01

[풀이]

성분으로 주어진 벡터의 연산에 의하여

$2\vec{a}-\vec{b}=(8,\ 2)-(3,\ -2)=(5,\ 4)$

따라서 구하는 값은 $9(=5+4)$이다.

답 ⑤

02

[풀이]

$t=e^x-1$로 치환하면 $x=\ln(1+t)$이고,

$x\to0$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{t\to0}\frac{t}{\ln(1+t)}=\lim_{t\to0}\frac{1}{\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}}$$

$$=\frac{1}{\ln e}=1$$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x(x^2+2)}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}\times\frac{1}{x^2+2}$$

$$=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

답 ②

03

[풀이]

좌표공간에서 선분의 외분점의 공식에 의하여

$$a=\frac{3\times4-2\times3}{3-2}=6$$

답 ②

04

[풀이]

확률의 덧셈정리에 의하여

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B^C)$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{5}=\frac{3}{10}$$

드모르간의 법칙에 의하여

$A^C\cup B^C=(A\cap B)^C$

여사건의 확률의 정의에 의하여

$\therefore\ \mathrm{P}(A^C\cup B^C)=1-\mathrm{P}(A\cap B)$

$$=1-\frac{3}{10}=\frac{7}{10}$$

답 ④

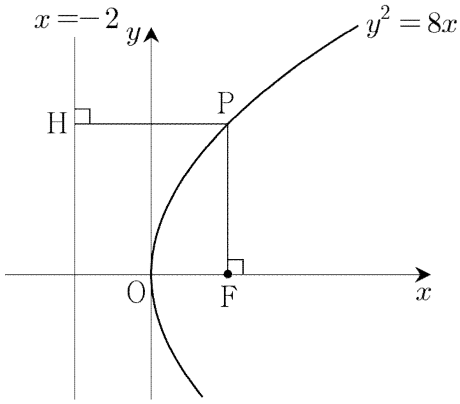
05

[풀이1]

$y^2=4\times2\times x$이므로 초점 F의 좌표는 $(2,\ 0)$이고,

준선의 방정식은 $x=-2$이다.

점 P에서 준선 $x=-2$에 내린 수선의 발을 H라고 하자.



포물선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{PF}}=4$

이므로 점 P의 x좌표는 $2(=4-2)$이다.

즉, $a=2$

이를 포물선의 방정식에 대입하면

$y^2=16$에서 $y=4$ 즉, $b=4$

$\therefore\ a+b=6$

답 ④

[풀이2]

$y^2=4\times2\times x$이므로 문제에서 주어진 포물선의 초점의 좌표는 $\mathrm{F}(2,\ 0)$이다.

문제에서 주어진 포물선은 제1사분면과 제4사분면을 지나고, $b>0$이므로 점 P는 제1사분면에 속한다. 따라서 $a>0$이다.

점 P는 포물선 위에 있으므로

$b^2=8a$ …㉠

두 점 사이의 거리 공식에 의하여

$\overline{\mathrm{PF}}=\sqrt{(a-2)^2+b^2}=4$

양변을 제곱하여 정리하면

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.
http://cafe.naver.com/2math
https://atom.ac/books/5074

$(a-2)^2+b^2=16$ $\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$(a-2)^2+8a=16$

정리하면

$a^2+4a-12=0$

좌변을 인수분해하면

$(a+6)(a-2)=0$

풀면

$a=2(\because a>0)$

이를 ㉠에 대입하면 $b=4(\because b>0)$

$\therefore\ a+b=6$

답 ④

06

[풀이]

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=3\ln x+3$

이므로 $f'(e)=6$이다.

역함수의 성질에 의하여

$g(3e)=e(\because f(e)=3e)$

역함수의 미분법에 의하여

$g'(3e)=\dfrac{1}{f'(e)}=\dfrac{1}{6}$

미분계수 $g'(3e)$가 존재하므로

함수 $g(x)$는 $x=3e$에서 미분가능하다.

함수의 극한의 성질에 의하여

$$\therefore\ \lim_{h\to 0}\frac{g(3e+h)-g(3e-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{g(3e+h)-g(3e-h)}{2h}\times 2$$

$$=2g'(3e)=2\times\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$

답 ①

[참고]

문제에서 주어진 극한값을 다음과 같이 구해도 좋다.

함수의 극한의 성질과 미분계수의 정의에 의하여

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(3e+h)-g(3e-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{g(3e+h)-g(3e)}{h}-\frac{g(3e-h)-g(3e)}{h}\right\}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{g(3e+h)-g(3e)}{h}+\frac{g(3e-h)-g(3e)}{-h}\right\}$$

$$=g'(3e)+g'(3e)$$

$$=2g'(3e)=2\times\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$

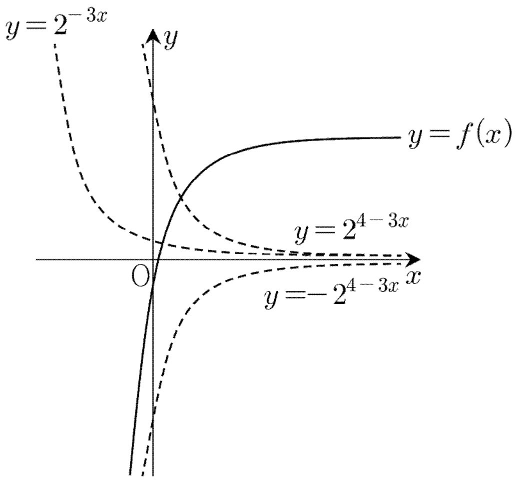
07

[풀이]

$f(x)=-2^{-3\left(x-\frac{4}{3}\right)}+k$이므로

함수 $y=2^{-3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\dfrac{4}{3}$만큼 평행이동, x축에 대하여 대칭이동, y축의 방향으로 k만큼 평행이동하면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 일치한다.

함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



위의 그림에서

$f(0)\le 0$ 즉, $k-16\le 0$

이면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 제2사분면을 지나지 않는다.

자연수 k의 범위는

$1\le k\le 16$

따라서 자연수 k의 최댓값은 16이다.

답 ④

08

[풀이]

전개식의 일반항은

${}_{19}\mathrm{C}_k x^k 2^{19-k}$

이므로 x^k와 x^{k+1}의 계수는 각각

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.
http://cafe.naver.com/2math
https://atom.ac/books/5074

${}_{19}\mathrm{C}_k 2^{19-k}$, ${}_{19}\mathrm{C}_{k+1} 2^{18-k}$이다.
문제에서 주어진 조건에 의하여
${}_{19}\mathrm{C}_k 2^{19-k} > {}_{19}\mathrm{C}_{k+1} 2^{18-k}$
양변을 양수 2^{18-k}로 나누면
$2\,{}_{19}\mathrm{C}_k > {}_{19}\mathrm{C}_{k+1}$ (단, $1 \le k \le 18$)

$$2 \times \frac{k+1}{19-k} > 1$$

$$(\because \ {}_{19}\mathrm{C}_k = \frac{19 \times 18 \times \cdots \times (20-k)}{1 \times 2 \times \cdots \times k}$$

$$= \frac{19 \times 18 \times \cdots \times (20-k) \times (19-k)}{1 \times 2 \times \cdots \times k \times (k+1)} \times \frac{k+1}{19-k}$$

$$= \frac{k+1}{19-k}\ {}_{19}\mathrm{C}_{k+1})$$

양변에 양수 $19-k$를 곱하여 정리하면

$$k > \frac{17}{3} \approx 5.6$$

따라서 자연수 k의 최솟값은 6이다.
답 ③

09

[풀이]
문제에서 주어진 그림에 의하여
구간 $[0,\ 1]$에서 $\sin\frac{\pi}{2}x \ge 2^x - 1 \ge 0$
이므로 구하는 넓이를 S라고 하면

$$S = \int_0^1 \left(\sin\frac{\pi}{2}x - 2^x + 1\right)dx$$

$$= \left[-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x - \frac{2^x}{\ln 2} + x\right]_0^1$$

($\because$ 정적분의 치환적분법)

$$= \frac{2}{\pi} - \frac{1}{\ln 2} + 1$$

답 ②

[참고]
구간 $[0,\ 1]$에서 곡선 $y = \sin\frac{\pi}{2}x$가 직선 $y = x$ 위에 있고, 구간 $[0,\ 1]$에서 곡선 $y = 2^x - 1$이 직선 $y = x$ 아래에 있음을 증명할 수도 있다. 하지만 문제에서 두 곡선 $y = 2^x - 1$, $y = \sin\frac{\pi}{2}x$의 위치관계를 그림으로 명확히 하였으므로, 이를 반드시 증명해야 하는 것은 아니다.

10

[풀이]
점 P의 속도를 $(v_x,\ v_y)$라고 하면
$v_x = 3 - \cos t$, $v_y = \sin t$
(점 P의 속력)

$$= \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$= \sqrt{(3-\cos t)^2 + \sin^2 t}$$

$$= \sqrt{10 - 6\cos t}\ (\because \cos^2 t + \sin^2 t = 1)$$

그런데 구간 $[0,\ \infty)$에서 $-1 \le \cos t \le 1$이므로
$2 = \sqrt{10 - 6 \times 1} \le$(점 P의 속력)
$\le \sqrt{10 - 6 \times (-1)} = 4$
(단, 왼쪽 등호는 $t = 2(n-1)\pi$일 때,
오른쪽 등호는 $t = (2n-1)\pi$일 때 성립한다.
(n은 자연수))
$M = 4$, $m = 2$이므로
$\therefore\ M + m = 4 + 2 = 6$
답 ④

11

[풀이]
음함수의 미분법에 의하여

$$e^y \frac{dy}{dx} \ln x + e^y \frac{1}{x} = 2\frac{dy}{dx}$$

정리하면

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{e^y}{x(e^y \ln x - 2)}$$

$$a = -\frac{e^0}{e(e^0 \ln e - 2)} = \frac{1}{e}$$

접선의 방정식은
$y = \frac{1}{e}(x - e) + 0$ 즉, $y = \frac{1}{e}x - 1$에서 $b = -1$

$$\therefore\ ab = -\frac{1}{e}$$

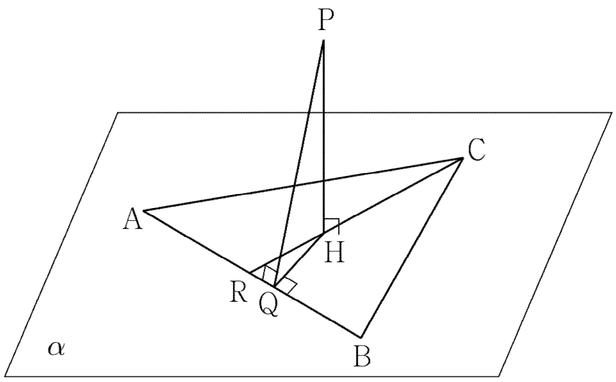
답 ⑤

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.
http://cafe.naver.com/2math
https://atom.ac/books/5074

12

[풀이1]

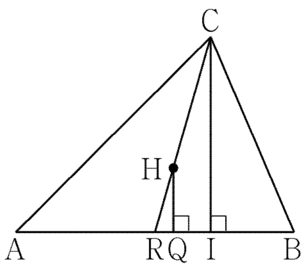
선분 CH의 연장선이 선분 AB와 만나는 점을 R이라고 하자.



위의 그림처럼 두 점 R, Q가 일치하지 않을 수도 있다. (만약 삼각형 ABC가 $\overline{AC}=\overline{CB}$인 이등변삼각형이면 두 점 R, Q는 일치한다.)

평면 α에 수직인 방향에서 바라본 그림은 다음과 같다.

점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 I라고 하자.



$\overline{PH}\perp\alpha$, $\overline{PQ}\perp\overline{AB}$이므로

삼수선의 정리❷에 의하여

$\overline{HQ}\perp\overline{AB}$

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

($\triangle$ABC의 넓이)

$=\dfrac{1}{2}\overline{AB}\,\overline{CI}=4\overline{CI}=24$에서 $\overline{CI}=6$

무게중심의 성질에 의하여

$\overline{CH}:\overline{HR}=2:1$

두 삼각형 CRI, HRQ의 닮음비는 $3:1$이므로

$\overline{HQ}:\overline{CI}=1:3$

즉, $\overline{HQ}:6=1:3$에서 $\overline{HQ}=2$

직각삼각형 PQH에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{PQ}=\sqrt{\overline{PH}^2+\overline{HQ}^2}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$

답 ②

[풀이2]

세 점 A, B, C의 좌표가 각각

(0, 0, 0), (8, 0, 0), (c, 6, 0)이 되도록

좌표공간을 도입하자.

(평면 α는 xy평면과 일치하며, z축은 평면 α에 수직이다.)

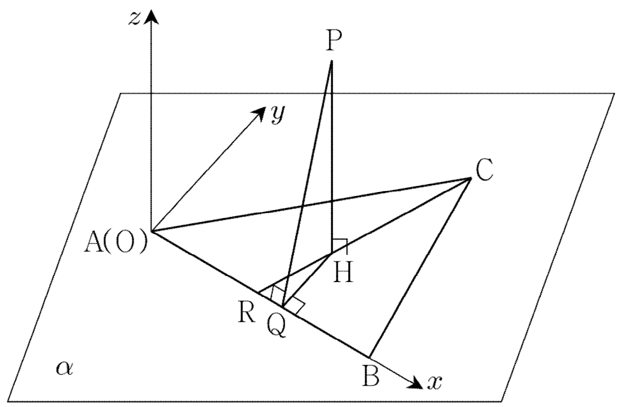
이때, 점 C의 y좌표를 6으로 둘 수 있는 이유는 다음과 같다.

($\triangle$ABC의 넓이)$=\dfrac{1}{2}\overline{AB}\times$|점 C의 y좌표|

$=4$|점 C의 y좌표|$=24$ 즉, |점 C의 y좌표|$=6$

점 C의 y좌표는 6 또는 -6이므로

점 C의 y좌표를 6으로 두어도 풀이의 일반성을 잃지 않는다.



삼각형의 무게중심의 성질에 의하여

점 R은 선분 AB의 중점이고,

점 H는 선분 CR의 $2:1$내분점이다.

내분점의 공식에 의하여

$\mathrm{R}(4,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{H}\left(\dfrac{8+c}{3},\ 2,\ 0\right)$

$\overline{PH}=4$에서 점 P의 z좌표는 4이므로

$\mathrm{P}\left(\dfrac{8+c}{3},\ 2,\ 4\right)$

x축 위의 점 Q의 x좌표, z좌표는 각각 점 H의 x좌표, z좌표와 같으므로

$\mathrm{Q}\left(\dfrac{8+c}{3},\ 0,\ 0\right)$

두 점 사이의 거리 공식에 의하여

$\overline{PQ}=\sqrt{0^2+2^2+4^2}=2\sqrt{5}$

답 ②

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.
http://cafe.naver.com/2math
https://atom.ac/books/5074

13

[풀이]

확률질량함수의 성질에 의하여

$\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=4)$

$=\dfrac{1}{6}+a+b=1$ 즉, $a+b=\dfrac{5}{6}$ …㉠

이산확률변수의 평균의 정의에 의하여

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\dfrac{1}{6}+2^2\times a+4^2\times b=\dfrac{16}{3}$

즉, $a+4b=\dfrac{4}{3}$ …㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$a=\dfrac{2}{3}$, $b=\dfrac{1}{6}$

이산확률변수의 평균의 정의에 의하여

$\mathrm{E}(X)=0\times\dfrac{1}{6}+2\times\dfrac{2}{3}+4\times\dfrac{1}{6}=2(=m)$

이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-m^2=\dfrac{16}{3}-4=\dfrac{4}{3}(=\sigma^2)$

표본평균의 분산을 구하는 공식에 의하여

$\therefore\ \mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{\sigma^2}{n}=\dfrac{\frac{4}{3}}{20}=\dfrac{1}{15}$

답 ④

14

[풀이1]

삼각함수의 성질에 의하여

$\cos\left(x-\dfrac{3}{4}\pi\right)=\cos\left(\dfrac{3}{4}\pi-x\right)$

$=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

이므로 함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=\sin^2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)-\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+k$

$=1-\cos^2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)-\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+k$

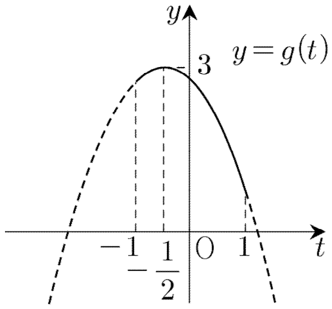
$(\because \sin^2x+\cos^2x=1)$

$\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=t$, $f(x)=g(t)$로 두면

$g(t)=-t^2-t+k+1$ (단, $-1\le t\le 1$)

$=-\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{5}{4}+k$

($\because$ 삼각함수 $y=\cos x$의 최댓값과 최솟값은 각각 1, -1이다.)



구간 $[-1,\ 1]$에서

함수 $g(t)$의 최댓값: $g\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{5}{4}+k=3$

함수 $g(t)$의 최솟값: $g(1)=-1+k=m$

연립방정식을 풀면

$k=\dfrac{7}{4}$, $m=\dfrac{3}{4}$

$\therefore\ k+m=\dfrac{5}{2}$

답 ③

[풀이2] ※ 교육과정 외

삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$\cos\left(x-\dfrac{3}{4}\pi\right)=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin x$,

$\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin x$

이고,

$\cos^2\left(x-\dfrac{3}{4}\pi\right)=\dfrac{1}{2}-\cos x\sin x$

$(\because \sin^2x+\cos^2x=1)$

이므로 함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=-\cos x\sin x-\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\cos x+\sin x)+k+\dfrac{1}{2}$

(단, $0\le x<2\pi$)

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=\sin^2x-\cos^2x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\sin x-\cos x)$

$=(\sin x-\cos x)\left(\sin x+\cos x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.
http://cafe.naver.com/2math
https://atom.ac/books/5074

$=\sqrt{2}(\sin x-\cos x)\left(\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}\right)$

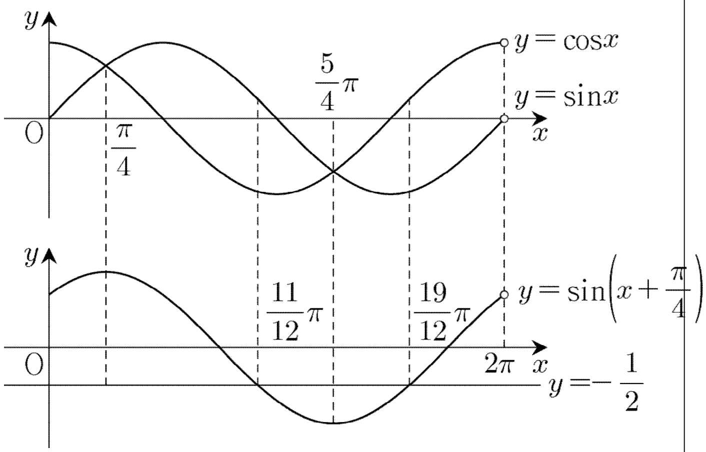
($\because$삼각함수의 합성)

방정식 $f'(x)=0$을 풀면

$\sin x=\cos x$, $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}$

전자를 풀면 $x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{5}{4}\pi$

후자를 풀면 $x=\frac{11}{12}\pi$ 또는 $x=\frac{19}{12}\pi$



$x=\frac{\pi}{4}$의 좌우에서

$\sin x-\cos x$의 부호는 음에서 양으로 바뀌고,

$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)$의 부호는 양으로 변함이 없다.

$x=\frac{\pi}{4}$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호는 음에서 양으로 바뀌므로

함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{4}$에서 극솟값을 갖는다.

$x=\frac{5}{4}\pi$의 좌우에서

$\sin x-\cos x$의 부호는 양에서 음으로 바뀌고,

$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)$의 부호는 음으로 변함이 없다.

$x=\frac{5}{4}\pi$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호는 음에서 양으로 바뀌므로

함수 $f(x)$는 $x=\frac{5}{4}\pi$에서 극솟값을 갖는다.

$x=\frac{11}{12}\pi$의 좌우에서

$\sin x-\cos x$의 부호는 양으로 변함이 없고,

$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)$의 부호는 양에서 음으로 바뀐다.

$x=\frac{11}{12}\pi$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호는 양에서 음으로 바뀌므로

함수 $f(x)$는 $x=\frac{11}{12}\pi$에서 극댓값을 갖는다.

$x=\frac{19}{12}\pi$의 좌우에서

$\sin x-\cos x$의 부호는 음으로 변함이 없고,

$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)$의 부호는 음에서 양으로 바뀐다.

$x=\frac{19}{12}\pi$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호는 양에서 음으로 바뀌므로

함수 $f(x)$는 $x=\frac{19}{12}\pi$에서 극댓값을 갖는다.

극솟값: $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=-1+k$, $f\left(\frac{5}{4}\pi\right)=1+k$

극댓값: $f\left(\frac{11}{12}\pi\right)=\frac{5}{4}+k$, $f\left(\frac{19}{12}\pi\right)=\frac{5}{4}+k$

($\because x=\frac{11}{12}\pi$ 또는 $x=\frac{19}{12}\pi$일 때,

$\sin x+\cos x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$이고, $\sin x\cos x=-\frac{1}{4}$이다.)

경계에서의 함숫값: $f(0)=\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}+k$

$-1+k<\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}+k<1+k<\frac{5}{4}+k$

이므로

함수 $f(x)$의 최솟값: $-1+k=m$

함수 $f(x)$의 최댓값: $\frac{5}{4}+k=3$

연립방정식을 풀면

$k=\frac{7}{4}$, $m=\frac{3}{4}$

$\therefore\ k+m=\frac{5}{2}$

답 ③

[참고1]

이계도함수를 이용하여 함수 $f(x)$의 극값을 판단할 수도 있다.

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.
http://cafe.naver.com/2math
https://atom.ac/books/5074

함수 $f(x)$의 이계도함수는

$f''(x)=4\cos x\sin x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\cos x+\sin x)$

$f''\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=3>0,\ f''\left(\dfrac{5}{4}\pi\right)=1>0,$

$f''\left(\dfrac{11}{12}\pi\right)=-\dfrac{3}{2}<0,\ f''\left(\dfrac{19}{12}\pi\right)=-\dfrac{3}{2}<0$

($\because x=\dfrac{11}{12}\pi$ 또는 $x=\dfrac{19}{12}\pi$일 때,

$\sin x+\cos x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$이고, $\sin x\cos x=-\dfrac{1}{4}$이다.)

이므로 함수 $f(x)$는

$x=\dfrac{\pi}{4}$와 $x=\dfrac{5}{4}\pi$에서 극솟값을 갖고,

$x=\dfrac{11}{12}\pi$와 $x=\dfrac{19}{12}\pi$에서 극댓값을 갖는다.

[풀이3] 교육과정 외

삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$\cos\left(x-\dfrac{3}{4}\pi\right)=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin x,$

$\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin x$

이고,

$\cos^2\left(x-\dfrac{3}{4}\pi\right)=\dfrac{1}{2}-\cos x\sin x$

($\because \sin^2 x+\cos^2 x=1$)

이므로 함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=-\cos x\sin x-\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\cos x+\sin x)+k+\dfrac{1}{2}$

(단, $0\le x<2\pi$)

이제 $\cos x+\sin x=t$, $\cos x\sin x=s$로 두자.

전자의 등식의 양변을 제곱하여 정리하면

$1+2s=t^2$ ($\because \cos^2 x+\sin^2 x=1$)

$f(x)=g(t)$로 두면

$g(t)=-\dfrac{1}{2}t^2-\dfrac{1}{\sqrt{2}}t+k+1$

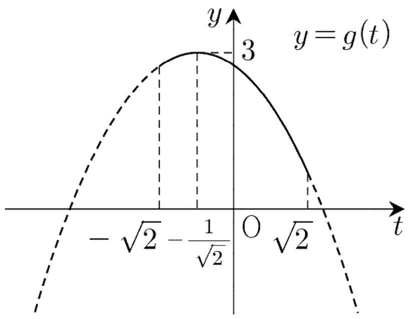
$=-\dfrac{1}{2}\left(t+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+k+\dfrac{5}{4}$

(단, $-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$)

($\because$삼각함수의 합성에 의하여

$\cos x+\sin x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$이고,

$-\sqrt{2}\le\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\le\sqrt{2}$이다.)



구간 $[-\sqrt{2},\ \sqrt{2}]$에서

함수 $g(t)$의 최댓값: $g\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{5}{4}+k=3$

함수 $g(t)$의 최솟값: $g(\sqrt{2})=-1+k=m$

연립방정식을 풀면

$k=\dfrac{7}{4},\ m=\dfrac{3}{4}$

$\therefore\ k+m=\dfrac{5}{2}$

답 ③

[참고2]

t의 범위를 다음과 같이 구해도 좋다.

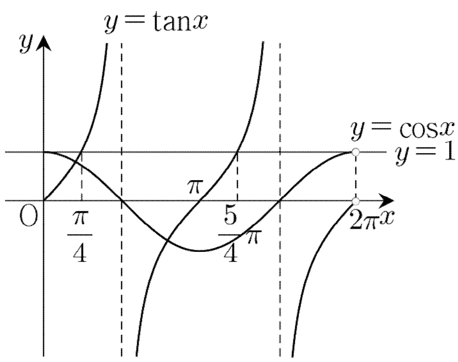
함수

$y=\cos x+\sin x$(단, $0\le x<2\pi$) $\cdots(*)$

의 도함수는

$y'=-\sin x+\cos x=\cos x(1-\tan x)$

방정식 $y'=0$을 풀면 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 또는 $x=\dfrac{5}{4}\pi$



$x=\dfrac{\pi}{4}$의 좌우에서 y'의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 (*)는 $x=\dfrac{\pi}{4}$에서 극댓값 $\sqrt{2}$를 갖는다.

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.
http://cafe.naver.com/2math
https://atom.ac/books/5074

$x=\frac{5}{4}\pi$의 좌우에서 y'의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 (*)는 $x=\frac{5}{4}\pi$에서 극솟값 $-\sqrt{2}$를 갖는다.

경계에서의 함숫값: $x=0$일 때, $y=1$

따라서 함수 (*)의 최댓값과 최솟값은 각각 $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$이다.

15

[풀이]

두 동전 A, B의 앞면이 나올 경우의 수를 각각 m, n이라고 하자.

(단, $0 \le m \le 3$, $0 \le n \le 4$)

이때, 두 동전 A, B의 뒷면이 나올 경우의 수는 각각 $3-m$, $4-n$이다.

동전 A를 세 번, 동전 B를 네 번 던져 나온 7개의 수의 합은

$1 \times m + 2 \times (3-m) + 3 \times n + 4 \times (4-n)$

$=22-m-n$

문제에서 주어진 조건에 의하여

$22-m-n=19$ 또는 $22-m-n=20$

정리하면

$m+n=3$ 또는 $m+n=2$

(1) $m+n=3$인 경우

이 경우의 확률을 p라고 하자.

순서쌍 $(m,\ n)$을 모두 쓰면

$(3,\ 0)$, $(2,\ 1)$, $(1,\ 2)$, $(0,\ 3)$

각각의 순서쌍에 대하여 1, 2, 3, 4가 나오는 횟수를 표로 정리하면 다음과 같다.

$(m,\ n)$	1	2	3	4	경우
$(3,\ 0)$	3	0	0	4	(경우1)
$(2,\ 1)$	2	1	1	3	(경우2)
$(1,\ 2)$	1	2	2	2	(경우3)
$(0,\ 3)$	0	3	3	1	(경우4)

각각의 경우가 일어날 확률은

독립시행의 확률과 확률의 곱셈정리에 의하여

(동전 A를 던지는 사건과 동전 B를 던지는 사건은 서로 독립이다.)

(경우1): ${}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0 \times {}_4\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{2^7}$

(경우2): ${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1 \times {}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{12}{2^7}$

(경우3): ${}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times {}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{18}{2^7}$

(경우4): ${}_3\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times {}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{4}{2^7}$

위의 네 경우가 동시에 발생하지 않으므로

확률의 덧셈정리에 의하여

$p=\frac{1}{2^7}+\frac{12}{2^7}+\frac{18}{2^7}+\frac{4}{2^7}=\frac{35}{2^7}$

(2) $m+n=2$인 경우

이 경우의 확률을 q라고 하자.

순서쌍 $(m,\ n)$을 모두 쓰면

$(2,\ 0)$, $(1,\ 1)$, $(0,\ 2)$

각각의 순서쌍에 대하여 1, 2, 3, 4가 나오는 횟수를 표로 정리하면 다음과 같다.

$(m,\ n)$	1	2	3	4	경우
$(2,\ 0)$	2	1	0	4	(경우5)
$(1,\ 1)$	1	2	1	3	(경우6)
$(0,\ 2)$	0	3	2	2	(경우7)

각각의 경우가 일어날 확률은

독립시행의 확률과 확률의 곱셈정리에 의하여

(동전 A를 던지는 사건과 동전 B를 던지는 사건은 서로 독립이다.)

(경우5): ${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1 \times {}_4\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{3}{2^7}$

(경우6): ${}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times {}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{12}{2^7}$

(경우7): ${}_3\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times {}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{6}{2^7}$

위의 세 경우가 동시에 발생하지 않으므로

확률의 덧셈정리에 의하여

$q=\frac{3}{2^7}+\frac{12}{2^7}+\frac{6}{2^7}=\frac{21}{2^7}$

(1), (2)는 동시에 발생하지 않으므로

구하는 확률은 확률의 덧셈정리에 의하여

$p+q=\frac{35}{2^7}+\frac{21}{2^7}=\frac{7}{16}$

답 ①

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.
http://cafe.naver.com/2math
https://atom.ac/books/5074

16

[풀이1]
벡터의 뺄셈의 정의에 의하여
$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}$
이를 문제에서 주어진 등식에 대입하여 정리하면
$\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}\right|=\left|2\overrightarrow{\mathrm{OP}}-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})\right|=\sqrt{10}$
양변을 2로 나누면

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})\right|=\frac{\sqrt{10}}{2} \qquad \cdots ㉠$$

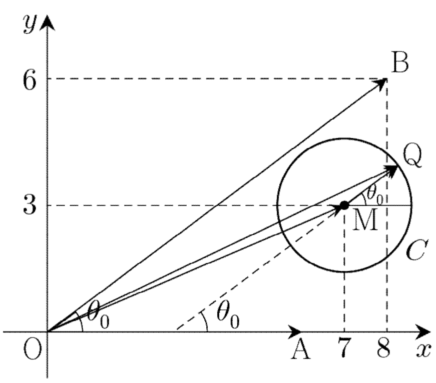
선분 AB의 중점은 M이므로
벡터의 덧셈의 정의와 평행사변형의 성질에 의하여

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2\overrightarrow{\mathrm{OM}} \qquad \cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right|=\frac{\sqrt{10}}{2} \text{ 즉, } \left|\overrightarrow{\mathrm{MP}}\right|=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

벡터의 크기의 정의에 의하여
좌표평면에서 점 P의 자취는 중심이 M이고 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{10}}{2}$인 원이다. 이 원을 C라고 하자.
점 M을 지나고 직선 OB와 평행한 직선이 원 C와 만나는 두 점 중에서 원점에서 거리가 먼 점을 Q라고 하자.



벡터의 덧셈의 정의에 의하여
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{MP}}$
벡터의 내적의 성질에 의하여
$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{MP}})$
$=\underbrace{\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}}}_{\text{일정하다(상수)}}+\underbrace{\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MP}}}_{\text{변한다(변수)}}$
$\le\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MQ}}$
(단, 등호는 점 P가 점 Q 위에 있을 때 성립한다.)
직선 OB가 x축의 양의 방향과 이루는 예각의 크기를 θ_0라고 하면
삼각비의 정의에 의하여

$$\cos\theta_0=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$$

두 직선 OB, MQ가 서로 평행하므로
두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{MQ}}$가 이루는 각의 크기는 θ_0이다.
벡터의 내적의 정의에 의하여
$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MQ}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{MQ}}\right|\cos\theta_0$
$=6\times\frac{\sqrt{10}}{2}\times\frac{4}{5}=\frac{12\sqrt{10}}{5}$
답 ③

[참고1]
두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PB}}$의 두 시점을 잇는 선분의 중점은 P이고, 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PB}}$의 두 종점을 잇는 선분의 중점은 M이므로
$\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\overrightarrow{\mathrm{PM}}$
임을 바로 알 수 있다.

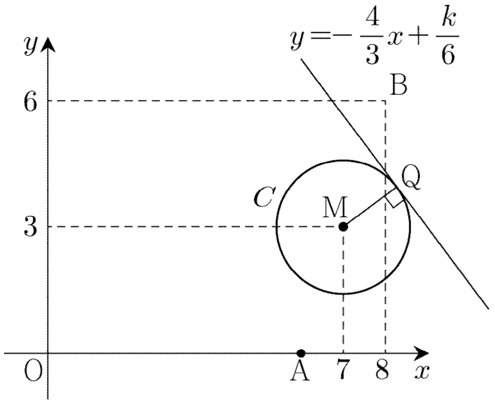
[풀이2]
좌표평면에서 내분점의 공식에 의하여
M(7, 3)
점 P의 좌표를 $(x,\ y)$로 두자.
성분으로 주어진 벡터의 연산에 의하여
$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(6-x,\ -y)$
$\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(8-x,\ 6-y)$
$\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}=(14-2x,\ 6-2y)$
성분으로 주어진 벡터의 크기에 대한 정의에 의하여
$\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}\right|=\sqrt{(14-2x)^2+(6-2y)^2}=\sqrt{10}$
양변을 제곱하여 정리하면

$$(x-7)^2+(y-3)^2=\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2$$

좌표평면에서 점 P의 자취는 중심이 M이고 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{10}}{2}$인 원이다. 이 원을 C라고 하자.
성분으로 주어진 벡터의 내적에 의하여
$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$
$=(8,\ 6)\cdot(x,\ y)=8x+6y=k$
(단, k는 상수)
정리하면

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.
http://cafe.naver.com/2math
https://atom.ac/books/5074

$y=-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{k}{6}$(←직선 l)



직선 l의 y절편 $\dfrac{k}{6}$가 최대일 때, k는 최댓값을 갖는다.
직선 l이 원 C에 접할 때, 두 개의 k 값을 각각 k_1, k_2라고 하자. (단, $k_1<k_2$)
(즉, k의 최솟값과 최댓값은 각각 k_1, k_2이다.)
$k=k_2$일 때, 직선 l은 원 C 위의 점 Q에서 접한다.
두 직선 l, MQ는 점 Q에서 서로 수직으로 만나므로 원 C와 직선 MQ의 방정식을 연립하면 점 Q의 좌표를 구할 수 있다. 이때, 점 Q의 x좌표는 7보다 크다.
$\overline{\mathrm{MQ}}\perp l$이므로 직선 MQ의 기울기는 $\dfrac{3}{4}$이다.

직선 MQ: $y=\dfrac{3}{4}(x-7)+3$
원 C와 직선 MQ의 방정식을 연립하면
$$(x-7)^2+\left(\frac{3}{4}x-\frac{21}{4}\right)^2=\frac{5}{2}$$
정리하면
$$\frac{25}{16}(x-7)^2=\frac{5}{2}$$
풀면
$$x=7+\frac{2\sqrt{10}}{5}\ (\because x>7)$$
이를 직선 MQ의 방정식에 대입하면
$$y=3+\frac{3\sqrt{10}}{10}$$
점 Q의 좌표는
$$\left(7+\frac{2\sqrt{10}}{5},\ 3+\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)$$
(※ 점 Q의 y좌표를 구하지 않아도 답을 구할 수 있다.)
성분으로 주어진 벡터의 연산에 의하여
$$\overrightarrow{\mathrm{MQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\left(\frac{2\sqrt{10}}{5},\ \frac{3\sqrt{10}}{10}\right)$$
성분으로 주어진 벡터의 내적에 의하여
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MQ}}$$
$$=(6,\ 0)\cdot\left(\frac{2\sqrt{10}}{5},\ \frac{3\sqrt{10}}{10}\right)$$
$$=\frac{12\sqrt{10}}{5}$$
답 ③

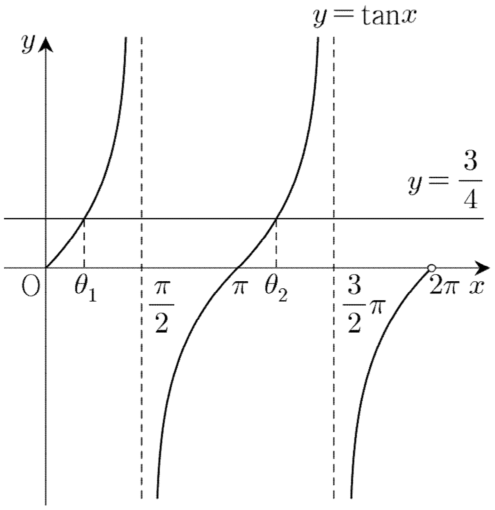
[참고2]
다음과 같은 방법으로 k의 값과 점 Q의 좌표를 구할 수도 있다. 하지만 계산이 복잡하므로 실전에서 가능한 방법은 아니다.
원 C와 직선 l의 방정식을 연립하여 이차방정식을 유도한다.
이차방정식의 판별식을 이용하여 k의 값을 구한다. 2개의 k의 값 중에서 큰 값을 k_0라고 하자.
$k=k_0$일 때, 원 C와 직선 l의 방정식을 연립하여 점 Q의 좌표를 구한다. 이때, 점 Q의 x좌표는 7보다 크다.

[참고3]
다음과 같은 방법으로 k의 값과 점 Q의 좌표를 구할 수도 있다. 하지만 계산이 복잡하므로 실전에서 가능한 방법은 아니다.
원의 중심 M과 직선 l 사이의 거리가 원 C의 반지름의 길이와 같음을 이용하여 k의 값을 구한다. 2개의 k의 값 중에서 큰 값을 k_0라고 하자.
$k=k_0$일 때, 원 C와 직선 l의 방정식을 연립하여 점 Q의 좌표를 구한다. 이때, 점 Q의 x좌표는 7보다 크다.

[참고4]
삼각함수의 미분법을 이용하여 점 Q의 좌표를 구할 수도 있다.
점 P의 좌표를
$$\left(7+\frac{\sqrt{10}}{2}\cos\theta,\ 3+\frac{\sqrt{10}}{2}\sin\theta\right)$$

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.
http://cafe.naver.com/2math
https://atom.ac/books/5074

(단, $0 \le \theta < 2\pi$)
성분으로 주어진 벡터의 내적에 의하여
$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OP}$
$= (8, 6) \cdot \left(7 + \dfrac{\sqrt{10}}{2}\cos\theta, 3 + \dfrac{\sqrt{10}}{2}\sin\theta\right)$
$= 74 + 4\sqrt{10}\cos\theta + 3\sqrt{10}\sin\theta (= f(\theta))$
함수 $f(\theta)$의 도함수는
$f'(\theta) = -4\sqrt{10}\sin\theta + 3\sqrt{10}\cos\theta$
$= -4\sqrt{10}\cos\theta\left(\tan\theta - \dfrac{3}{4}\right)$
방정식 $f'(\theta) = 0$을 만족시키는 θ의 값을 θ_1, θ_2라고 하자.
(단, $\theta_1 < \theta_2$)



위의 그림처럼
$\tan\theta_1 = \tan\theta_2 = \dfrac{3}{4}$, $0 < \theta_1 < \dfrac{\pi}{2}$, $\pi < \theta_2 < \dfrac{3}{2}\pi$
이고, $\cos\theta_1 > 0$, $\cos\theta_2 < 0$이다.
$\theta = \theta_1$의 좌우에서 $f'(\theta)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(\theta)$는 극댓값을 갖는다.
이때, $\sin\theta_1 = \dfrac{3}{5}$, $\cos\theta_1 = \dfrac{4}{5}$이므로 $f(\theta_1) = 74 + 5\sqrt{10}$
$\theta = \theta_2$의 좌우에서 $f'(\theta)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(\theta)$는 극솟값을 갖는다.
이때, $\sin\theta_2 = -\dfrac{3}{5}$, $\cos\theta_2 = -\dfrac{4}{5}$이므로 $f(\theta_2) = 74 - 5\sqrt{10}$
경계에서의 함숫값: $f(0) = 74 + 4\sqrt{10}$
따라서 $\theta = \theta_1$일 때, 함수 $f(\theta)$는 최댓값을 갖는다.

점 Q의 좌표는
$\left(7 + \dfrac{2\sqrt{10}}{5}, 3 + \dfrac{3\sqrt{10}}{10}\right)$

[참고5] 교육과정 외
삼각함수의 합성을 이용하여 점 Q의 좌표를 구할 수도 있다.
점 P의 좌표를
$\left(7 + \dfrac{\sqrt{10}}{2}\cos\theta, 3 + \dfrac{\sqrt{10}}{2}\sin\theta\right)$
성분으로 주어진 벡터의 내적에 의하여
$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OP}$
$= (8, 6) \cdot \left(7 + \dfrac{\sqrt{10}}{2}\cos\theta, 3 + \dfrac{\sqrt{10}}{2}\sin\theta\right)$
$= 74 + 4\sqrt{10}\cos\theta + 3\sqrt{10}\sin\theta$
$= 74 + 5\sqrt{10}\sin(\theta + \alpha)$($\because$ 삼각함수의 합성)
(단, $\tan\alpha = \dfrac{4}{3}$)
$\le 74 + 5\sqrt{10}$
(단, 등호는 $\theta + \alpha = 2n\pi + \dfrac{\pi}{2}$($n$은 정수)일 때, 성립한다.)
등호가 성립할 때의 θ의 값을 θ_0라고 하면
$\tan\alpha = \tan\left(2n\pi + \dfrac{\pi}{2} - \theta_0\right) = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta_0\right)$
$= \cot\theta_0 = \dfrac{4}{3}$이므로 $\tan\theta_0 = \dfrac{3}{4}$이다.
점 Q의 좌표는
$\left(7 + \dfrac{2\sqrt{10}}{5}, 3 + \dfrac{3\sqrt{10}}{10}\right)$

17

[풀이]
(1) 첫 번째 표본에 대하여 생각하자.
$n = 25$, $\overline{x} = \overline{x_1}$, $\sigma = 5$이므로 모평균 m의 신뢰도 95%의 신뢰구간은
$\overline{x_1} - 1.96\dfrac{5}{\sqrt{25}} \le m \le \overline{x_1} + 1.96\dfrac{5}{\sqrt{25}}$
문제에서 주어진 조건에 의하여
$\overline{x_1} - 1.96\dfrac{5}{\sqrt{25}} = 80 - a$,

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.
http://cafe.naver.com/2math
https://atom.ac/books/5074

$$\overline{x_1}+1.96\frac{5}{\sqrt{25}}=80+a$$

연립방정식을 풀면

$\overline{x_1}=80$, $a=1.96$

(2) 두 번째 표본에 대하여 생각하자.

$n=n$, $\overline{x}=\overline{x_2}$, $\sigma=5$이므로 모평균 m의 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\overline{x_2}-1.96\frac{5}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x_2}+1.96\frac{5}{\sqrt{n}}$$

문제에서 주어진 조건에 의하여

$$\overline{x_2}-1.96\frac{5}{\sqrt{n}}=\frac{15}{16}\overline{x_1}-\frac{5}{7}a,$$

$$\overline{x_2}+1.96\frac{5}{\sqrt{n}}=\frac{15}{16}\overline{x_1}-\frac{5}{7}a$$

연립하면

$$\overline{x_2}=\frac{15}{16}\overline{x_1},\ 1.96\frac{5}{\sqrt{n}}=1.96\frac{5}{7}$$

전자를 풀면 $\overline{x_2}=75$

후자를 풀면 $n=49$

$\therefore\ n+\overline{x_2}=124$

답 ②

18

[풀이]

〈과정〉

(i) 공역 X의 원소 중 짝수인 원소가 2개이므로 집합 A의 네 원소 중 세 원소는 홀수이고 한 원소는 짝수이다.

($\because$ '짝+짝+홀+홀=짝' (←더해지는 짝수의 개수가 2인 경우), '짝+홀+홀+홀=홀' (←더해지는 짝수의 개수가 1인 경우), 그리고 더해지는 짝수의 개수가 0인 경우는 없다.)

따라서 집합 X의 원소 중에서 집합 A의 네 원소를 택하는 경우의 수는 2이다.

(← $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 5\}$ 또는 $A=\{1,\ 3,\ 4,\ 5\}$)

(ii) 정의역 X를 4개의 부분집합으로 분할할 때, 4개의 부분집합의 원소의 개수는 각각 2, 1, 1, 1이 되어야 한다.

($\because 5=5$

$=4+1$

$=3+2=3+1+1$

$=2+2+1=\boxed{2+1+1+1}$

$=1+1+1+1+1$)

따라서 집합 X를 4개의 부분집합으로 분할하는 경우의 수는 $\boxed{{}_5\mathrm{C}_2}$이다.

($\because$

$X=\boxed{\{1,\ 2\}}\cup\{3\}\cup\{4\}\cup\{5\}$,

$X=\boxed{\{1,\ 3\}}\cup\{2\}\cup\{4\}\cup\{5\}$,

⋮

$X=\boxed{\{4,\ 5\}}\cup\{1\}\cup\{2\}\cup\{3\}$

이때, $\boxed{}$ 안에 올 집합을 결정할 경우의 수는 다섯 개의 수 1, 2, 3, 4, 5 중에서 두 개의 수를 선택하는 조합의 수 ${}_5\mathrm{C}_2$와 같다.)

(iii) (i)과 (ii)의 각 경우에 대하여 집합 X를 분할한 4개의 부분집합을 집합 A의 네 원소에 하나씩 대응시키는 경우의 수는 $\boxed{4!}$이다. (←비둘기 집의 원리)

($\because$ 예를 들어

집합 X를

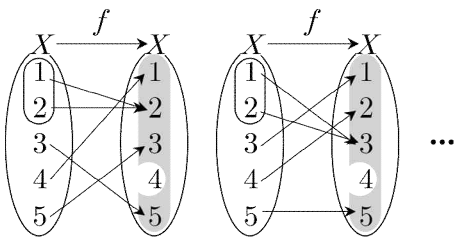
$$X=\underbrace{\{1,\ 2\}}_{\text{원소 2개}}\cup\underbrace{\{3\}}_{\text{원소 1개}}\cup\underbrace{\{4\}}_{\text{원소 1개}}\cup\underbrace{\{5\}}_{\text{원소 1개}}$$

와 같이 서로 다른 4개의 집합의 합집합으로 보고,

집합 A를

$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 5\}$

으로 둘 때, 다음과 같은 경우가 가능하다.



네 개의 집합 $\{1,\ 2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$에 집합 A의 서로 다른 원소를 각각 대응시킬 경우의 수는 순열의 수에 의하여 ${}_4\mathrm{P}_4=4!$이다.)

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 함수 f의 개수는 곱의 법칙에 의하여 $\boxed{2\times{}_5\mathrm{C}_2\times4!}$이다.

(가): ${}_5\mathrm{C}_2=10$

(나): $4!=24$

(다): $2\times{}_5\mathrm{C}_2\times4!=480$

$\therefore\ a+b+c=514$

답 ⑤

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.
http://cafe.naver.com/2math
https://atom.ac/books/5074

19

[풀이]
원의 정의에 의하여
$\overline{\mathrm{OQ}}=\overline{\mathrm{OP}}=2^n=$(원 C의 반지름의 길이)
호의 길이를 구하는 공식에 의하여
$\overset{\frown}{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{OQ}}\times\angle\mathrm{QOP}$

즉, $\pi=2^n\times\angle\mathrm{QOP}$에서 $\angle\mathrm{QOP}=\dfrac{\pi}{2^n}$

삼각함수의 정의에 의하여
$\mathrm{Q}\left(2^n\cos\dfrac{\pi}{2^n},\ 2^n\sin\dfrac{\pi}{2^n}\right)$
이므로
$\mathrm{H}\left(2^n\cos\dfrac{\pi}{2^n},\ 0\right)$

$\overline{\mathrm{HP}}=\overline{\mathrm{OP}}-\overline{\mathrm{OH}}=2^n\left(1-\cos\dfrac{\pi}{2^n}\right)$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}(\overline{\mathrm{OQ}}\times\overline{\mathrm{HP}})$

$=\lim\limits_{n\to\infty}4^n\left(1-\cos\dfrac{\pi}{2^n}\right)$

(여기서 $\dfrac{\pi}{2^n}=t$로 치환하면 $t\to0+$이다.)

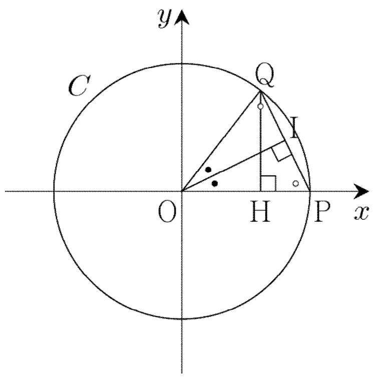
$=\lim\limits_{t\to0+}\dfrac{1-\cos t}{t^2}\times\pi^2$

$=\lim\limits_{t\to0+}\left(\dfrac{\sin t}{t}\right)^2\times\dfrac{\pi^2}{1+\cos t}$

$=1^2\times\dfrac{\pi^2}{2}=\dfrac{\pi^2}{2}$

답 ①

[참고]
다음과 같이 선분 HP의 길이를 구할 수도 있다. (이에 따라 극한값을 구하는 계산 과정도 달라진다.)
점 O에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 I라고 하자.



(단, $\bullet=\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$, $\circ=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$)

이등변삼각형 OPQ에서
$\angle\mathrm{QOP}=2\angle\mathrm{IOP}$이므로 $\angle\mathrm{IOP}=\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$

삼각형 IOP의 세 내각의 합은 π이므로
$\angle\mathrm{OPI}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$

직각삼각형 OPI에서 삼각비의 정의에 의하여
$\overline{\mathrm{IP}}=\overline{\mathrm{OP}}\sin\dfrac{\pi}{2^{n+1}}=2^n\sin\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$

이등변삼각형의 성질에 의하여
$\overline{\mathrm{PQ}}=2\overline{\mathrm{IP}}=2^{n+1}\sin\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$

직각삼각형 PQH에서 삼각비의 정의에 의하여
$\overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{PQ}}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right)=2^{n+1}\sin^2\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$

함수의 극한의 성질에 의하여

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}(\overline{\mathrm{OQ}}\times\overline{\mathrm{HP}})$

$=\lim\limits_{n\to\infty}2^{2n+1}\sin^2\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$

(여기서 $\dfrac{\pi}{2^n}=t$로 치환하면 $t\to0+$이다.)

$=\lim\limits_{t\to0+}\dfrac{\pi^2}{2}\left(\dfrac{\sin t}{t}\right)^2$

$=\dfrac{\pi^2}{2}\times1^2=\dfrac{\pi^2}{2}$

20

[풀이]
구간 $(0,\ 2\pi)$에서 함수 $f(x)$는 미분가능하므로

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.
http://cafe.naver.com/2math
https://atom.ac/books/5074

함수 $f(x)$가 $x=\alpha$와 $x=\beta$에서 극값을 가지면

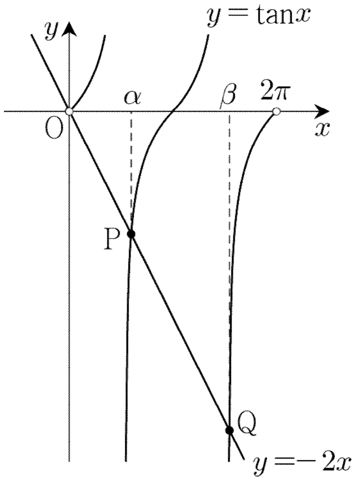
$f'(\alpha)=f'(\beta)=0$

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=\sin x+2x\cos x=\cos x(\tan x-(-2x))$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \tan x=-2x$

구간 $(0,\ 2\pi)$에서 곡선 $y=\tan x$와 직선 $y=-2x$가 만나는 두 교점을 각각 P, Q라고 하자. 이때, 두 점 P, Q의 x좌표는 각각 α, β이다.



두 점 P, Q는 곡선 $y=\tan x$와 직선 $y=-2x$의 교점이므로

$\tan\alpha=-2\alpha$, $\tan\beta=-2\beta$

ㄱ. (참)

탄젠트함수 $y=\tan x$의 주기는 π이므로

$\tan(\alpha+\pi)=\tan\alpha$

그런데 $\tan\alpha=-2\alpha$이므로

$\therefore\ \tan(\alpha+\pi)=-2\alpha$

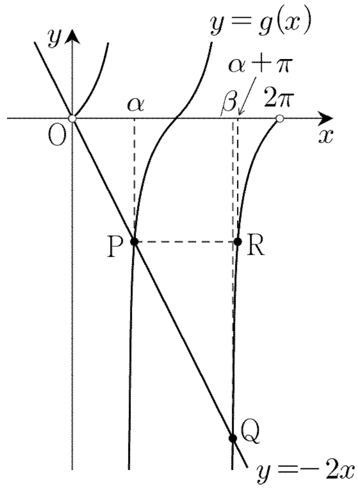
ㄴ. (참)

점 P를 x축의 방향으로 π만큼 평행이동한 점을 R이라고 하자.

점 R의 좌표는

$(\alpha+\pi,\ -2\alpha)$ $((\alpha+\pi,\ \tan\alpha))$

이다.



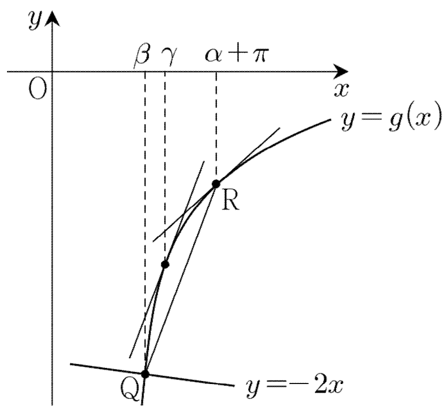
위의 그림처럼 구간 $\left(\dfrac{3}{2}\pi,\ 2\pi\right)$에서 함수 $g(x)$의 그래프는 위로 볼록이므로 이 구간에서 함수 $g'(x)$는 감소한다.

따라서 $\beta<\alpha+\pi$일 때,

$g'(\alpha+\pi)<g'(\beta)$이다.

ㄷ. (거짓)

$g(x)=\tan x$로 두자.



두 점 Q, R의 좌표를 각각

$(\beta,\ -2\beta)$, $(\alpha+\pi,\ -2\alpha)$

로 두자.

함수 $g(x)$가 닫힌구간 $[\beta,\ \alpha+\pi]$에서 연속이고,

열린구간 $(\beta,\ \alpha+\pi)$에서 미분가능하므로

$$\frac{g(\alpha+\pi)-g(\beta)}{\alpha+\pi-\beta}=g'(\gamma)$$

즉, $\dfrac{2(\beta-\alpha)}{\alpha+\pi-\beta}=g'(\gamma)$ ⋯㉠

인 γ가 열린구간 $(\beta,\ \alpha+\pi)$에 적어도 하나 존재한다.

그런데 구간 $\left(\dfrac{3}{2}\pi,\ 2\pi\right)$에서 함수 $g(x)$의 그래프는 위로 볼록이므로 이 구간에서 함수 $g'(x)$는 감소한다.

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.
http://cafe.naver.com/2math
https://atom.ac/books/5074

$\gamma<\alpha+\pi$일 때, $g'(\alpha+\pi)<g'(\gamma)$이므로

$\sec^2(\alpha+\pi)<\sec^2\gamma$ 즉, $\sec^2\alpha<\sec^2\gamma$ …㉡

㉠, ㉡에 의하여

$$\therefore \frac{2(\beta-\alpha)}{\alpha+\pi-\beta}>\sec^2\alpha$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

[참고1]

보기 ㄴ에 대한 풀이를 엄밀하게 서술하면 다음과 같다.

함수 $g(x)$의 도함수는

$g'(x)=\sec^2 x$

함수 $g(x)$의 이계도함수는

$g''(x)=2\sec^2 x\tan x$

구간 $\left(\frac{3}{2}\pi,\ 2\pi\right)$에서 $\sec x>0$, $\tan x<0$이므로

이 구간에서 $g''(x)<0$이다.

구간 $\left(\frac{3}{2}\pi,\ 2\pi\right)$에서 함수 $g'(x)$는 감소하므로

$\beta<\alpha+\pi$일 때, $g'(\alpha+\pi)<g'(\beta)$이다.

[참고2]

보기 ㄴ이 참임을 다음과 같이 증명할 수도 있다.

ㄴ. (참)

함수 $g(x)$의 도함수는

$g'(x)=\sec^2 x$

이므로

$g'(\alpha+\pi)=\sec^2(\alpha+\pi)=\sec^2\alpha$,

$g'(\beta)=\sec^2\beta$

한편

$\tan\alpha=-2\alpha$, $\tan\beta=-2\beta$

이므로

$\alpha=-\frac{1}{2}\tan\alpha$, $\beta=-\frac{1}{2}\tan\beta$

문제에서 주어진 조건에서

$0<\alpha<\beta<2\pi$

이므로

$0<-\frac{1}{2}\tan\alpha<-\frac{1}{2}\tan\beta<2\pi$

각각의 변에 -2를 곱하면

$0>\tan\alpha>\tan\beta>-4\pi$

$|\tan\alpha|<|\tan\beta|$이므로

$\tan^2\alpha<\tan^2\beta$

양변에 1을 더하면

$1+\tan^2\alpha<1+\tan^2\beta$ 즉, $\sec^2\alpha<\sec^2\beta$

$\therefore\ g'(\alpha+\pi)<g'(\beta)$

21

[풀이]

함수 $f'(x)$의 부정적분을 구하자.

$$f(x)=\begin{cases} l\sin x+C_1 & \left(0\le x\le\frac{\pi}{2}\right) \\ m\sin x+C_2 & \left(\frac{\pi}{2}<x\le\pi\right) \\ n\sin x+C_3 & \left(\pi<x\le\frac{3}{2}\pi\right)\end{cases}$$

(단, C_1, C_2, C_3은 적분상수이다.)

함수의 연속에 대한 정의에 의하여

$f(0)=\lim_{x\to0+}f(x)$ 즉, $0=C_1$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+}f(x)$ 즉, $l+C_1=m+C_2$

$f(\pi)=\lim_{x\to\pi+}f(x)$ 즉, $C_2=C_3$

$f\left(\frac{3}{2}\pi\right)=\lim_{x\to\frac{3}{2}\pi-}f(x)$ 즉, $-n+C_3=1$

연립방정식을 풀면

$C_1=0$, $C_2=l-m$, $C_3=n+1$,

$l=m+n+1(\because C_2=C_3)$

함수 $f(x)$의 방정식은

$$f(x)=\begin{cases} l\sin x & \left(0\le x\le\frac{\pi}{2}\right) \\ m\sin x+l-m & \left(\frac{\pi}{2}<x\le\pi\right) \\ n\sin x+n+1 & \left(\pi<x\le\frac{3}{2}\pi\right)\end{cases}$$

(단, $l=m+n+1$이다.)

정적분의 성질에 의하여

$$\int_0^{\frac{3}{2}\pi}f(x)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(x)dx+\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}f(x)dx$$

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.
http://cafe.naver.com/2math
https://atom.ac/books/5074

$=\left[-l\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\left[-m\cos x+(l-m)x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$

$+\left[-n\cos x+(n+1)x\right]_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}$

$=l+m-n+(l-m+n+1)\dfrac{\pi}{2}$

$=2m+1+(n+1)\pi$($=k$로 두자.)

($\because l=m+n+1$)

변형하면

$n=-\dfrac{2}{\pi}m+\dfrac{k-1-\pi}{\pi}$ $\cdots(*)$

좌표평면(m축, n축)에서 (*)는 기울기가 $-\dfrac{2}{\pi}(>-1)$

이고, y절편이 $\dfrac{k-1-\pi}{\pi}$인 직선이다.

다음의 필요충분조건이 성립한다.

'직선 (*)의 y절편이 최대이다.'

$\Leftrightarrow$

'k의 값이 최대이다.'

이제 k의 값이 최대가 되도록 하는 l, m, n의 값을 구하자.

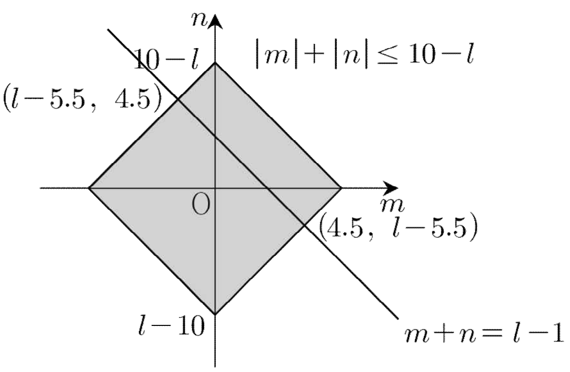
문제에서 맨 처음 주어진 부등식과 풀이과정에서 얻은 l, m, n에 대한 등식을 변형하면 다음과 같다.

$\begin{cases}|m|+|n|\le 10-|l| \\ m+n=l-1\end{cases}$

(단, l, m, n은 정수이고,

$l\ne 0$, $m\ne 0$, $n\ne 0$)

(1) l이 양수인 경우



직선 $n=-m+l-1$이 부등식의 영역

$|m|+|n|\le 10-l$

을 지나야 하므로

$l-10\le l-1\le 10-l$

연립부등식을 풀면

$l\le 5.5$

이므로 l이 가질 수 있는 값은

1, 2, 3, 4, 5

이다.

직선 $n=m+10-l$과 직선 $n=-m+l-1$의 교점의 좌표는

$(l-5.5,\ 4.5)$

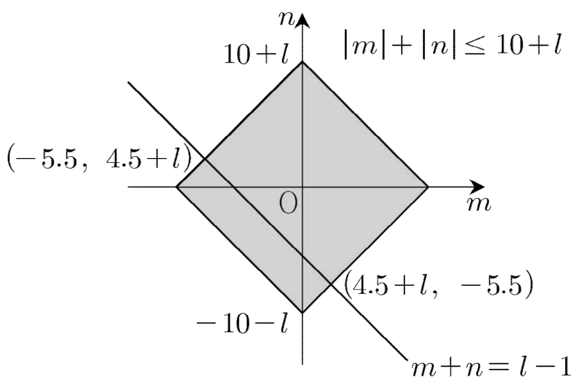
직선 $n=m+l-10$과 직선 $n=-m+l-1$의 교점의 좌표는

$(4.5,\ l-5.5)$

각각의 l의 값에 대한 격자점 $(m,\ n)$을 표로 정리하면 다음과 같다.

l	$(m,\ n)$
1	$(-4,\ 4)$, $(-3,\ 3)$, $(-2,\ 2)$, $(-1,\ 1)$, $(1,\ -1)$, $(2,\ -2)$, $(3,\ -3)$, $(4,\ -4)$
2	$(-3,\ 4)$, $(-2,\ 3)$, $(-1,\ 2)$, $(2,\ -1)$, $(3,\ -2)$, $(4,\ -3)$
3	$(-2,\ 4)$, $(-1,\ 3)$, $(1,\ 1)$, $(3,\ -1)$, $(4,\ -2)$
4	$(-1,\ 4)$, $(1,\ 2)$, $(2,\ 1)$, $(4,\ -1)$
5	$(1,\ 3)$, $(2,\ 2)$, $(3,\ 1)$

(2) l이 음수인 경우



직선 $n=-m+l-1$이 부등식의 영역

$|m|+|n|\le 10+l$

을 지나야 하므로

$-l-10\le l-1\le 10+l$

연립부등식을 풀면

$l\ge -4.5$

이므로 l이 가질 수 있는 값은

-4, -3, -2, -1

이다.

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.
http://cafe.naver.com/2math
https://atom.ac/books/5074

직선 $n=m+10+l$과 직선 $n=-m+l-1$의 교점의 좌표는

$(-5.5,\ 4.5+l)$

직선 $n=m-10-l$과 직선 $n=-m+l-1$의 교점의 좌표는

$(4.5+l,\ -5.5)$

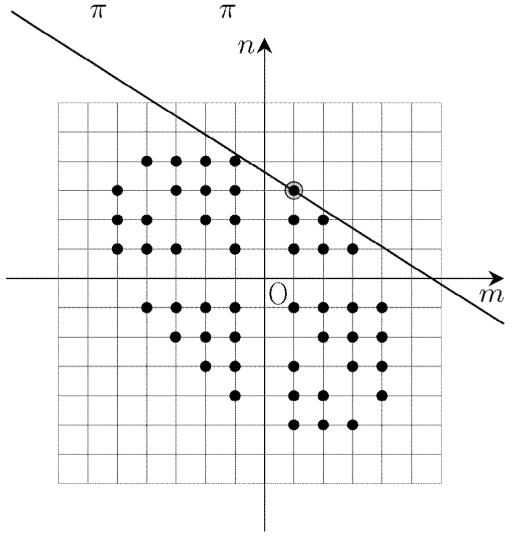
각각의 l의 값에 대한 격자점 $(m,\ n)$을 표로 정리하면 다음과 같다.

l	$(m,\ n)$
-1	$(-5,\ 3)$, $(-4,\ 2)$, $(-3,\ 1)$, $(-1,\ -1)$, $(1,\ -3)$, $(2,\ -4)$, $(3,\ -5)$
-2	$(-5,\ 2)$, $(-4,\ 1)$, $(-2,\ -1)$, $(-1,\ -2)$, $(1,\ -4)$, $(2,\ -5)$
-3	$(-5,\ 1)$, $(-3,\ -1)$, $(-2,\ -2)$, $(-1,\ -3)$, $(1,\ -5)$
-4	$(-4,\ -1)$, $(-3,\ -2)$, $(-2,\ -3)$, $(-1,\ -4)$

(1), (2)에서 구한 격자점을 좌표평면 위에 나타내면 다음과 같다.

(단, 모눈종이의 가로 눈금과 세로 눈금의 간격은 각각 1, 1이다.)

$n=-\dfrac{2}{\pi}m+\dfrac{k-1-\pi}{\pi}$



직선 (*)은 점 $(1,\ 3)$을 지날 때, y좌표가 최대가 된다. 이때, k의 값도 최대가 된다.

k의 값이 최대가 되도록 하는 l, m, n은 각각

$l=5,\ m=1,\ n=3$

$\therefore\ l+2m+3n=16$

답 ⑤

22

[풀이]

순열의 수와 조합의 수의 계산법에 의하여

$${}_3\mathrm{P}_2+{}_3\mathrm{C}_2=3\times2+\frac{3\times2}{1\times2}=6+3=9$$

답 9

23

[풀이]

로그의 밑의 변환의 공식에 의하여

$$2\log_4(5x+1)=2\frac{\log_2(5x+1)}{\log_2 4}$$

$$=2\frac{\log_2(5x+1)}{2}=\log_2(5x+1)$$

($\because$ 로그의 정의에 의하여 $\log_2 4=2$)

이므로 문제에서 주어진 방정식은

$\log_2(5x+1)=1$

로그의 정의에 의하여

$5x+1=2^1$에서 $x=\dfrac{1}{5}(=\alpha)$

$\therefore\ \log_5\dfrac{1}{\alpha}=\log_5 5=1$

답 1

24

[풀이]

문제에서 주어진 이항분포에서

$$\mathrm{E}(X)=n\times\frac{1}{2}=\frac{n}{2},$$

$$\mathrm{V}(X)=n\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{n}{4}$$

이므로

$$\mathrm{V}\left(\frac{1}{2}X+1\right)=\frac{1}{4}\mathrm{V}(X)=\frac{n}{16}=5$$

$\therefore\ n=80$

답 80

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.
http://cafe.naver.com/2math
https://atom.ac/books/5074

25

[풀이]

우선 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos^3 x dx$의 값을 구하자.

$t=\sin x$이면 $dt=\cos x dx$이고,

$x=0$일 때 $t=0$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=1$

정적분의 치환적분법에 의하여

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos^3 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos^2 x \cos x dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3(1-\sin^2 x)\cos x dx$$

$$= \int_0^1 3(1-t^2)dt$$

$$= [3t-t^3]_0^1 = 2$$

정적분의 성질에 의하여

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x + 3\cos^3 x)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos^3 x dx$$

$$= [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2$$

$$= 1+2=3$$

답 3

26

[풀이]

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to 1}\left\{f(x)-\frac{\pi}{6}\right\}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-\frac{\pi}{6}}{x-1}\times(x-1)$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-\frac{\pi}{6}}{x-1}\times\lim_{x\to 1}(x-1)$$

$$= k\times 0 = 0$$

함수 $y=f(x)-\frac{\pi}{6}$은 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 이 함수는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

함수의 연속에 대한 정의에 의하여

$$\lim_{x\to 1}\left\{f(x)-\frac{\pi}{6}\right\} = f(1)-\frac{\pi}{6} = 0$$

즉, $f(1)=\frac{\pi}{6}$

이를 문제에서 주어진 등식에 대입하면

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = k$$

미분계수의 정의에 의하여

$f'(1)=k$

함수 $g(x)$의 도함수는

$g'(x)=\cos x$

함수 $y=(g\circ f)(x)$의 도함수는

$y'=g'(f(x))f'(x)$

$y'|_{x=1} = g'(f(1))f'(1)$

$$= k\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}k$$

곡선 $y=(g\circ f)(x)$ 위의 점 $(1,\ (g\circ f)(1))$에서의 접선의 방정식은

$y=g'(f(1))f'(1)(x-1)+g(f(1))$

즉, $y=\frac{\sqrt{3}}{2}k(x-1)+\frac{1}{2}$

이 직선이 원점을 지나므로

$$0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}k + \frac{1}{2}$$

풀면

$$k=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$\therefore\ 30k^2=10$

답 10

27

[풀이]

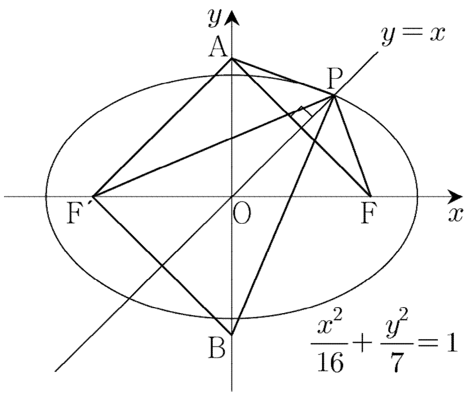
점 F의 x좌표를 $c(>0)$라고 하면 점 F′의 x좌표는 $-c$이다.

문제에서 주어진 타원의 방정식에서

$16=7+c^2$이므로 $c=3$

두 점 F, F′의 좌표는 각각 $(3,\ 0)$, $(-3,\ 0)$이다.

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.
http://cafe.naver.com/2math
https://atom.ac/books/5074



$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{PF}}$이므로 삼각형 PAF는 이등변삼각형이다.
이등변삼각형의 성질에 의하여
$\angle$P의 이등분선은 밑변 AF를 수직이등분한다.
다시 말하면 선분 AF의 수직이등분선은 점 P를 지난다.
선분의 내분점의 정의에 의하여 선분 AF의 중점은 $\left(\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\right)$이다.
직선 AF의 기울기가 -1이므로 선분 AF의 수직이등분선의 기울기는 1이다.
선분 AF의 수직이등분선의 방정식은
$y=x-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}$ 즉, $y=x$
점 P는 직선 $y=x$ 위에 있고, 두 점 F′, B는 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이므로
$\overline{\mathrm{PF'}}=\overline{\mathrm{PB}}$ $\cdots$㉠
타원의 정의에 의하여
$\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{PF}}=8$ $\cdots$㉡
두 점 사이의 거리 공식에 의하여
$\overline{\mathrm{AF'}}=\overline{\mathrm{F'B}}=3\sqrt{2}$ $\cdots$㉢
$\therefore$ (□AF′BP의 둘레의 길이)
$=\overline{\mathrm{AF'}}+\overline{\mathrm{F'B}}+\overline{\mathrm{BP}}+\overline{\mathrm{PA}}$
$=\overline{\mathrm{AF'}}+\overline{\mathrm{F'B}}+\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{PA}}$($\because$㉠)
$=\overline{\mathrm{AF'}}+\overline{\mathrm{F'B}}+\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{PF}}$($\because \overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{PF}}$)
$=6\sqrt{2}+8$($\because$㉡, ㉢)
$a=8,\ b=6$
$\therefore\ a+b=14$
답 14

[참고]
문제에서 주어진 타원의 방정식과 직선 $y=x$의 방정식을 연립하면 점 P의 좌표 $\left(4\sqrt{\frac{7}{23}},\ 4\sqrt{\frac{7}{23}}\right)$을 구할 수 있다. 두 점 사이의 거리 공식을 이용하여 두 선분 $\overline{\mathrm{AP}}$, $\overline{\mathrm{BP}}$의 길이를 구하면 이중근호가 발생한다. 그런데 이중근호는 교육과정 외이므로 이는 의도된 풀이가 아니다.

28

[풀이1]
방정식
$a+b+c=9$ $\cdots(*)$
(단, $a\geq 0,\ b\geq 0,\ c\geq 0$)
을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수를 구하자.
위의 방정식을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는 $a,\ b,\ c$ 중에서 중복을 허용하여 9개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_3\mathrm{H}_9={}_{3+9-1}\mathrm{C}_9={}_{11}\mathrm{C}_9={}_{11}\mathrm{C}_2=55$
이제 다음 조건을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수를 구하자.
'$a\geq 2$ 이고 $b\geq 2$' (←문제에서 주어진 조건의 부정)
$a-2=a'$, $b-2=b'$로 두고 (*)에 대입하여 정리하면
$a'+b'+c=5$
(단, $a'\geq 0,\ b'\geq 0,\ c\geq 0$)
위의 방정식을 만족시키는 순서쌍 $(a',\ b',\ c)$의 개수는 $a',\ b',\ c$ 중에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_3\mathrm{H}_5={}_{3+5-1}\mathrm{C}_5={}_7\mathrm{C}_5={}_7\mathrm{C}_2=21$
여사건의 확률의 정의에 의하여
구하는 확률은
$1-\frac{21}{55}=\frac{34}{55}$
$p=55,\ q=34$
$\therefore\ p+q=89$
답 89

[풀이2]
방정식
$a+b+c=9$ $\cdots(*)$
(단, $a\geq 0,\ b\geq 0,\ c\geq 0$)
을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수를 구하자.
위의 방정식을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.
http://cafe.naver.com/2math
https://atom.ac/books/5074

a, b, c 중에서 중복을 허용하여 9개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_9 = {}_{3+9-1}C_9 = {}_{11}C_9 = {}_{11}C_2 = 55$

다음의 필요충분조건을 생각하자.

'$a<2$ 또는 $b<2$'

$\Leftrightarrow$

'$a=0$ 또는 $a=1$ 또는 $b=0$ 또는 $b=1$'

- $a=0$을 (*)에 대입하여 정리하면

$b+c=9$ (단, $b \ge 0$, $c \ge 0$)

위의 방정식을 만족시키는 순서쌍 $(0,\ b,\ c)$의 개수는 b, c 중에서 중복을 허용하여 9개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2H_9 = {}_{2+9-1}C_9 = {}_{10}C_9 = {}_{10}C_1 = 10$

마찬가지의 방법으로

$b=0$일 때, 순서쌍 $(a,\ 0,\ c)$의 개수는 10이다.

- $a=1$을 (*)에 대입하여 정리하면

$b+c=8$ (단, $b \ge 0$, $c \ge 0$)

위의 방정식을 만족시키는 순서쌍 $(1,\ b,\ c)$의 개수는 b, c 중에서 중복을 허용하여 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2H_8 = {}_{2+8-1}C_8 = {}_9C_8 = {}_9C_1 = 9$

마찬가지의 방법으로

$b=1$일 때, 순서쌍 $(a,\ 1,\ c)$의 개수는 9이다.

- 이제 다음의 네 경우 각각에 대한 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수를 구하자.

'$a=0$ 이고 $b=0$' : (*)은 $c=9$이므로 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는 1이다.

'$a=0$ 이고 $b=1$' : (*)은 $c=8$이므로 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는 1이다.

'$a=1$ 이고 $b=0$' : (*)은 $c=8$이므로 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는 1이다.

'$a=1$ 이고 $b=1$' : (*)은 $c=7$이므로 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는 1이다.

따라서 문제에서 주어진 조건을 모두 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는

$10+10+9+9-(1+1+1+1)=34$

수학적 확률의 정의에 의하여

구하는 확률은 $\dfrac{34}{55}$이다.

$p=55$, $q=34$

$\therefore\ p+q=89$

답 89

29

[풀이]

세 점 P_1, P_2, P_3은 평면 $z=1$ 위에 있으므로,

이 세 점의 z좌표는 모두 1이다.

세 점 P_1, P_2, P_3의 좌표를 각각

$(x_1,\ y_1,\ 1)$, $(x_2,\ y_2,\ 1)$, $(x_3,\ y_3,\ 1)$

로 두자.

성분으로 주어진 벡터의 내적에 의하여

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP_1} = 3x_1 + \dfrac{1}{2}y_1 + 2 = \dfrac{11}{3}$,

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP_2} = 3x_2 + \dfrac{1}{2}y_2 + 2 = 1$,

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP_3} = 3x_3 + \dfrac{1}{2}y_3 + 2 = -\dfrac{7}{4}$

정리하면

점 P_1의 자취: $3x_1 + \dfrac{1}{2}y_1 = \dfrac{5}{3}$, $z=1$

점 P_2의 자취: $3x_2 + \dfrac{1}{2}y_2 = -1$, $z=1$

점 P_3의 자취: $3x_3 + \dfrac{1}{2}y_3 = -\dfrac{15}{4}$, $z=1$

세 점 P_1, P_2, P_3의 xy평면 위로의 정사영을 각각 Q_1, Q_2, Q_3이라고 하면

$Q_1(x_1,\ y_1,\ 0)$, $Q_2(x_2,\ y_2,\ 0)$, $Q_3(x_3,\ y_3,\ 0)$

점 Q_1의 자취: $3x_1 + \dfrac{1}{2}y_1 = \dfrac{5}{3}$, $z=0$

($\leftarrow xy$평면에서 $(6,\ 1) \cdot (x_1,\ y_1) = \dfrac{10}{3}$이므로 벡터 $\vec{n} = (6,\ 1)$은 이 직선($\subset xy$평면)의 법선벡터이다.)

점 Q_2의 자취: $3x_2 + \dfrac{1}{2}y_2 = -1$, $z=0$

($\leftarrow xy$평면에서 $(6,\ 1) \cdot (x_2,\ y_2) = -2$이므로 벡터 $\vec{n} = (6,\ 1)$은 이 직선($\subset xy$평면)의 법선벡터이다.)

점 Q_3의 자취: $3x_3 + \dfrac{1}{2}y_3 = -\dfrac{15}{4}$, $z=0$

($\leftarrow xy$평면에서 $(6,\ 1) \cdot (x_3,\ y_3) = -\dfrac{15}{2}$이므로 벡터 $\vec{n} = (6,\ 1)$은 이 직선($\subset xy$평면)의 법선벡터이다.)

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.
http://cafe.naver.com/2math
https://atom.ac/books/5074

xy평면에서 세 점 Q_1, Q_2, Q_3의 자취를 다음과 같이 정리하자.

점 Q_1의 자취($\subset xy$평면): 법선벡터는 $\vec{n}=(6,\ 1)$이고, y절편은 $\frac{10}{3}$이다.

점 Q_2의 자취($\subset xy$평면): 법선벡터는 $\vec{n}=(6,\ 1)$이고, y절편은 -2이다.

점 Q_3의 자취($\subset xy$평면): 법선벡터는 $\vec{n}=(6,\ 1)$이고, y절편은 $-\frac{15}{2}$이다.

이때, 세 직선은 서로 평행하다.

문제에서 주어진 조건에 의하여 직선 l이 xy평면 위의 점을 지나고, 직선 l의 방향벡터가 xy평면에 포함되므로 직선 l은 xy평면 위에 있다.

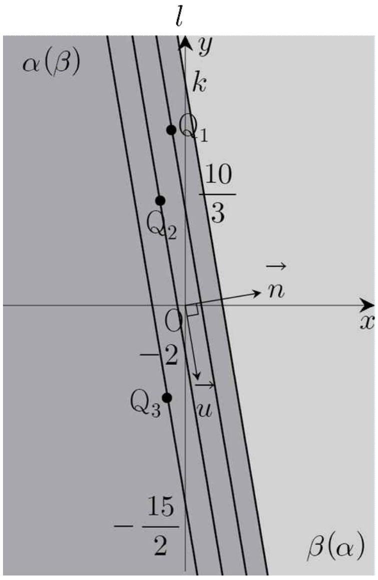
xy평면에서 직선 l의 방향벡터를 $\vec{u}=(1,\ -6)$이라고 하자.

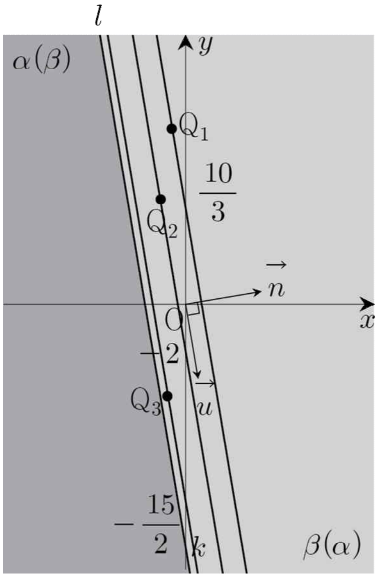
좌표공간에서 직선 l이 점 $(0,\ k,\ 0)$을 지나므로 xy평면에서 직선 l의 y절편은 k이다.

$\vec{n}\cdot\vec{u}=(6,\ 1)\cdot(1,\ -6)=0$

이므로 $\vec{n}\perp\vec{u}$이다.

따라서 세 점 Q_1, Q_2, Q_3의 자취(직선)와 직선 l 중 어느 두 직선도 서로 평행하다.





위의 그림처럼

$k>\frac{10}{3}$ 또는 $k<-\frac{15}{2}$

이면 문제에서 주어진 조건을 모두 만족시킨다.

정수 k의 범위를 정리하면

$k\geq 4$ 또는 $k\leq -8$

$m=4$, $M=-8$

$\therefore\ m-M=12$

답 12

[참고]

k의 범위를 부등식의 영역을 이용하여 구할 수도 있다.

직선 l의 방정식은

$$\frac{x-0}{1}=\frac{y-k}{-6}$$

정리하면

l: $y=-6x+k$

- xy평면에서 세 점 Q_1, Q_2, Q_3이 모두 직선 l 아래쪽에 있으려면

$6x_1+y_1<k$, $6x_2+y_2<k$,

$6x_3+y_3<k$

그런데

$$6x_1+y_1=\frac{10}{3}\left(\leftarrow 3x_1+\frac{1}{2}y_1=\frac{5}{3}\right)$$

$$6x_2+y_2=-2\left(\leftarrow 3x_2+\frac{1}{2}y_2=-1\right)$$

$$6x_3+y_3=-\frac{15}{2}\left(\leftarrow 3x_3+\frac{1}{2}y_3=-\frac{15}{4}\right)$$

이를 위의 세 부등식에 대입하면

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.
http://cafe.naver.com/2math
https://atom.ac/books/5074

$\frac{10}{3}<k,\ -2<k,\ -\frac{15}{2}<k$

연립부등식을 풀면

$k>\frac{10}{3}$

• xy평면에서 세 점 Q_1, Q_2, Q_3이 모두 직선 l 위쪽에 있으려면

$6x_1+y_1>k,\ 6x_2+y_2>k,$

$6x_3+y_3>k$

그런데

$6x_1+y_1=\frac{10}{3}\left(\leftarrow 3x_1+\frac{1}{2}y_1=\frac{5}{3}\right)$

$6x_2+y_2=-2\left(\leftarrow 3x_2+\frac{1}{2}y_2=-1\right)$

$6x_3+y_3=-\frac{15}{2}\left(\leftarrow 3x_3+\frac{1}{2}y_3=-\frac{15}{4}\right)$

이를 위의 세 부등식에 대입하면

$\frac{10}{3}>k,\ -2>k,\ -\frac{15}{2}>k$

연립부등식을 풀면

$k<-\frac{15}{2}$

따라서 k의 범위는

$k>\frac{10}{3}$ 또는 $k<-\frac{15}{2}$

30

[풀이]

우선 함수 $g(x)$의 그래프를 그리자.

함수 $g(x)$의 도함수는

$g'(x)=2x^3e^{-x}(4-x)=2x^2e^{-x}\times x(4-x)$

방정식 $g'(x)=0$을 풀면

$x=0$ 또는 $x=4$

함수 $g(x)$의 이계도함수는

$g''(x)=2x^2e^{-x}(x-2)(x-6)$

(※ 이 문제를 해결하기 위하여 함수 $g(x)$의 변곡점을 반드시 찾아야 하는 것은 아니다. 하지만 정확한 그래프의 개형을 그리기 위하여 교과서의 전형적인 풀이를 적용하여 보자.)

방정식 $g''(x)=0$을 풀면

$x=0$ 또는 $x=2$ 또는 $x=6$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$	6	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$g''(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	극소	↗	변곡점	↗	극대	↘	변곡점	↘

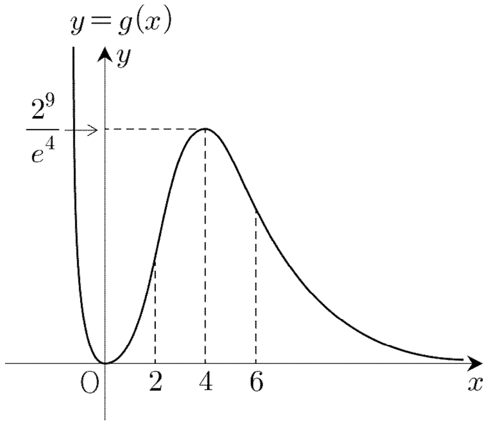
극솟값: $g(0)=0$, 극댓값: $g(4)=\frac{2^9}{e^4}$

문제에서 주어진 조건에 의하여

$\lim_{x\to\infty}g(x)=0$

이므로 x축은 점근선이다.

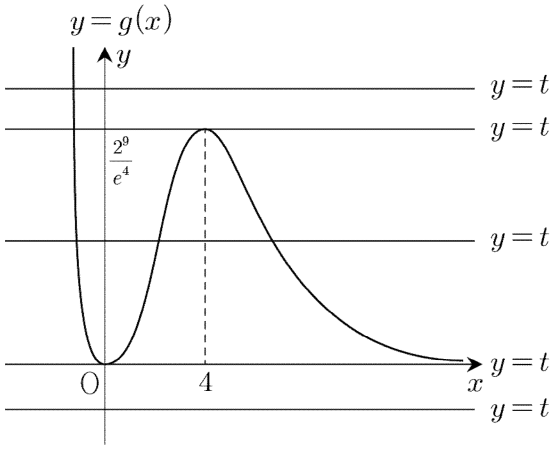
함수 $g(x)$의 그래프의 개형은



▸ 조건 (가)에 대하여 생각하자.

$h(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)=t \\ f(t)=0 \end{cases}$

실수 t의 값에 따른 방정식 $g(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수를 조사하자.



위의 그림에서

방정식 $g(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수는

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.
http://cafe.naver.com/2math
https://atom.ac/books/5074

$t > \frac{2^9}{e^4}$이면 1개,

$t = \frac{2^9}{e^4}$이면 2개,

$0 < t < \frac{2^9}{e^4}$이면 3개,

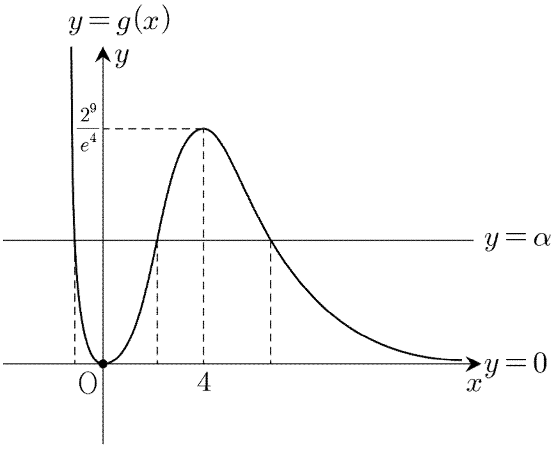
$t = 0$이면 1개,

$t < 0$이면 0개

이다. 이때, 각 경우에 대한 5개의 해집합 중에서 어느 두 집합도 교집합이 공집합이다. 그리고 각 경우에 대한 5개의 해집합의 합집합은 실수 전체의 집합이다.

방정식 $h(x) = 0$의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되는 경우는 다음과 같이 두 가지이다.

• (경우1)



방정식 $f(t) = 0$이 서로 다른 두 실근 0, α를 가져야 한다.

(단, $0 < \alpha < \frac{2^9}{e^4}$)

$f(0) = f(\alpha) = 0$이므로

인수 정리에 의하여

함수 $f(x)$의 방정식을 다음과 같이 두자.

$$f(x) = \frac{1}{2}x(x-\alpha)p(x)$$

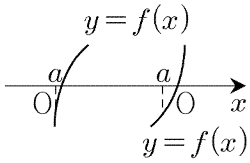
(단, $p(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수)

함수 $f(x)$의 도함수는

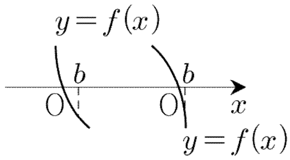
$$f'(x) = \frac{1}{2}(x-\alpha)p(x) + \frac{1}{2}xp(x)$$

$$+\frac{1}{2}x(x-\alpha)p'(x)$$

만약 $f'(0) > 0$이면 함수 $f(x)$의 그래프는 $x = 0$에서 증가하므로 음수이면서 0에 아주 가까운 어떤 실수 a에 대하여 $f(a) < 0$이다. 이때, 함수 $f(x)$의 최솟값은 0일 수 없으므로 이는 가정에 모순이다. 따라서 $f'(0) \le 0$이다.



만약 $f'(0) < 0$이면 함수 $f(x)$의 그래프는 $x = 0$에서 감소하므로 양수이면서 0에 아주 가까운 어떤 실수 b에 대하여 $f(b) < 0$이다. 이때, 함수 $f(x)$의 최솟값은 0일 수 없으므로 이는 가정에 모순이다. 따라서 $f'(0) = 0$이다. (←귀류법)



$f'(0) = -\frac{1}{2}\alpha p(0) = 0$에서 $p(0) = 0$

($\because \alpha \neq 0$)

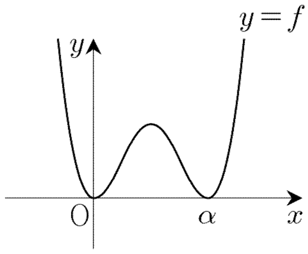
마찬가지의 방법으로 귀류법에 의하여

$f'(\alpha) = 0$, $p(\alpha) = 0$이다.

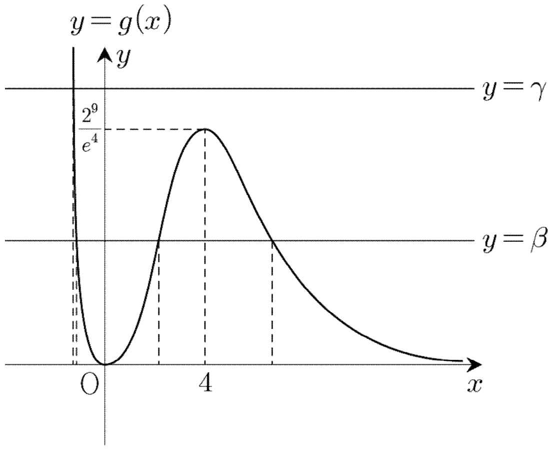
인수정리에 의하여 함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x) = \frac{1}{2}x^2(x-\alpha)^2$ (단, $0 < \alpha < \frac{2^9}{e^4}$)

함수 $f(x)$의 그래프의 개형은



• (경우2)



이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.
http://cafe.naver.com/2math
https://atom.ac/books/5074

방정식 $f(t)=0$이

$$0<\beta<\frac{2^9}{e^4}<\gamma$$

인 서로 다른 두 실근 β, γ를 가져야 한다.

$f(\beta)=f(\gamma)=0$이므로

인수 정리에 의하여

함수 $f(x)$의 방정식을 다음과 같이 두자.

$$f(x)=\frac{1}{2}(x-\beta)(x-\gamma)q(x)$$

(단, $q(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수)

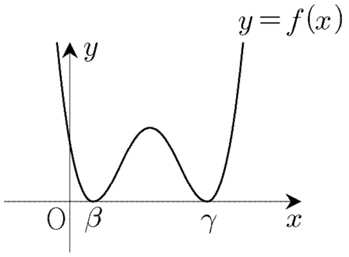
(경우1)과 마찬가지의 방법으로 귀류법에 의하여

$f'(\beta)=f'(\gamma)=0$, $q(\beta)=q(\gamma)=0$이므로

함수 $f(x)$의 방정식은

$$f(x)=\frac{1}{2}(x-\beta)^2(x-\gamma)^2 \ \left(\text{단, } 0<\beta<\frac{2^9}{e^4}<\gamma\right)$$

함수 $f(x)$의 그래프의 개형은



▸ 조건 (나)에 대하여 생각하자.

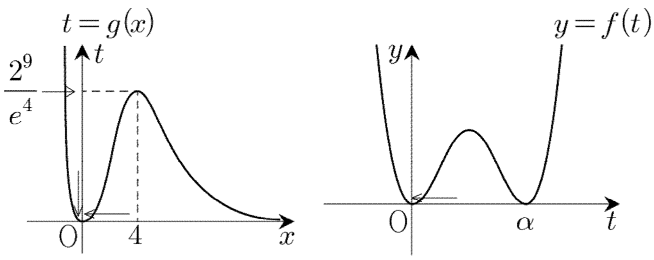
함수 $h(x)$의 도함수는

$h'(x)=f'(g(x))g'(x)$

$h'(0)=f'(g(0))g'(0)=f'(0)\times 0=0$

이제 $\begin{cases} t=g(x) \\ y=f(t) \end{cases}$로 두고 $x=0$의 좌우에서 함수 $h'(x)$의 부호의 변화를 관찰하자.

- (경우1)

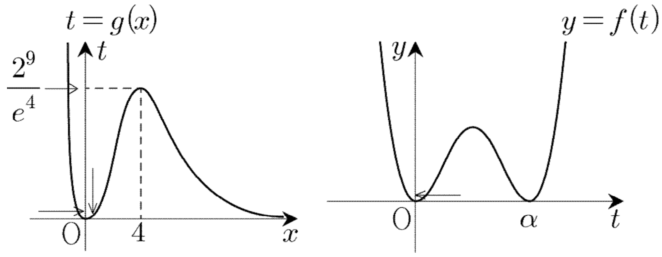


$x\to0+$일 때 $t\to0+$이고,

$t\to0+$일 때 $f'(t)\to0+$이다.

$x\to0+$일 때 $g'(x)\to0+$이다.

따라서 $x\to0+$일 때, $h'(x)\to0+$이다.



$x\to0-$일 때 $t\to0+$이고,

$t\to0+$일 때 $f'(t)\to0+$이다.

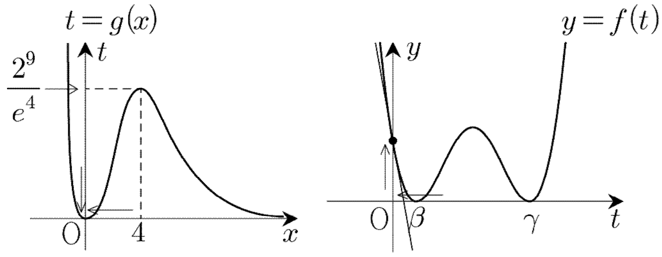
$x\to0-$일 때 $g'(x)\to0-$이다.

따라서 $x\to0-$일 때, $h'(x)\to0-$이다.

$x=0$의 좌우에서 $h'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖는다.

그러므로 (경우1)은 조건 (나)를 만족시킨다.

- (경우2)



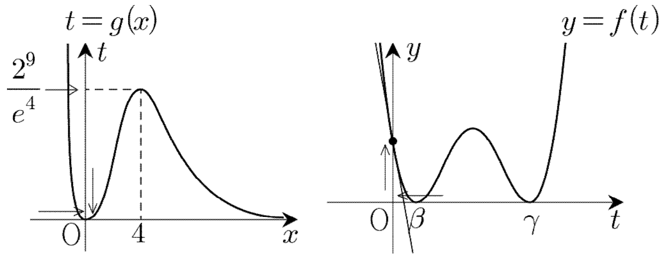
$x\to0+$일 때 $t\to0+$이고,

$t\to0+$일 때 $f'(t)\to f'(0)+$이다.

(이때, $f'(0)<0$)

$x\to0+$일 때 $g'(x)\to0+$이다.

따라서 $x\to0+$일 때, $h'(x)\to0-$이다.



$x\to0-$일 때 $t\to0+$이고,

$t\to0+$일 때 $f'(t)\to f'(0)+$이다.

(이때, $f'(0)<0$)

$x\to0-$일 때 $g'(x)\to0-$이다.

따라서 $x\to0-$일 때, $h'(x)\to0+$이다.

$x=0$의 좌우에서 $h'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.

그러므로 (경우2)는 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

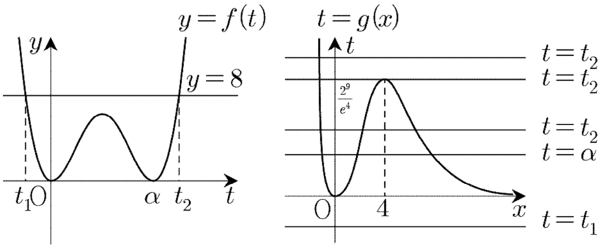
▸ 조건 (다)에 대하여 생각하자.

$$h(x)=8 \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)=t \\ f(t)=8 \end{cases}$$

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.
http://cafe.naver.com/2math
https://atom.ac/books/5074

실수 t의 값에 따른 방정식 $g(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수를 조사하자.

• 함수 $f(x)$의 극댓값이 8보다 작은 경우



방정식 $f(t)=8$의 서로 다른 두 실근을 각각 t_1, t_2라고 하자.

(단, $t_1<t_2$)

방정식 $g(x)=t_1$의 서로 다른 실근의 개수는 0,

방정식 $g(x)=t_2$의 서로 다른 실근의 개수는 3 또는 2 또는 1이다.

따라서 방정식 $h(x)=8$의 서로 다른 실근의 개수가 6일 수 없다.

• 함수 $f(x)$의 극댓값이 8인 경우

함수 $f(x)$의 도함수는

$$f'(x)=2x\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)(x-\alpha)$$

방정식 $f'(x)=0$을 풀면

$$x=0 \text{ 또는 } x=\frac{\alpha}{2} \text{ 또는 } x=\alpha$$

$x=\frac{\alpha}{2}$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\alpha}{2}$에서 극댓값을 갖는다.

함수 $f(x)$의 극댓값은

$$f\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\alpha^4}{2^5}=8 \text{ 풀면 } \alpha=4$$

함수 $f(x)$의 방정식은

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2(x-4)^2$$

방정식 $f(x)=8$을 정리하면

$\{x(x-4)\}^2=4^2$

$x(x-4)=4$ 또는 $x(x-4)=-4$

$x^2-4x-4=0$ 또는 $(x-2)^2=0$

전자를 풀면

$x=2-2\sqrt{2}$ 또는 $x=2+2\sqrt{2}$

후자를 풀면

$x=2$

이제

$t_1=2-2\sqrt{2}$, $t_2=2$, $t_3=2+2\sqrt{2}$

로 두자.

방정식 $g(x)=t_3$의 서로 다른 실근의 개수를 결정하기 위하여 두 수 t_3, $\frac{2^9}{e^4}$의 대소 관계를 밝히자.

$$\frac{2^9}{e^4}-t_3=\frac{2^9}{e^4}-2-2\sqrt{2}$$

$$=\frac{2(2^8-e^4(1+\sqrt{2}))}{e^4}>0$$

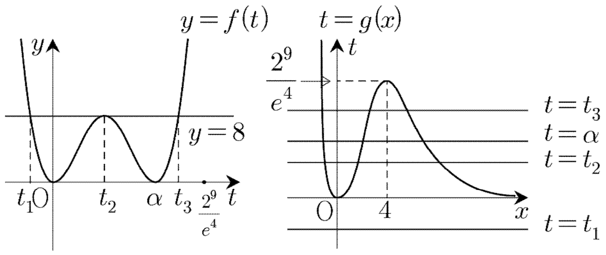
왜냐하면

$2^8=256$이고,

$e^4<(2.8)^4=61.4656$, $1+\sqrt{2}<3$에서

$e^4(1+\sqrt{2})<184.3968$

이기 때문이다.



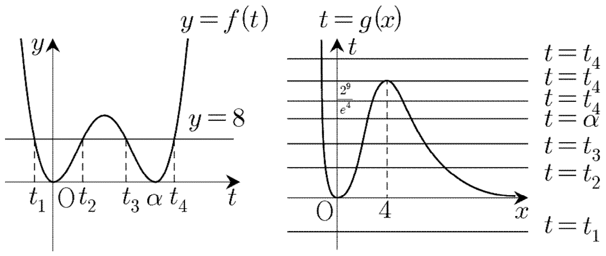
방정식 $g(x)=t_1$의 서로 다른 실근의 개수는 0,

방정식 $g(x)=t_2$의 서로 다른 실근의 개수는 3,

방정식 $g(x)=t_3$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

방정식 $h(x)=8$의 서로 다른 실근의 개수는 6이다.

• 함수 $f(x)$의 극댓값이 8보다 큰 경우



방정식 $f(t)=8$의 서로 다른 네 실근을 각각 t_1, t_2, t_3, t_4라고 하자.

(단, $t_1<0<t_2<t_3<\alpha<t_4$)

방정식 $g(x)=t_1$의 서로 다른 실근의 개수는 0,

방정식 $g(x)=t_2$의 서로 다른 실근의 개수는 3,

방정식 $g(x)=t_3$의 서로 다른 실근의 개수는 3,

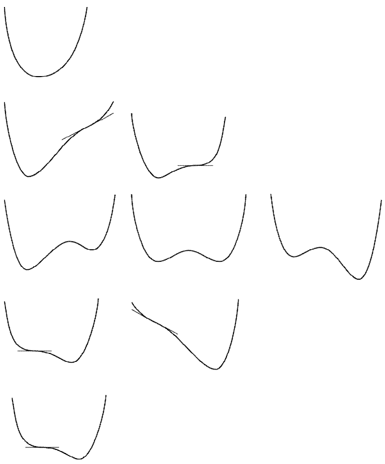
이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.
http://cafe.naver.com/2math
https://atom.ac/books/5074

방정식 $g(x)=t_4$의 서로 다른 실근의 개수의 최솟값은 1이다.
따라서 방정식 $h(x)=8$의 서로 다른 실근의 개수는 6일 수 없다.
문제에서 주어진 모든 조건을 만족시키는
함수 $f(x)$의 방정식은

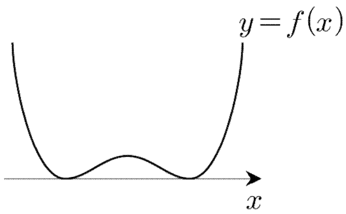
$$f(x)=\frac{1}{2}x^2(x-4)^2$$

함수 $f(x)$의 도함수는
$f'(x)=2x(x-2)(x-4)$
$\therefore\ f'(5)=30$
답 30

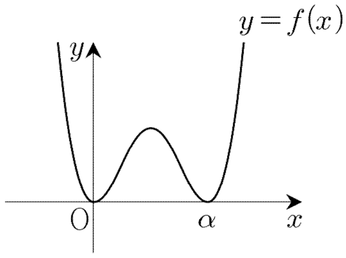
[참고1]
함수 $f(x)$의 그래프의 개형을 다음과 같이 결정할 수도 있다.
최고차항의 계수가 양수인 사차함수의 그래프의 개형을 모두 그리면 다음과 같다.



조건 (가)에 의하여 방정식
$f(x)=0=$(함수 $f(x)$의 최솟값이자 극솟값)
의 서로 다른 실근의 개수는 2이므로
함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 아래와 같을 수밖에 없다.



[참고2]
함수 $f(x)$의 방정식을 다음과 같이 유도할 수 있다.



방정식 $f(x)=0$을 만족시키는 실근은 0, α 이외에는 없으므로

$$f(x)=\frac{1}{2}x^m(x-\alpha)^n$$

(단, m, n은 3 이하의 자연수이고, $m+n=4$)
만약 $m=1$, $n=3$이면

$$f(x)=\frac{1}{2}x(x-\alpha)^3$$

$x=0$의 좌우에서 x의 부호가 음에서 양으로 변하고, $(x-\alpha)^3$의 부호는 음으로 변함이 없으므로 $f(x)$의 부호는 양에서 음으로 변한다. 이때, 함수 $f(x)$의 최솟값이 0일 수 없다.
만약 $m=3$, $n=1$이면

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3(x-\alpha)$$

$x=0$의 좌우에서 x의 부호가 음에서 양으로 변하고, $x-\alpha$의 부호는 음으로 변함이 없으므로 $f(x)$의 부호는 양에서 음으로 변한다. 이때, 함수 $f(x)$의 최솟값이 0일 수 없다.
귀류법에 의하여 $m=n=2$이므로

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2(x-\alpha)^2$$

[참고3]
방정식 $f(x)=0$을 만족시키는 실근은 0, α 이외에는 없으므로

$$f(x)=\frac{1}{2}x(x-\alpha)k(x)$$

(단, $k(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이다.)
이차방정식
$k(x)=0$ $\cdots(*)$
의 판별식을 D라고 하자.
$D>0$인 경우: $(*)$의 두 근은 0, α이다. $\cdots$㉠
$D=0$인 경우: $(*)$의 중근은 0 또는 α이다. $\cdots$㉡
$D<0$인 경우: $(*)$는 실근을 갖지 않는다. $\cdots$㉢

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.
http://cafe.naver.com/2math
https://atom.ac/books/5074

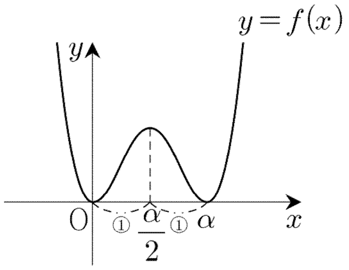
㉠: $f(x)=\frac{1}{2}x^2(x-\alpha)^2$

㉡: $f(x)=\frac{1}{2}x^3(x-\alpha)$ 또는 $f(x)=\frac{1}{2}x(x-\alpha)^3$

㉢: $f(x)=\frac{1}{2}x(x-\alpha)k(x)$

(단, 모든 실수 x에 대하여 $k(x)>0$이다.)
[참고2]에서 ㉡이 가능하지 않음을 산술적으로 보였다.
[참고2]에서와 마찬가지의 방법으로 ㉢이 가능하지 않음을 산술적으로 보일 수 있다.
귀류법에 의하여 ㉠만이 가능하다.

[참고4]
사차함수의 그래프에서의 비율에 대하여 생각해보자.



위의 그림처럼 사차함수 $f(x)$가 $x=0$과 $x=\alpha$에서 극소이고, 두 극솟값이 같을 때,

사차함수 $f(x)$는 $x=\frac{\alpha}{2}$에서 극대이다.

[참고5]
함수 $f(x)$가 (경우1)과 같을 때,
함수 $h(x)$의 이계도함수는
$h''(x)=f''(g(x))(g'(x))^2+f'(g(x))g''(x)$
$h''(0)=f''(g(0))(g'(0))^2+f'(g(0))g''(0)$
$=f''(0)\times 0+0\times g''(0)=0$
$(\because g'(0)=0,\ g(0)=0,\ f'(0)=0)$
이므로 함수 $h(x)$가 $x=0$에서 극소임을 이계도함수의 부호로 결정할 수 없다.
반면 함수 $f(x)$가 (경우2)와 같을 때,
함수 $h(x)$의 이계도함수는
$h''(x)=f''(g(x))(g'(x))^2+f'(g(x))g''(x)$
$h''(0)=f''(g(0))(g'(0))^2+f'(g(0))g''(0)$
$=f''(0)\times 0+f'(0)\times g''(0)<0$
$(\because g'(0)=0,\ g(0)=0,$
$f'(0)<0,\ g''(0)>0)$

이므로 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극대이다.

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.
http://cafe.naver.com/2math
https://atom.ac/books/5074