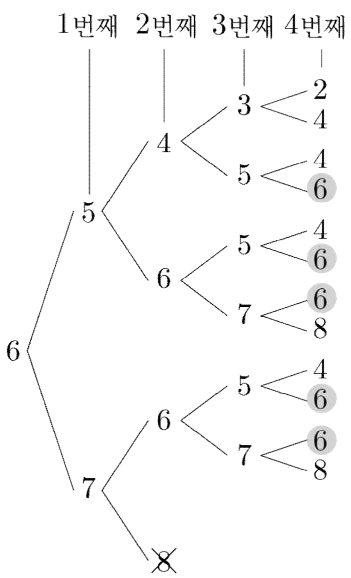
독립시행의 확률에 의하여 구하는 확률은

$$5\times\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{64}$$

답 ③

[참고1]

수형도를 이용하여 1번째 시행부터 4번째 시행까지 상자 B에 들어 있는 공의 개수의 변화를 나타낼 수도 있다.



위의 수형도에서 4번째 시행 직후 상자 B에 들어 있는 공의 개수가 6인 경우의 수는 5임을 알 수 있다.

[참고2]

1번째 시행부터 4번째 시행까지 가능한 경우의 수를 여집합의 관점에서 생각해보자.

1번째 시행과 2번째 시행 모두 동전의 앞면이 나오면 2번째 시행 직후에 상자 B에 들어 있는 공의 개수는 8이므로 문제에서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 1번째 시행부터 4번째 시행까지 가능한 경우의 수는 같은 것이 있는 순열의 수에 의하여

$$\frac{4!}{2!2!}-1=5$$

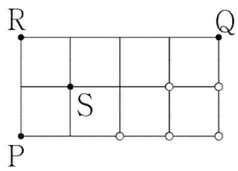
이다.

하지만 6개의 경우를 모두 쓰고, 가능하지 않은 1개의 경우를 제외하는 것이 실전에서는 안심이 된다.

[참고3]

1번째 시행부터 6번째 시행까지 가능한 경우의 수를 다음과 같이 구할 수도 있다.

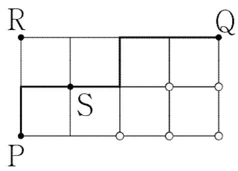
아래와 같은 도로망이 있다.



P지점에서 Q지점까지 최단 거리로 가는 방법의 수를 구하자.

(단, ○은 지나지 않는다.)

동전의 앞면이 나오면 오른쪽(→)으로 한 칸 이동하는 것으로, 동전의 뒷면이 나오면 위쪽(↑)으로 한 칸 이동하는 것으로 하자.



예를 들어 위와 같은 경로로 이동하는 것은

T, H, H, T, H, H

(단, H는 동전의 앞면, T는 동전의 뒷면이다.)

와 같다. 이때, 상자 B에 들어 있는 공의 개수의 변화는

$5\to6\to7\to6\to7\to8$

이다.

(1) P→R→Q의 경로로 가는 경우

경우의 수는 1이다.

(2) P→S→Q의 경로로 가는 경우

곱의 법칙에 의하여 경우의 수는

$2\times2\times1=4$이다.

(1), (2)는 동시에 발생하지 않으므로

합의 법칙에 의하여

$1+4=5$

21

[풀이]

우선 함수 $f(x)$의 그래프의 개형에 대하여 생각하자.

모든 실수 x에 대하여

$f(-x)=(-x)^4+a(-x)^2+b$

$=x^4+ax^2+b=f(x)$ 즉, $f(-x)=f(x)$

이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=4x^3+2ax=2x(2x^2+a)$

방정식

$f'(x)=0 \qquad \cdots(*)$

을 풀면

$x=0$ 또는 $2x^2+a=0$

• $a>0$인 경우

이차방정식 $2x^2+a=0$은 서로 다른 두 허근을 가지므로

(*)의 해집합은 $\{0\}$이다.

• $a=0$인 경우

이차방정식 $2x^2+a=0(2x^2=0)$은 0을 중근으로 가지므로

(*)의 해집합은 $\{0\}$이다.

• $a<0$인 경우

이차방정식 $2x^2+a=0$을 정리하면

$x^2=-\dfrac{a}{2}$에서 $x=-\sqrt{-\dfrac{a}{2}}$ 또는 $x=\sqrt{-\dfrac{a}{2}}$

(*)의 해집합은 $\left\{-\sqrt{-\dfrac{a}{2}},\ 0,\ \sqrt{-\dfrac{a}{2}}\right\}$이다.

한편 $h(x)=f(x)-|f(x)|$로 두자.

$f(x)\ge 0$일 때, $|f(x)|=f(x)$이므로

$h(x)=f(x)-f(x)=0$

$f(x)<0$일 때, $|f(x)|=-f(x)$이므로

$h(x)=f(x)-(-f(x))=2f(x)$

정리하면

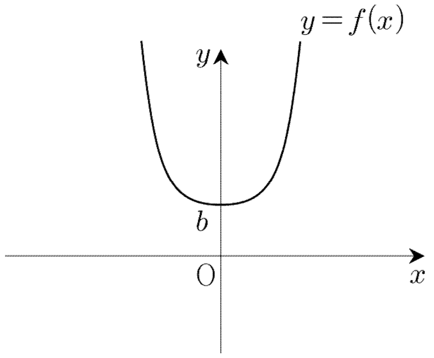
$$h(x)=\begin{cases}0 & (f(x)\ge 0)\\ 2f(x) & (f(x)<0)\end{cases}$$

▸ (경우1) $a\ge 0$인 경우

$x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖는다. 이때, 극솟값은 $f(0)=b$이다.

• $b>0$인 경우

함수 $f(x)$의 그래프는



$h(t)=0$이므로

$$g(x)=\int_{-x}^{2x}0dt=[c]_{-x}^{2x}=c$$

(단, c는 상수)

그런데 $g(0)=\int_0^0 0dt=0$이므로 $c=0$이다.

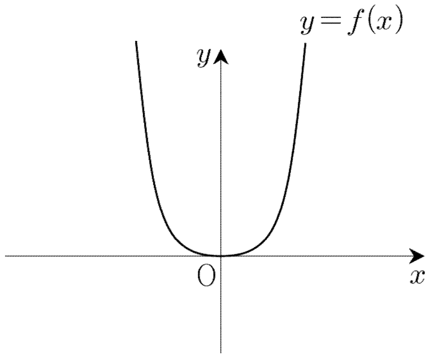
함수 $g(x)$의 방정식은

$g(x)=0$(상수함수)

이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

• $b=0$인 경우

함수 $f(x)$의 그래프는



$h(t)=0$이므로

$b>0$인 경우와 마찬가지의 방법으로

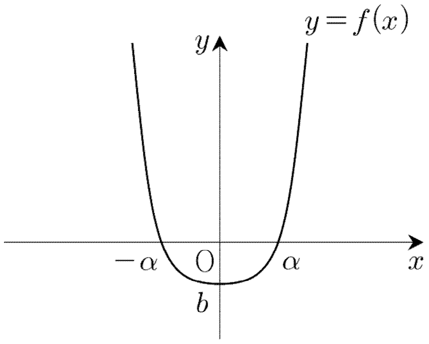
함수 $g(x)$의 방정식은

$g(x)=0$(상수함수)

이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

• $b<0$인 경우

함수 $f(x)$의 그래프는

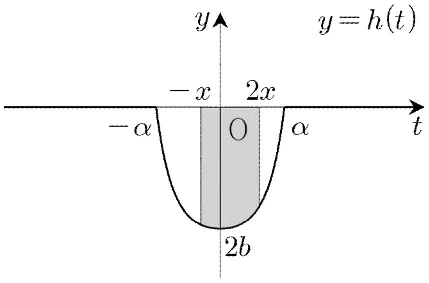


(단, $\alpha>0$, $f(\alpha)=f(-\alpha)=0$이다.)

함수 $h(t)$의 방정식은

$$h(t)=\begin{cases}0 & (t\le -\alpha,\ t\ge \alpha)\\ 2f(t) & (-\alpha<t<\alpha)\end{cases}$$

함수 $h(t)$의 그래프는



$0<x<\dfrac{\alpha}{2}$일 때, x의 값이 커짐에 따라

위의 그림에서 색칠된 도형의 넓이가 커지므로 $g(x)$는 감소한다.

이는 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

▸ (경우2) $a<0$인 경우

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

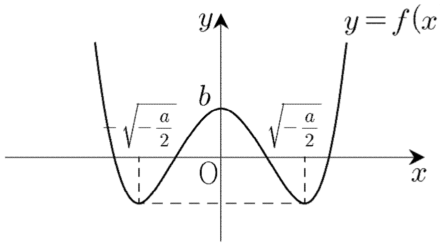
x	$\cdots$	x_1	$\cdots$	0	$\cdots$	x_2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

(단, $x_1=-\sqrt{-\dfrac{a}{2}}$, $x_2=\sqrt{-\dfrac{a}{2}}$)

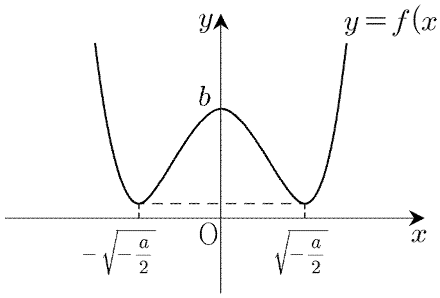
극댓값: $f(0)=b$

극솟값: $f\left(-\sqrt{-\dfrac{a}{2}}\right)=f\left(\sqrt{-\dfrac{a}{2}}\right)=-\dfrac{a^2}{4}+b$

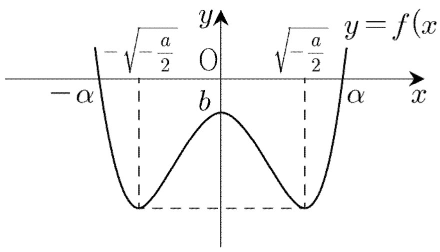
함수 $f(x)$의 그래프는



만약 아래 그림처럼 함수 $f(x)$의 극솟값이 음이 아닌 실수라면 $g(x)=0$(상수함수)이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다. 이는 가정에 모순이다. 따라서 함수 $f(x)$의 극솟값은 음수이다.



아래 그림처럼 함수 $f(x)$의 극댓값(즉, b)가 양이 아닌 실수라고 가정하자.

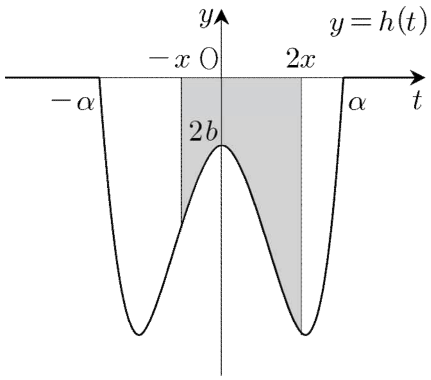


(단, $\alpha>0$, $f(\alpha)=f(-\alpha)=0$이다.)

함수 $h(t)$의 방정식은

$$h(t)=\begin{cases}0 & (t\le -\alpha,\ t\ge \alpha)\\ 2f(t) & (-\alpha<t<\alpha)\end{cases}$$

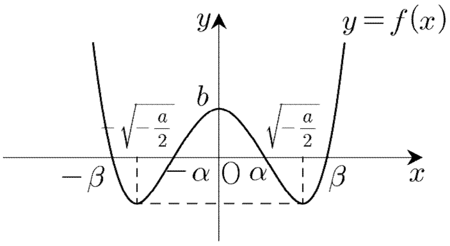
함수 $h(t)$의 그래프는



$0<x<\dfrac{\alpha}{2}$일 때, x의 값이 커짐에 따라

위의 그림에서 색칠된 도형의 넓이가 커지므로 $g(x)$는 감소한다.

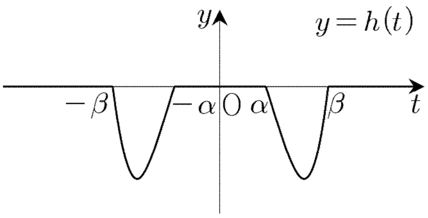
이는 조건 (가)를 만족시키지 않는다.
귀류법에 의하여 함수 $f(x)$의 극댓값(즉, b)는 양수이다.
요컨대 함수 $f(x)$의 극댓값은 양수, 극솟값은 음수이다.
함수 $f(x)$의 그래프는



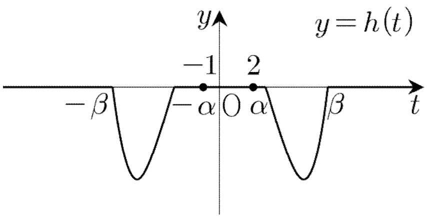
(단, $0<\alpha<\beta$, $f(\alpha)=f(-\alpha)=0$, $f(\beta)=f(-\beta)=0$이다.)
함수 $h(t)$의 방정식은

$$h(t)=\begin{cases} 0 & (t\le-\beta,\ -\alpha<t<\alpha,\ t\ge\beta) \\ 2f(t) & (-\beta<t\le-\alpha,\ \alpha\le t<\beta) \end{cases}$$

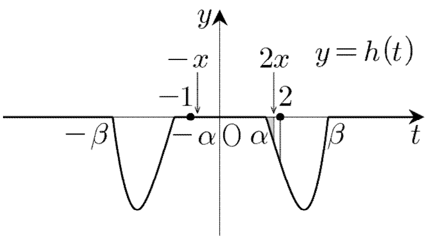
함수 $h(t)$의 그래프는



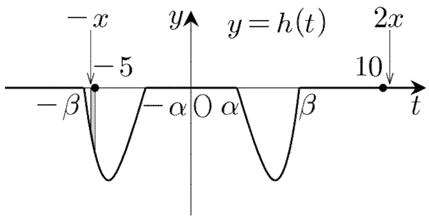
• $a=2$임을 귀류법을 이용하여 보이자.
$\alpha>2$이고 α가 2에 매우 가까운 실수라고 하자.



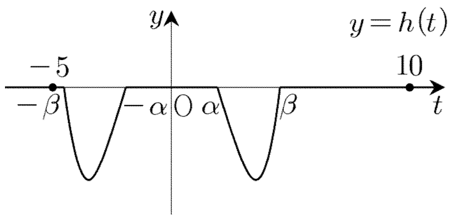
$2<x<\alpha$일 때, $g(x)=0$(상수함수)이므로
조건 (나)를 만족시키지 않는다.
$\alpha<2$이고 α가 2에 매우 가까운 실수라고 하자.



$\frac{\alpha}{2}<x<1$일 때, x의 값이 커짐에 따라
위의 그림에서 색칠된 도형의 넓이가 커지므로 $g(x)$는 감소한다.
이는 조건 (가)를 만족시키지 않는다.
따라서 귀류법에 의하여 $\alpha=2$이다.
• $\beta=5$임을 귀류법을 이용하여 보이자.
$\beta>5$이고 β가 5에 매우 가까운 실수라고 하자.



$5<x<\beta$일 때, x의 값이 커짐에 따라
위의 그림에서 색칠된 도형의 넓이가 커지므로 $g(x)$는 감소한다.
이는 조건 (다)를 만족시키지 않는다.
$\beta<5$이고 β가 5에 매우 가까운 실수라고 하자.



$\beta<x<5$일 때, $g(x)=2\int_{\alpha}^{\beta}h(t)dt$(상수함수)이므로
조건 (나)를 만족시키지 않는다.
따라서 귀류법에 의하여 $\beta=5$이다.
인수정리에 의하여
함수 $f(x)$의 방정식은
$f(x)=(x+2)(x-2)(x+5)(x-5)$
$=(x^2-4)(x^2-25)$
$\therefore\ f(\sqrt{2})=-2\times(-23)=46$
답 ④

22

[풀이]
순열의 수와 조합의 수의 계산법에 의하여

$${}_3\mathrm{P}_2+{}_3\mathrm{C}_2=3\times2+\frac{3\times2}{1\times2}=6+3=9$$

답 9

23

[풀이]
함수 $f(x)$의 도함수는
$f'(x)=3x^2+10x$
$\therefore\ f'(1)=13$
답 13

24

[풀이]
문제에서 주어진 유리함수를
$y=\frac{k}{x-p}+q(k\neq 0)$
의 꼴로 나타내면
$y=\frac{ax+2}{x+b}=\frac{a(x+b)+2-ab}{x+b}=\frac{2-ab}{x-(-b)}+a$
(즉, $k=2-ab$, $p=-b$, $q=a$)
문제에서 주어진 유리함수의 두 점근선은 각각
$x=-b$, $y=a$
이 두 점근선의 교점의 좌표는 $(-b,\ a)$이므로
$-b=-2$, $a=3$
$\therefore\ a+b=5$
답 5

25

[풀이]
문제에서 주어진 등식의 양변을 제곱하면
$(a^{\frac{1}{2}})^2=8^2$ 즉, $a=64$ ($\because$ 지수법칙)
로그의 정의에 의하여
$\therefore\ \log_2 a=\log_2 64=6$
답 6

26

[풀이]
등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r(>0)$이라고 하자.
$S_4-S_3=a_4=a_1r^3=2$,
$S_6-S_5=a_6=a_1r^5=50$
위의 두 식을 변변히 나누면
$r^2=25$, $(r+5)(r-5)=0$
$r>0$이므로 $r=5$
등비수열의 정의에 의하여
$\therefore\ a_5=a_4r=2\times 5=10$
답 10

[참고]
$a_4=a_1r^3=125a_1=2$에서 $a_1=\frac{2}{125}$
수열 a_n의 일반항은
$a_n=2\times 5^{n-4}(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

27

[풀이]
문제에서 주어진 이항분포에서
$\mathrm{E}(X)=n\times\frac{1}{2}=\frac{n}{2}$,
$\mathrm{V}(X)=n\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{n}{4}$
이므로
$\mathrm{V}\left(\frac{1}{2}X+1\right)=\frac{1}{4}\mathrm{V}(X)=\frac{n}{16}=5$
$\therefore\ n=80$
답 80

28

[풀이]
방정식 $v_1(t)=v_2(t)(t\neq 0)$은
$3t^2+t=2t^2+3t$
정리하면
$t^2-2t=0$, $t(t-2)=0$
풀면 $t=2(\because t\neq 0)$
두 점 P, Q의 시각 t에서의 위치를 각각 $x_1(t)$, $x_2(t)$라고 하면
$x_1(t)=\int v_1(t)dt=t^3+\frac{1}{2}t^2+C_1$,
$x_2(t)=\int v_2(t)dt=\frac{2}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2+C_2$
(단, C_1, C_2는 적분상수)
$x_1(0)=x_2(0)=0$이므로 $C_1=C_2=0$이다.
두 함수 $x_1(t)$, $x_2(t)$의 방정식은 각각

$x_1(t)=t^3+\frac{1}{2}t^2$, $x_2(t)=\frac{2}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2$

$a=\left|x_1(2)-x_2(2)\right|=\left|10-\frac{34}{3}\right|=\frac{4}{3}$

$\therefore\ 9a=12$

답 12

29

[풀이]

점 P가 원점 O에서 출발하여 점 P_n까지 움직인 거리를 a_n이라고 하자.

문제에서 주어진 두 규칙에 의하여

$$a_n=0+\frac{1}{25}+\frac{3}{25}+\frac{5}{25}+\cdots+\frac{2n-1}{25}$$

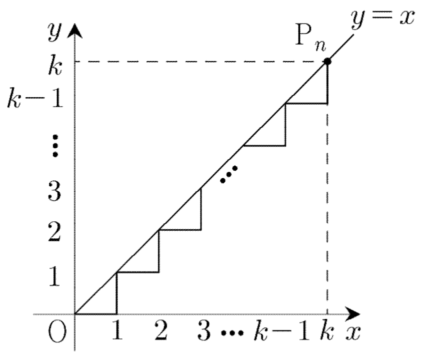
$$=\frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{25}$$

$$=\frac{\frac{1+(2n-1)}{2}\times n}{25}\ (\because \text{등차수열의 합의 공식})$$

$$=\frac{n^2}{25}$$

점 P_n이 직선 $y=x$ 위에 있는 경우를 생각하자.

점 P_n의 좌표를 $(k,\ k)$로 두자. (단, k는 음이 아닌 정수)



위의 그림에서

a_n=(점 P_n의 x좌표와 y좌표의 합)$=2k$

임을 알 수 있다. 왜냐하면 점 P_n이 x축의 양의 방향으로 움직인 거리의 합과 y축의 양의 방향으로 움직인 거리의 합은 각각 k, k이기 때문이다.

이제 두 자연수 n, k에 대하여

$\frac{n^2}{25}=2k$ 즉, $n^2=50k$

가 되는 k의 값을 구하자.

n은 10의 배수이므로

$n=10$일 때, $k=2$

$n=20$일 때, $k=8$

$n=30$일 때, $k=18$

$\vdots$

$\therefore\ a=8$

답 8

[참고1]

n이 10의 배수임을 증명하자.

$n^2=2^1 5^2 k$

이므로 n^2은 2의 배수인 동시에 5의 배수이다.

n이 다음과 같이 소인수분해된다고 하자.

$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_l^{\alpha_l}$

(단, l은 자연수, p_1, p_2, $\cdots$, p_l은 서로 다른 소수, α_1, α_2, $\cdots$, α_l은 음이 아닌 정수이다.)

$n^2=p_1^{2\alpha_1}p_2^{2\alpha_2}\cdots p_l^{2\alpha_l}n^2=2^1 5^2 k$

p_1, p_2, $\cdots$, p_l 중에서 어느 한 수는 2이고, 또 다른 어느 한 수는 5이어야 한다.

즉, n은 2의 배수인 동시에 5의 배수이다.

따라서 n은 10의 배수이다.

[참고2]

문제에서 주어진 두 규칙에 의하여

수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의는

$$a_0=0,\ a_n=a_{n-1}+\frac{2n-1}{25}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

일반항 a_n을 유도하기 위해서는 계차수열의 합을 이용해야 하는데, 이는 교육과정 외이다.

따라서 문제에서 주어진 두 규칙에서

$$a_n=\frac{1}{25}+\frac{3}{25}+\frac{5}{25}+\cdots+\frac{2n-1}{25}$$

을 직접 유도할 것을 요구한 것으로 보인다.

30

[풀이]

우선 문제에서 주어진 방정식이 가진 성질에 대하여 알아보자.

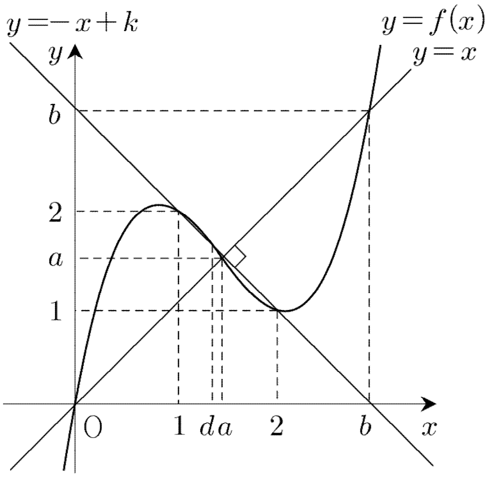
p가 문제에서 주어진 방정식의 실근이라고 하면
$f(f(p))=p$
이다. 이때, $f(p)=q$라고 하면
$f(p)=q$, $f(q)=p$
이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 두 점 $(p,\ q)$, $(q,\ p)$를 모두 지난다.
그리고 $f(f(q))=f(p)=q$이므로
$x=q$는 방정식 $f(f(x))=x$의 실근이다.

- $p=q$인 경우

점 $(p,\ q)$는 직선 $y=x$ 위에 있다.

- $p\neq q$인 경우

두 점 $(p,\ q)$, $(q,\ p)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 다음이 성립한다.
(수직) 두 점 $(p,\ q)$, $(q,\ p)$를 잇는 직선의 기울기는 $-1\left(=\dfrac{p-q}{q-p}\right)$이므로 두 점 $(p,\ q)$, $(q,\ p)$는 직선 $y=-x+k$(단, k는 상수) 위에 있다.
(중점) 두 점 $(p,\ q)$, $(q,\ p)$를 잇는 선분의 중점 $\left(\dfrac{p+q}{2},\ \dfrac{p+q}{2}\right)$는 직선 $y=x$ 위에 있다.
문제에서 주어진 조건에 의하여 다음이 성립한다.
$\{0,\ 1,\ a,\ 2,\ b\}$
$=\{f(0),\ f(1),\ f(a),\ f(2),\ f(b)\}$
방정식 $f(f(x))=x$의 해집합에 속하는 서로 다른 두 원소 p, q에 대하여 $f(p)=q$, $f(q)=p$가 되도록 하는 순서쌍 $(p,\ q)$의 개수는 최소 0개, 최대 2개다.
순서쌍 $(p,\ q)$의 개수가 0일 때, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 개수는 5이다. 하지만 삼차방정식 $f(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수의 최댓값은 3이므로 이는 가정에 모순이다. 따라서 순서쌍 $(p,\ q)$의 개수는 1 또는 2이다.
순서쌍 $(p,\ q)$의 개수가 1일 때, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 개수는 3이다.
순서쌍 $(p,\ q)$의 개수가 2일 때, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 개수는 1이다. (←[참고4]에서 가능하지 않음을 증명함)
이제 함수 $f(x)$의 그래프의 개형에 대하여 생각하자.
삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이고, $f'(1)<0$이므로 함수 $f(x)$는 극값을 갖는다.
아래 그림처럼 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$가 세 점에서 만나고, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-x+k$가 세 점에서 만난다고 하자. 이때, 세 교점 중에서 x좌표가 1, 2가 아닌 점의 x좌표를 d라고 하자. (←$d=1$ 또는 $d=2$인 경우가 성립하지 않음은 [참고3]에서 증명함)
(※ 만약 $d=a$이면 $x=d$는 방정식 $f(f(x))=x$의 해이지만, $d\neq a$이면 $x=d$는 방정식 $f(f(x))=x$의 해가 아니다.)



(※ d의 값은 a의 값 보다 클 수도 있고, a의 값과 같을 수도 있고, a의 값 보다 작을 수도 있다. 위의 그림은 d의 값이 a의 값 보다 작은 경우만을 그린 것이다.)
$f(0)=0$, $f(a)=a$, $f(b)=b$이므로
$f(1)=2$, $f(2)=1$일 수 밖에 없다.
인수정리에 의하여
$f(x)-(-x+k)=c(x-1)(x-d)(x-2)$
(단, c는 양의 상수)
함수 $f(x)$의 방정식은
$f(x)=c(x-1)(x-d)(x-2)-x+k$
$f(1)=-1+k=2$에서 $k=3$
$f(0)=-2cd+k=0$에서 $d=\dfrac{3}{2c}$
함수 $f(x)$의 방정식은
$f(x)=c(x-1)\left(x-\dfrac{3}{2c}\right)(x-2)-x+3$
함수 $f(x)$의 도함수는
$f'(x)=c\left(x-\dfrac{3}{2c}\right)(x-2)+c(x-1)(x-2)$
$+c(x-1)\left(x-\dfrac{3}{2c}\right)-1$
문제에서 주어진 조건에 의하여
$f'(0)-f'(1)=2c+\dfrac{7}{2}-\left(-c+\dfrac{1}{2}\right)$
$3c+3=6$에서 $c=1$

함수 $f(x)$의 방정식은

$$f(x)=(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right)(x-2)-x+3$$

방정식 $f(x)=x$를 정리하면

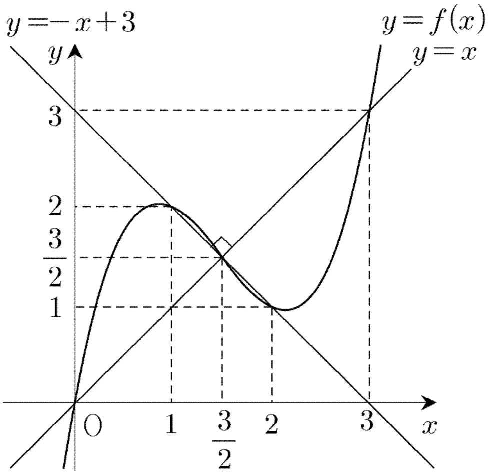
$$x\left(x-\frac{3}{2}\right)(x-3)=0$$

풀면

$$x=0,\ x=\frac{3}{2}(=a=d),\ x=3(=b)$$

이므로 a, b, d의 존재성을 확인할 수 있다.

함수 $y=f(x)$의 그래프는



$\therefore\ f(5)=40$

※ 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 개수가 2 또는 1인 경우는 성립하지 않음은 [참고4]에서 증명하였습니다.

답 40

[참고1]

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수일 때,

'모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이다.'

$\Leftrightarrow$

'함수 $f(x)$는 증가한다.'

$\Leftrightarrow$

'함수 $f(x)$는 일대일대응이다.'

$\Leftrightarrow$

'함수 $f(x)$는 극값을 갖지 않는다.'

따라서 아래의 참인 명제를 생각할 수 있다.

'어떤 실수 t에 대하여 $f'(t)<0$이다.'

$\Leftrightarrow$

'함수 $f(x)$는 극값을 갖는다.'

[참고2]

함수 $f(x)$의 방정식을 다음과 같이 유도할 수도 있다.

인수정리에 의하여

$$f(x)-x=cx(x-a)(x-b)$$

(단, c는 양의 상수)

함수 $f(x)$의 방정식은

$$f(x)=cx(x-a)(x-b)+x$$

$f(1)=2$, $f(2)=1$이므로

$$f(1)=c(1-a)(1-b)+1=2,$$
$$f(2)=2c(2-a)(2-b)+2=1$$

정리하면

$$1-a-b+ab=\frac{1}{c},$$

$$4-2a-2b+ab=-\frac{1}{2c}$$

위의 두 식을 변변히 빼서 정리하면

$$a+b=3+\frac{3}{2c}\qquad\cdots㉠$$

이를 위의 두 식 중 한 식에 대입하여 정리하면

$$ab=2+\frac{5}{2c}\qquad\cdots㉡$$

함수 $f(x)$의 도함수는

$$f'(x)=c(x-a)(x-b)+cx(x-b)$$
$$+cx(x-a)+1$$

$$f'(0)=abc+1,$$
$$f'(1)=c(1-a)(1-b)+c(2-a-b)+1$$
$$=c(3-2a-2b+ab)+1$$
$$=c\left(3-6-\frac{3}{c}+2+\frac{5}{2c}\right)+1=-c+\frac{1}{2}(\because ㉠,\ ㉡)$$

문제에서 주어진 조건에 의하여

$$f'(0)-f'(1)=abc+c+\frac{1}{2}=6$$

정리하면

$$c(ab+1)=\frac{11}{2}$$

$$c\left(3+\frac{5}{2c}\right)=\frac{11}{2}(\because ㉡)$$

정리하면

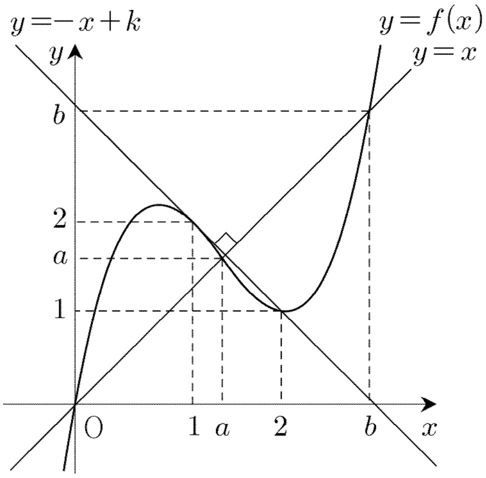
$3c+\dfrac{5}{2}=\dfrac{11}{2}$ 풀면 $c=1$

이를 ㉠, ㉡에 대입하면

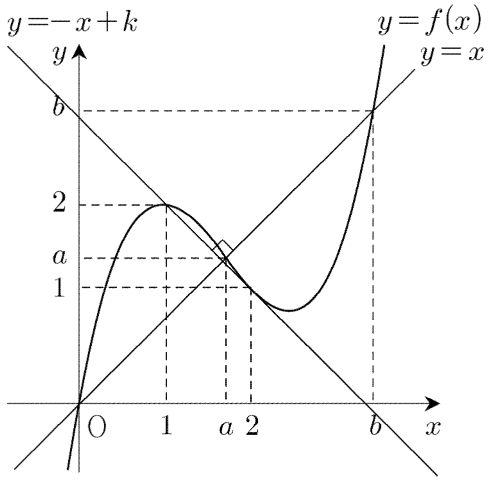
$$a+b=\frac{9}{2},\ ab=\frac{9}{2}$$

두 수 a, b는 이차방정식 $t^2-\frac{9}{2}t+\frac{9}{2}=0$의 서로 다른 두 실근이다.
이 이차방정식을 정리하면
$2t^2-9t+9=0$, $(2t-3)(t-3)=0$
풀면
$t=\frac{3}{2}(=a)$ 또는 $t=3(=b)$
함수 $f(x)$의 방정식은
$f(x)=x\left(x-\frac{3}{2}\right)(x-3)+x$
$\therefore\ f(5)=40$
물론 a, b의 값을 각각 구하지 않고, $f(5)$의 값을 구할 수도 있다.
$f(5)=5c(5-a)(5-b)+5$
$=5\{25-5(a+b)+ab\}+5$
$=5\left\{25-5\times\frac{9}{2}+\frac{9}{2}\right\}+5$
$=40$

[참고3]
곡선 $y=f(x)$에 직선 $y=-x+k$가 접하는 경우에 대하여 생각해보자.
곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 개수가 3이고, 직선 $y=-x+k$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 한 점에서 접한다고 하자. (단, 접점의 x좌표는 a보다 작다.) 이때, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-x+k$의 교점의 개수는 2이고, 이 2개의 교점은 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이어야 한다.



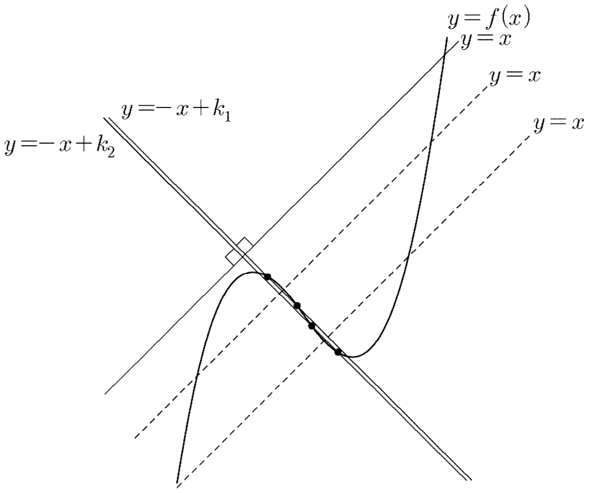
직선 $y=-x+k$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ 2)$에서 접하고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,\ 1)$을 지나므로
인수정리에 의하여
$f(x)-(-x+k)=c(x-1)^2(x-2)$
(단, c는 양의 상수)
정리하면
$f(x)=c(x-1)^2(x-2)-x+k$
곡선 $y=f(x)$가 원점을 지나므로
$0=-2c+k$에서 $k=2c$
함수 $f(x)$의 방정식은
$f(x)=c(x-1)^2(x-2)-x+2c$
함수 $f(x)$의 도함수는
$f'(x)=2c(x-1)(x-2)+c(x-1)^2-1$
문제에서 주어진 조건에 의하여
$f'(0)-f'(1)=5c-1-(-1)=5c=6$
풀면 $c=\frac{6}{5}$
함수 $f(x)$의 방정식은
$f(x)=\frac{6}{5}(x-1)^2(x-2)-x+\frac{12}{5}$
그런데 $f(1)=\frac{7}{5}\neq 2$이므로 이는 가정에 모순이다.
곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 개수가 3이고, 직선 $y=-x+k$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 한 점에서 접한다고 하자. (단, 접점의 x좌표는 a보다 크다.) 이때, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-x+k$의 교점의 개수는 2이고, 이 2개의 교점은 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이어야 한다.



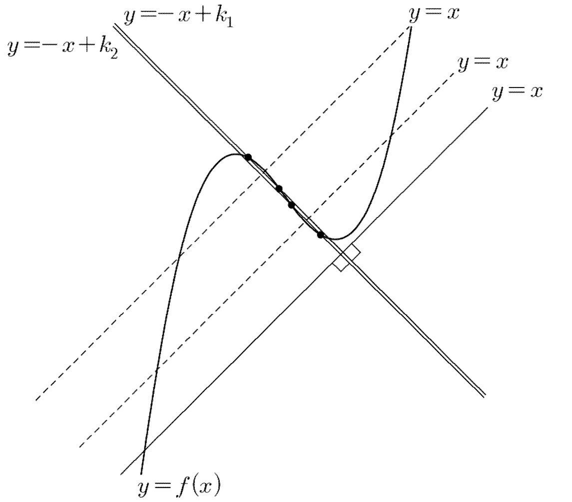
직선 $y=-x+k$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,\ 1)$에서 접하고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ 2)$을 지나므로
인수정리에 의하여
$f(x)-(-x+k)=c(x-1)(x-2)^2$

(단, c는 양의 상수)
정리하면
$f(x)=c(x-1)(x-2)^2-x+k$
곡선 $y=f(x)$가 원점을 지나므로
$0=-4c+k$에서 $k=4c$
함수 $f(x)$의 방정식은
$f(x)=c(x-1)(x-2)^2-x+4c$
함수 $f(x)$의 도함수는
$f'(x)=c(x-2)^2+2c(x-1)(x-2)-1$
문제에서 주어진 조건에 의하여
$f'(0)-f'(1)=8c-1-(c-1)=7c=6$
풀면 $c=\dfrac{6}{7}$
함수 $f(x)$의 방정식은
$f(x)=\dfrac{6}{7}(x-1)(x-2)^2-x+\dfrac{24}{7}$
그런데 $f(1)=\dfrac{17}{7}\neq 2$이므로 이는 가정에 모순이다.

[참고4]
곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 개수가 1인 경우를 살펴보자.

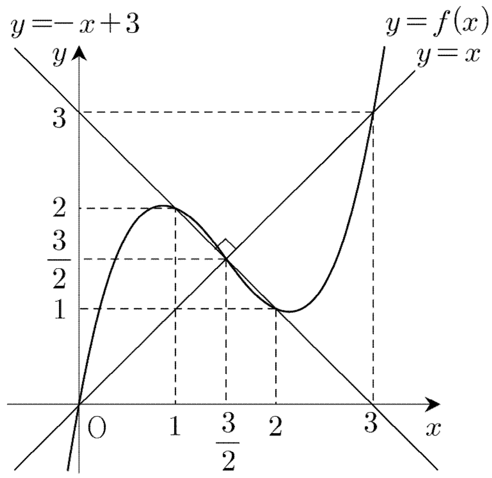


위의 그림에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-x+k_1$의 두 교점은 직선 $y=x$에 대하여 대칭일 수 없음을 확인할 수 있다. 그리고 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-x+k_2$의 두 교점은 직선 $y=x$에 대하여 대칭일 수 없음을 확인할 수 있다.



위의 그림에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-x+k_1$의 두 교점은 직선 $y=x$에 대하여 대칭일 수 없음을 확인할 수 있다. 그리고 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-x+k_2$의 두 교점은 직선 $y=x$에 대하여 대칭일 수 없음을 확인할 수 있다.

[참고5] 교육과정 외
삼차함수 $f(x)$의 그래프가 변곡점에 대하여 대칭임을 이용하면 빠르게 문제를 해결할 수 있다.
삼차함수 $f(x)$의 그래프는 변곡점에 대하여 대칭이므로 아래 그림처럼 두 직선 $y=x$, $y=-x+k$의 교점을 곡선 $y=f(x)$의 변곡점과 일치시키자. 이때, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-x+k$의 세 교점 중 두 점은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고, 나머지 한 점은 직선 $y=x$ 위에 있게 된다. 그리고 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 세 교점 중 두 점은 직선 $y=-x+k$에 대하여 대칭이고, 나머지 한 점은 직선 $y=-x+k$ 위에 있게 된다.



$f(0)=0$, $f(a)=a$, $f(b)=b$이므로

$f(1)=2$, $f(2)=1$일 수 밖에 없다.

점 $(a,\ a)$는 두 점 $(1,\ 2)$, $(2,\ 1)$을 잇는 선분의 중점이므로 선분의 내분점의 공식에 의하여

$\frac{1+2}{2}=a$에서 $a=\frac{3}{2}$

직선 $y=-x+k$는 점 $\left(\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\right)$을 지나므로

$\frac{3}{2}=-\frac{3}{2}+k$에서 $k=3$

점 $\left(\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\right)$은 두 점 $(0,\ 0)$, $(b,\ b)$를 잇는 선분의 중점이므로 선분의 내분점의 공식에 의하여

$\frac{0+b}{2}=\frac{3}{2}$에서 $b=3$

인수정리에 의하여

$$f(x)-x=cx\left(x-\frac{3}{2}\right)(x-3)$$

(단, c는 양의 상수)

함수 $f(x)$의 방정식은

$$f(x)=cx\left(x-\frac{3}{2}\right)(x-3)+x$$

함수 $f(x)$의 도함수는

$$f(x)=c\left(x-\frac{3}{2}\right)(x-3)+cx(x-3)$$

$$+cx\left(x-\frac{3}{2}\right)+1$$

문제에서 주어진 조건에 의하여

$f'(0)-f'(1)=6c=6$에서 $c=1$

함수 $f(x)$의 방정식은

$$f(x)=x\left(x-\frac{3}{2}\right)(x-3)+x$$

$\therefore\ f(5)=40$