

1. 함수 $f(x)=x+\sin x$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를 $g(x)=(f\circ f)(x)$ 로 정의할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? (2008 수능)

- <보기>
- ㄱ. 함수 $f(x)$ 의 그래프는 개구간 $(0,\pi)$ 에서 위로 볼록하다.

ㄴ. 함수 $g(x)$ 는 개구간 $(0,\pi)$ 에서 증가한다.

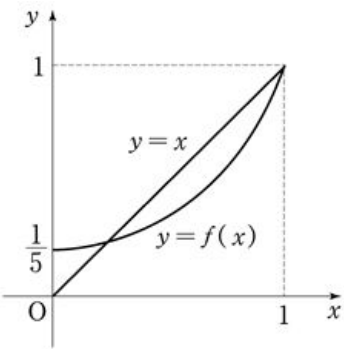
ㄷ. $g'(x)=1$ 인 실수 x 가 개구간 $(0,\pi)$ 에 존재한다.

2. 오른쪽 그림은 직선 $y=x$ 와 다항함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 일부이다. 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x)\geq 0$ 이고 $f(0)=\frac{1}{5}$, $f(1)=1$ 일 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? (2005년 9월)

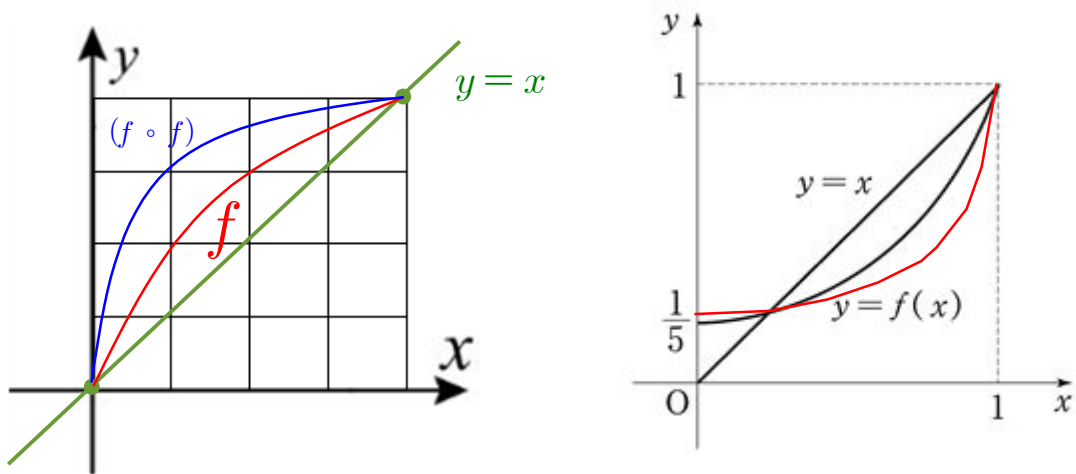
- <보기>
- ㄱ. $f'(x)=\frac{4}{5}$ 인 x 가 개구간 $(0,1)$ 에 존재한다.

ㄴ. $\int_0^1 f(x)dx+\int_{\frac{1}{5}}^1 f^{-1}(x)dx=1$

ㄷ. $g(x)=(f\circ f)(x)$ 일 때, $g'(x)=1$ 인 x 가 개구간 $(0,1)$ 에 존재한다.



-----해설-----



그림과 같이 빨간색이 원래 함수 $f(x)$ 이고, 그 합성함수 $(f \circ f)(x)$ 의 그래프는 파란색이다. 즉 위로볼록한 그래프가 더 위로볼록해진 것이 확인되고 오른쪽 그래프에서는 아래로볼록한 그래프가 더 아래로볼록해진 것이 확인된다. 이러한 결과를 암기해서 문제를 푸는 분도 많은 것으로 알고 있는데, 이 것을 수학적으로, 논리적으로 해석해보자.

왼쪽 그래프에서 함수 $f(x)$ 에서 $x=0$ 에서 $x=\pi$ 까지 커져감에 따라 $f(x)$ 의 접선의 기울기는 2에서 0까지 작아져 간다. 또한 $f(x)$ 에서 $x=0$ 에서 $x=\pi$ 까지 커져감에 따라 $f(x)$ 의 치역도 0에서 π 까지 커져간다. 따라서 그 치역이 다시 $f(x)$ 의 정의역이 되는 것이 합성함수 인데 그 구간에서 또 접선의기울기가 2에서 0까지 작아져 간다. 즉 처음 기울기 2에서 0까지와 두 번째 합성되는 기울기 2에서 0까지를 곱하면 4에서 0까지 기울기가 작아져 간다는 결과가 나온다. 따라서 합성함수 $(f \circ f)(x)$ 는 기울기가 4에서 0까지 기울기가 작아져 가므로 명백히 위로볼록인 파란색 개형이 됩니다. 이 처럼 합성함수 그래프를 그릴 때, 항상 기울기를 곱한 것이, 곧 합성함수의 접선의 기울기가 됩니다. 자 여기서 새로운 기출문제를 하나 더 봅시다.

3. 다항함수 $f(x)$ 에 대하여 다음 표는 x 의 값에 따른 $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ 의 변화 중 일부를 나타낸 것이다.

x	$x < 1$	$x = 1$	$1 < x < 3$	$x = 3$
$f'(x)$		0		1
$f''(x)$	+		+	0
$f(x)$		$\frac{\pi}{2}$		π

함수 $g(x) = \sin(f(x))$ 에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (작년 9월)

----- <보기> -----

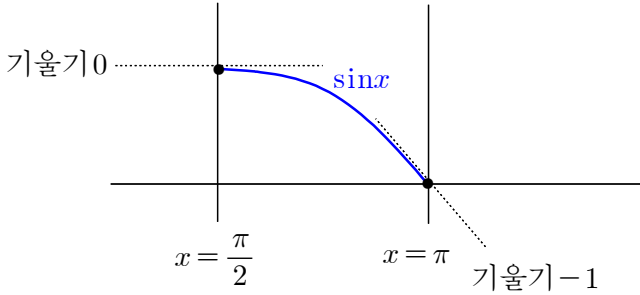
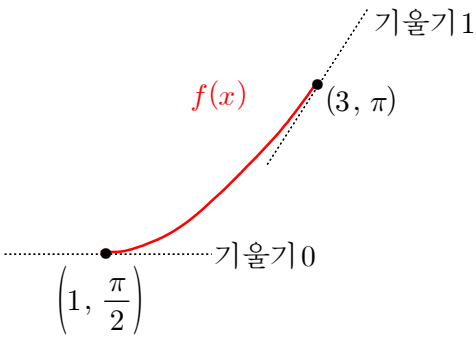
ㄱ. $g'(3) = -1$

ㄴ. $1 < a < b < 3$ 이면 $-1 < \frac{g(b)-g(a)}{b-a} < 0$ 이다.

ㄷ. 점 $P(1, 1)$ 은 곡선 $y = g(x)$ 의 변곡점이다.

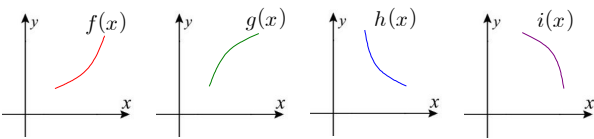
-----해설-----

주어진 표를 해석하면 다항함수 $f(x)$ 의 그래프를 다음과 같이 그릴 수 있다.



그림에서 보듯이 $f(x)$ 의 정의역이 1에서 3까지 커져감에 따라 그 기울기는 0에서 1까지 커져 간다. 또한 치역은 $\frac{\pi}{2}$ 에서 π 까지 커져가는데 그 치역이 다시 $\sin x$ 의 정의역이 되고, 그 구간에서 $\sin x$ 의 기울기는 0에서 -1까지 작아져간다. 따라서 두 기울기를 곱하면 0에서 -1까지 작아져 간다(위로 볼록)는 결과가 나오므로 ㄱ과 ㄴ은 자동으로 참. 마찬가지로 정의역이 1에서 왼쪽으로 갈때도 기울기가 점점 커지면서 치역이 증가하므로 1 왼쪽도 위로볼록이 되므로 변곡점이 아니게 된다. 따라서 ㄷ은 거짓.

이 처럼 특수한 합성의 경우, 기울기를 곱해 나가면 매우 빠르게, 아래로볼록과 위로볼록을 판정할 수 있다. 이러한 기출문제에서 끌어낼 수 있는 개념을 총 정리 해보면



뒤 \ 앞	$f(x)$	$g(x)$	$h(x)$	$i(x)$
$f(x)$	증가 아래로 볼록	증가 (결과x)	감소 아래로 볼록	감소 (결과x)
$g(x)$	증가 (결과x)	증가 위로 볼록	감소 (결과x)	감소 위로 볼록
$h(x)$	감소 (결과x)	감소 아래로 볼록	증가 (결과x)	증가 아래로 볼록
$i(x)$	감소 위로 볼록	감소 (결과x)	증가 위로 볼록	증가 (결과x)

다음과 같은 결과를 얻어낼 수 있다. 즉, (아래로 볼록, 위로볼록)+(증가함수, 감소함수)인 함수끼리 합성할 때, 총 16가지를 합성해볼 수 있는데, 아래로 볼록, 이로 볼록을 바로 판정할 수 있는 형태가 8가지, 바로 판정할 수 없는 형태가 8가지가 된다. 하지만 수능, 평가원 통틀어서 바로 판정할 수 없는 형태는 딱 한 번 출제되었다.

이제 내가 직접 만든 아래로볼록, 위로볼록 판정 문제를 풀어보자.

변형 문제 1

함수 $f(x)=2\pi-x-\sin x$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를 $g(x)=(f\circ f)(x)$ 로 정의 할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

<보기>

$\neg$. $\int_0^{2\pi} g(x)dx=2\pi^2$

$\sqcup$. $(0,2\pi)$ 에서 $h'(x)=1$ 인 x 가 적어도 2개 있다.

$\sqsubset$. $0<a<\pi$, $\pi<b<2\pi$ 일 때, $a(g(b)-\pi)<(b-\pi)g(a)$

변형 문제 2

함수 $f(x)=e^x+e^{-x}$ 에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보기>

$\neg$. 임의의 x 에 대하여 $(f\circ f')(-x)=(f\circ f')(x)$

$\sqcup$. 함수 $(f\circ f')(x)$ 의 최솟값은 2이다.

$\sqsubset$. $a<b$ 일 때, $(f\circ f')\left(\frac{a+b}{2}\right)<\frac{\int_a^b (f\circ f')(x)dx}{b-a}$