질량중심의 전체 질량의 중심점을 의미합니다. 물리1 지식이 있다면 질량중심의 속도는 다음과 같다는 것을 알 수 있습니다.

$$\overrightarrow{x_{cm}} = \frac{m_1\overrightarrow{x_1} + m_2\overrightarrow{x_2}}{m_1 + m_2} \rightarrow \overrightarrow{v_{cm}} = \frac{m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\overrightarrow{v_2}}{m_1 + m_2}$$

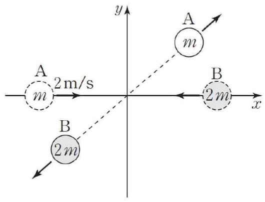
즉, (총 운동량)/(총 질량)에 해당하는 것을 알 수 있습니다.
이제 운동량 보존 법칙을 적용하면,

외력이 작용하지 않을 때, 질량중심의 운동량은 보존된다.

따라서 질량중심은 "어떤 순간의 두 물체의 질량 중심"과 "두 물체가 충돌한 지점"을 이는 직선상에서 운동하게 됩니다. 즉, 외력이 작용하지 않을 때 이 질량중심은 이 직선상에서 (총 운동량의 크기/총 질량)의 속력으로 등속직선운동하게 됩니다. 이는 다시 말해 매 순간 두 물체의 질량중심은 위에서 말한 직선상에서 위치해야만 한다는 것을 의미합니다.

실제 기출을 통해 살펴보겠습니다.

4. 그림은 xy 평면에서 질량이 각각 m, $2m$인 물체 A, B가 서로 향해 각각 등속도로 운동하여 탄성 충돌한 후, 등속도로 서로 멀어지는 것을 나타낸 것이다. 충돌 전 A와 B의 운동량의 크기는 같고, 방향은 반대이며, 충돌 전 A의 속력은 2m/s이다.



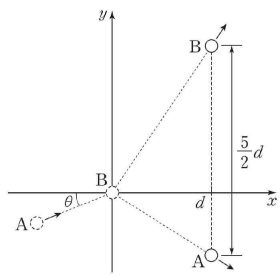
충돌 후 B의 속력은? (단, 물체의 크기는 무시한다.) [3점]

① 1m/s ② 2m/s ③ 3m/s ④ 4m/s ⑤ 5m/s

2013학년도 9평 4번 문항

ⅰ) 총 운동량의 크기가 0이므로 질량중심의 속력도 0입니다.
ⅱ) 질량중심은 항상 x축 상에 위치합니다.
따라서 질량중심의 위치는 항상 원점입니다. 이를 위해서 충돌 A, B가 2:1의 비율로 멀어져야 하므로 B의 속력은 1m/s입니다.

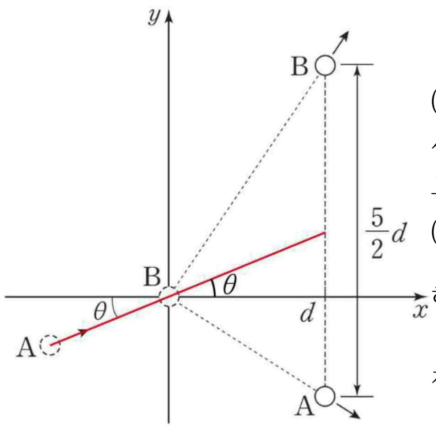
19. 그림과 같이 마찰이 없는 xy 평면에서 일정한 속도로 운동하던 물체 A가 x축과 θ의 각을 이루며 원점에 정지해 있던 물체 B와 탄성 충돌을 한 후, A와 B는 $x=d$인 선에 동시에 도달한다. 이때 A와 B 사이의 거리는 $\frac{5}{2}d$이다. A와 B의 질량은 같다.



$\tan\theta$는? (단, 물체의 크기는 무시한다.) [3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ 1

2018학년도 수능 10번 문항

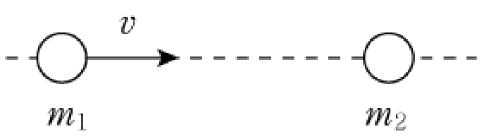


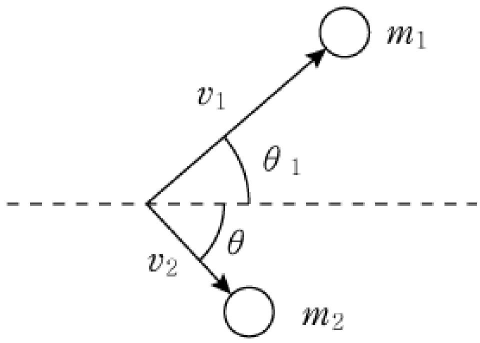
(ⅰ) 질량 중심은 빨간 선상에서 벗어나지 않는다. 따라서 이때 질량중심은 빨간 직선과 A와 B를 잇는 수직선의 교점에 위치한다.

(ⅱ) 충돌 전 A의 속력을 v, 충돌 후 이동 시간을 t라고 하자. 충돌 후 상대속도가 v로 일정하므로 $vt=\frac{5}{2}d$

질량중심은 $\frac{mv}{m+m}=\frac{v}{2}$로 등속직선운동하므로, 충돌 후 질량중심이 이동한 거리$=\frac{v}{2}t=\frac{5d}{4}$ 따라서 $\tan\theta=\frac{3}{4}$

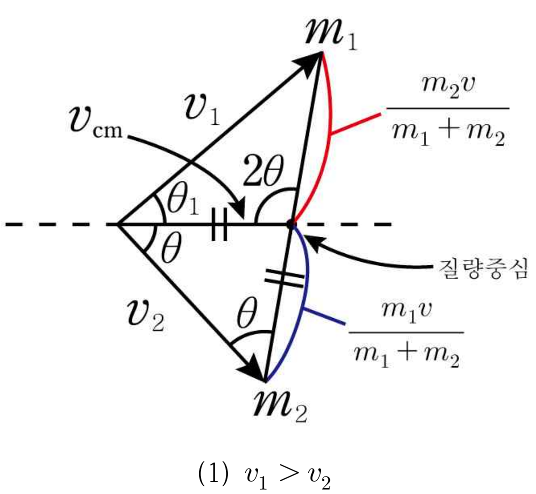
이제 여기서 더 나아가보겠습니다. 흔히 많이 접하는 이런 상황을 생각해보겠습니다.



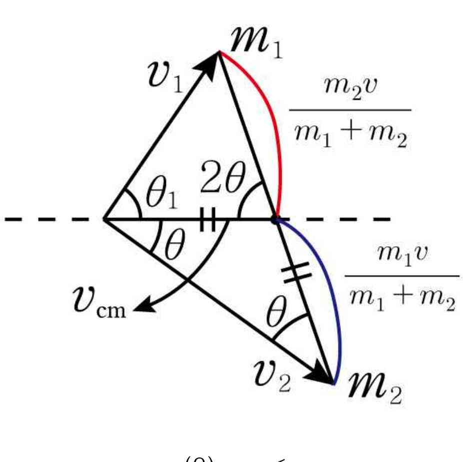


한 물체는 정지해있고, 다른 물체가 탄성충돌하는 상황이죠.

충돌 후 시간이 t만큼 지났을 때를 생각해봅시다. 질량중심의 이동거리$=\frac{m_1(vt)}{m_1+m_2}=v_{cm}t$이며 탄성충돌이므로 상대속도의 크기가 v로 일정합니다. 따라서 두 물체 사이의 거리는 vt입니다. 그런데 질량 중심은 항상 점선 위에 위치해야하며, 질량중심은 질량비 내분점에 위치하므로 다음과 같은 그림을 그릴 수 있습니다. (t 소거)



(1) $v_1 > v_2$



(2) $v_1 < v_2$

네 이 그림만 이해하고 그릴 수 있으면 끝났습니다.
이를 정리하면 식으로 나타낼 수도 있기는 하지만, 외울 필요는 없습니다.

$$(1)\ :\ \tan\theta_1 = \frac{\frac{m_2 v}{m_1+m_2} sin(\pi-2\theta)}{v_{cm} + \frac{m_2 v}{m_1+m_2} cos(\pi-2\theta)} = \frac{\sin(2\theta)}{(m_1/m_2)-\cos(2\theta)}$$

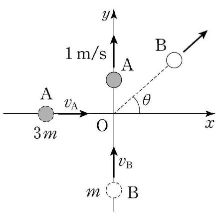
$$(2)\ :\ \tan\theta_1 = \frac{\frac{m_2 v}{m_1+m_2} sin(2\theta)}{v_{cm} - \frac{m_2 v}{m_1+m_2} cos(2\theta)} = \frac{\sin(2\theta)}{(m_1/m_2)-\cos(2\theta)}$$

따라서 어느 경우이든 $\tan\theta_1 = \frac{\sin(2\theta)}{(m_1/m_2)-\cos(2\theta)}$이 성립합니다. 다만 이 식은 한 물체만 이동하는 경우이고, 두 물체가 이동할 경우 그림을 그리시셔야 합니다.

또한 주의할 점은 외력 F가 작용할 경우 질량중심은 $\frac{F}{m_1+m_2}$의 가속도로 가속운동하기 때문에 속력이 변하게 됩니다. 따라서 이럴 경우 위에서 경우와 달리 점선위에 질량중심이 위치하지 않고, 이동하게 됩니다. 뒤에서 외력이 작용할 경우의 예시도 살펴보겠습니다.
여기서의 외력은 전기력 같은 힘뿐만이 아닌, 벽면에 충돌하는 상황에서 벽에게 받는 힘도 포함된다는 점에 특히 주의해야 합니다.

그러면 질량중심 언제 사용해야할까요?
(1) 탄성충돌인 경우
(2) 두 물체가 충돌 전 일직선상에서 운동할 경우 (한 물체가 정지해있을 필요는 없습니다)
예를 들어, 아래와 같은 올해 6평 문제는 질량중심을 쓰려고 하면 오히려 각도가 늘어나게 됩니다. 물론 이 문제도 질량중심으로 풀 수는 있지만, 계산량이 오히려 더 늘어나게 됩니다.

18. 그림은 xy 평면에서 각각 $+x$ 방향, $+y$ 방향으로 속력 v_A, v_B로 등속 직선 운동하던 물체 A, B가 원점 O에서 탄성 충돌한 후 각각 등속 직선 운동하는 모습을 나타낸 것이다. 충돌 후 A는 $+y$ 방향으로 속력 1 m/s로 운동하고, B의 운동 방향과 x 축이 이루는 각은 θ이다. A, B의 질량은 각각 $3m$, m이다.



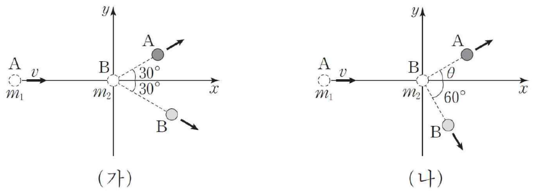
$\tan\theta = \frac{8}{9}$일 때, $\frac{v_A}{v_B}$는? (단, 물체의 크기는 무시한다.)

① $\frac{3}{11}$ ② $\frac{4}{11}$ ③ $\frac{5}{11}$ ④ $\frac{6}{11}$ ⑤ $\frac{7}{11}$

그러면 실제 기출을 통해 적용해보겠습니다.

(2018/09)

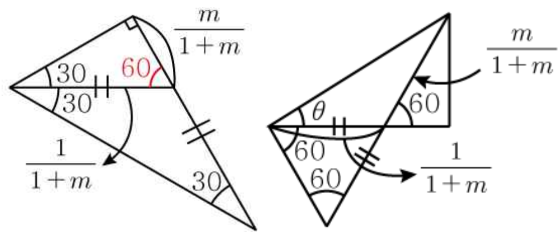
19. 그림 (가), (나)는 마찰이 없는 xy 평면에서 일정한 속력 v로 $+x$방향으로 운동하던 질량 m_1인 물체 A가 원점에 정지해 있던 질량 m_2인 물체 B와 탄성 충돌한 것을 나타낸 것이다. (가)에서는 충돌 후 A, B가 x축과 각각 30°의 각을 이루며 운동하였고, (나)에서는 충돌 후 A, B가 x축과 각각 θ, 60°의 각을 이루며 운동하였다.



$\tan\theta$는? (단, 물체의 크기는 무시한다.) [3점]

① $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{5}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{\sqrt{5}}{7}$ ⑤ $\frac{\sqrt{6}}{8}$

(1) 계산을 쉽게 하기 위해서 A의 질량을 1, B의 질량을 m, 충돌 후 이동시간을 1이라고 하겠습니다.



(가)에서 $\sin 30 = \frac{1}{2} = \frac{m/(1+m)}{1/(1+m)} = m$

(나)에서

$$\tan\theta = \frac{\sin 60 \times m/(1+m)}{\cos 60 \times m/(1+m) + 1/(1+m)} = \frac{\sqrt{3}\,m/2}{m/2+1} = \frac{\sqrt{3}}{5}$$

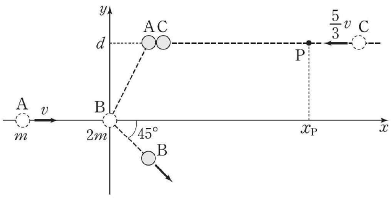
(2) 한 물체만 이동하므로 $\tan\theta_1 = \frac{\sin(2\theta)}{(m_1/m_2) - \cos(2\theta)}$ 이용

(가)에서 $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}/2}{(1/m) - 1/2} \rightarrow m = \frac{1}{2}$

(나)에서 $\tan\theta = \frac{\sin(120)}{2 - \cos(120)}$

(2017/09)

20. 그림은 마찰이 없는 xy 평면에서 일정한 속력 v로 $+x$방향으로 운동하던 물체 A가 원점에 정지해 있던 물체 B와 탄성 충돌한 후, 일정한 속력 $\frac{5}{3}v$로 $-x$방향으로 운동하던 물체 C와 충돌하는 모습을 나타낸 것이다. B는 A와 충돌한 후 x축과 45°의 각을 이루는 방향으로 운동하였고, A와 B가 충돌하는 순간 C는 점 P를 지났다. A, B의 질량은 각각 m, $2m$이다.



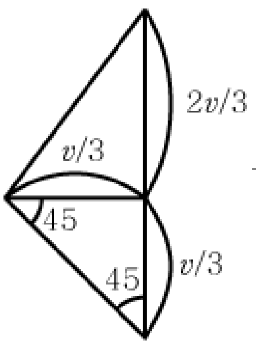
P의 x좌표 x_P는? (단, 물체의 크기는 무시한다.) [3점]

① $\frac{5}{2}d$ ② $\frac{11}{4}d$ ③ $3d$ ④ $\frac{13}{4}d$ ⑤ $\frac{7}{2}d$

마찬가지로 충돌 후 이동시간=1

$v_{cm} = \frac{mv}{m+2m} = \frac{v}{3}$

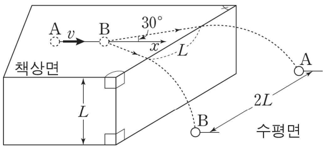
질량중심에서 본 A의 속력$= \frac{2m(v)}{m+2m} = \frac{2v}{3}$



$\frac{2v}{3} = d \rightarrow x_p = \frac{v}{3} + \frac{5v}{3} = 2v = 3d$

(2018/06)

19. 그림과 같이 높이가 L이고 수평인 책상면에서 $+x$방향으로 일정한 속력 v로 운동하던 물체 A가 정지해 있던 물체 B와 탄성 충돌한 후, A와 B는 각각 등속 직선 운동하다가 포물선 운동을 하여 수평면 위에 동시에 도달하였다. 충돌 직후 A의 운동 방향은 $+x$방향과 $30°$의 각을 이루고, A와 B가 책상면에서 벗어나는 지점 사이의 거리는 L, 수평면에 도달하는 지점 사이의 거리는 $2L$이며, A와 B의 질량은 같다.



v는? (단, 중력 가속도는 g이고, 물체의 크기는 무시한다.) [3점]

① $\sqrt{\frac{gL}{3}}$ ② $\sqrt{\frac{gL}{2}}$ ③ $\sqrt{gL}$ ④ $\sqrt{\frac{4gL}{3}}$ ⑤ $\sqrt{\frac{3gL}{2}}$

이 문제는 사실 $30°$ 조건과 질량 조건 모두 필요 없는 과조건 문제입니다. 따라서 질량중심은 필요도 없는 문제이기는 합니다.

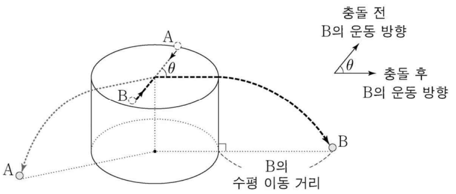
상대속도 크기가 v로 일정하므로 책상면에서 운동시간과 포물선 운동 시간 모두 t로 같습니다.

$vt = L = \frac{g}{2}t^2$

따라서 $v = \sqrt{\frac{gL}{2}}$

(2109/09)

20. 그림과 같이 수평면에 놓인 원기둥 윗면에서 서로 반대 방향으로 일정한 속력 1 m/s로 운동하던 물체 A, B가 윗면의 중심에서 탄성 충돌한 후, 각각 등속 운동하다가 포물선 운동을 하여 수평면 위에 도달하였다. A, B의 질량은 각각 m, 1 kg이고, 충돌 전과 후 B의 운동 방향은 θ의 각을 이룬다.



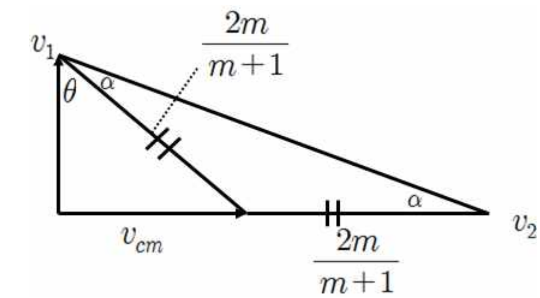
$\theta = 180°$일 때 B의 수평 이동 거리가 $\theta = 90°$일 때의 $\sqrt{\frac{3}{2}}$ 배이면, m은? (단, 물체의 크기는 무시한다.)

① $\frac{5}{3}$ kg ② 2 kg ③ $\frac{7}{3}$ kg ④ $\frac{8}{3}$ kg ⑤ 3 kg

B의 수평이동거리는 충돌 후 B의 속력에 비례

이 문제의 경우 B가 멈춰있는 경우가 아니라는 것에만 주의하시면 됩니다. 따라서 상대속도는 $2m/s$이고,

질량중심의 속력 $v_{cm} = \frac{m \times 1\text{m/s} - 1 \times 1\text{m/s}}{m+1} = \frac{m-1}{m+1}$



$\theta = 90°$ 일 때 B의 속력을 v_1, $\theta = 180°$ 일 때 B의 속력을 v_2

질량 중심 입장에서 보면 산란 각도와 무관하게 항상 B는 $\frac{m}{m+1} \times (2\text{m/s})$로 멀어지며, A는 $\frac{1}{m+1} \times (2\text{m/s})$의 속력으로 멀어집니다.

(1) 피타고라스 정리에 의해

$v_1^2 = \left(\frac{2m}{m+1}\right)^2 - v_{cm}^2 = \frac{(3m-1)(m+1)}{(m+1)^2} = \frac{3m-1}{m+1}$

또한 그림에서 $v_2 = v_{cm} + \frac{2m}{m+1} = \frac{3m-1}{m+1}$

따라서 $v_1^2 = v_2 = \frac{2}{3}v_2^2 \to v_2 = \frac{3}{2} = \frac{3m-1}{m+1}$ 이므로 $m = \frac{5}{3}$

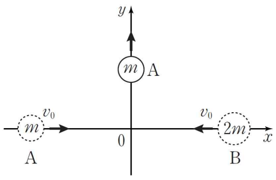
(2-2) $\tan(\theta + \alpha) = \frac{v_2}{v_1} = \frac{\frac{v_{cm}}{v_1} + \frac{v_1}{v_2}}{1 - \frac{v_{cm}}{v_1} \times \frac{v_1}{v_2}} = \frac{v_{cm}(v_2/v_1) + v_2(v_1/v_2)}{v_2 - v_{cm}}$

$\frac{v_2}{v_1} = k$라고 하면, $(k^2-1)v_2 = 2k^2 v_{cm}$

따라서 $\frac{1}{2} \times \frac{3m-1}{m+1} = 3 \times \frac{m-1}{m+1} \to m = \frac{5}{3}$

(2016/11)

20. 그림과 같이 마찰이 없는 xy평면에서 $+x$방향과 $-x$방향으로 각각 속력 v_0으로 운동하던 물체 A와 B가 원점에서 탄성 충돌한 후, A는 $+y$방향으로 등속 운동한다. A, B의 질량은 각각 m, $2m$이고, 충돌 후 A, B의 속력은 각각 v_A, v_B이다.

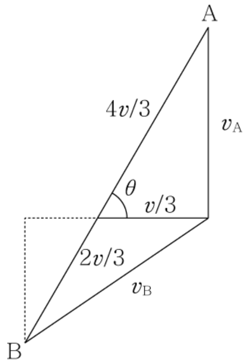


$\dfrac{v_A}{v_B}$는? (단, 물체의 크기는 무시한다.) [3점]

① $\sqrt{\dfrac{5}{2}}$ ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{\dfrac{5}{3}}$ ④ $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ ⑤ $\sqrt{\dfrac{4}{3}}$

상대속도$=2v$

질량중심 속도$=\dfrac{mv+2m(-v)}{m+2m}=-\dfrac{v}{3}$



(ⅰ) $v_A^2=\left(\dfrac{4v}{3}\right)^2-\left(\dfrac{v}{3}\right)^2=\dfrac{5v^2}{3}$

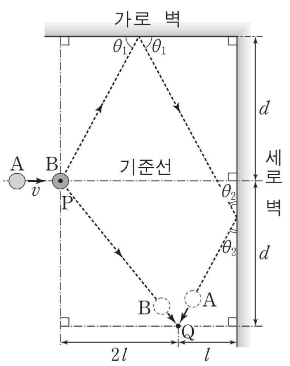
(ⅱ) $v_B^2=(\dfrac{v}{3}+\dfrac{2v}{3}cos\theta)^2+(\dfrac{2v}{3}sin\theta)^2$

$=\dfrac{v^2}{4}+\dfrac{4v^2}{9}\times\dfrac{15}{16}=\dfrac{2v^2}{3}$

따라서 $\dfrac{v_A}{v_B}=\sqrt{\dfrac{5}{2}}$

(2016/09)

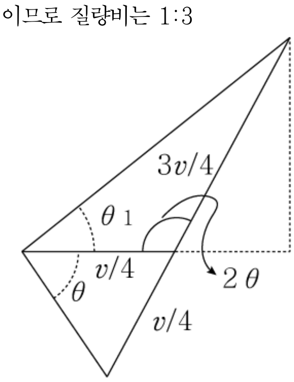
20. 그림과 같이 마찰이 없는 수평면 위에서 기준선을 따라 속력 v로 등속 운동하던 질량 m_A인 물체 A가 기준선 상의 점 P에 정지해 있던 질량 m_B인 물체 B와 충돌한 후 점 Q에서 다시 충돌한다. 모든 충돌은 탄성 충돌이다. P, Q는 가로 벽으로부터 각각 d, $2d$, 세로 벽으로부터 각각 $3l$, l만큼 떨어져 있다.



$\dfrac{d}{l}$는? (단, 물체의 크기, 공기 저항, 벽과의 충돌 시간은 무시한다.) [3점]

① $\sqrt{3}$ ② 2 ③ $\sqrt{5}$ ④ $\dfrac{9}{4}$ ⑤ $\sqrt{6}$

y축 속력비가 3:1이므로 질량비는 1:3



$\sin\theta=\dfrac{d}{\sqrt{4l^2+d^2}}$, $\cos\theta=\dfrac{2l}{\sqrt{4l^2+d^2}}$

따라서

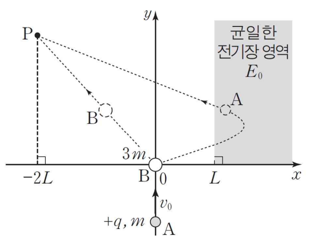
$$\tan\theta_1=\frac{3\sin(\pi-2\theta)}{1+3\cos(\pi-2\theta)}=\frac{6\cos\theta\sin\theta}{1-3(2\cos^2\theta-1)}=\frac{\dfrac{ld}{4l^2+d^2}}{\dfrac{1}{3}-\dfrac{l}{4l^2+d^2}}$$

$\dfrac{d}{l}=k$라고 하면, $\dfrac{3}{4}k=\dfrac{\dfrac{k}{4+k^2}}{\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{4+k^2}}\ \rightarrow 1=\dfrac{10}{4+k^2}$

따라서 $k=\sqrt{6}$

(2017/11)

20. 그림과 같이 마찰이 없는 xy평면에서 속력 v_0으로 $+y$방향으로 등속 운동을 하던 물체 A가 원점에 정지해 있던 물체 B와 탄성 충돌을 한다. A는 충돌 후에 세기가 E_0이고 $-x$방향인 전기장 영역에서 포물선 운동을 한 후, 등속도 운동을 하던 B와 점 P에서 만난다. A와 B의 질량은 각각 m과 $3m$이며, 전하량은 각각 $+q$와 0이다.



v_0은? (단, 물체의 크기는 무시하고, A와 B의 전하량은 변하지 않는다.) [3점]

① $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{qE_0L}{m}}$　② $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{qE_0L}{m}}$　③ $\sqrt{\frac{qE_0L}{m}}$

④ $\frac{4}{3}\sqrt{\frac{qE_0L}{m}}$　⑤ $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{qE_0L}{m}}$

외력이 있는 경우에 해당합니다.

(1) 충돌 후 x축 방향 속력비는 3:1이므로 B의 속력을 v라고 하면, $v_0 = 4v$이다. 또한 충돌 후 이동 시간은 $\frac{2L}{v}$

외력이 작용하는 방향이 $-x$축 방향이므로 질량중심이 외력에 의해 $-x$축 방향으로 추가적으로 움직이게 됩니다. 구체적으로 질량중심이 A가 전기장에 있을 때는 $\frac{qE_0}{4m}$의 가속도로 등가속도 운동하며(초속도는 0), 그 이후에는 $\frac{3mv+3mv}{4m} = \frac{3v}{2}$의 속력으로 등속직선운동하게 됩니다. ($-x$축 방향만 보았을 때)

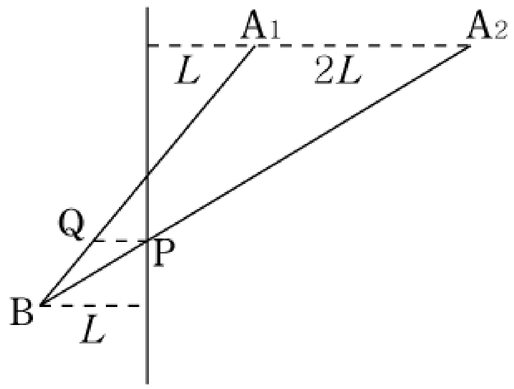
(1-1) 처음 질량중심의 위치는 원점, 최종 질량주심의 위치는 P이므로 질량중심은 $-x$축 방향으로 $2L$만큼 추가적으로 이동하게 됩니다. 질량중심은 x축 방향만 보았을 때, $\frac{d}{3v} = \frac{2L}{v} - \frac{4L}{3v} = \frac{2L}{3v}$동안의 시간동안 등가속도 운동, $\frac{3L}{3v} = \frac{L}{v}$만큼의 시간동안 등속도 운동,

따라서 $\frac{1}{2}\left(\frac{qE_0}{4m}\right)\left(\frac{2L}{3v}\right)^2 + \frac{3v}{2}\frac{L}{v} = 2L \rightarrow \frac{1}{2}\frac{qE_0L^2}{9mv^2} = \frac{L}{2}$

따라서 $v = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{qE_0L}{m}}$

(1-2) 전기장 영역을 빠져나왔을 때 질량중심의 속력이 $\frac{3v}{2}$이므로 $v = at$에서 $\frac{3v}{2} = \frac{qE_0}{4m}\frac{2L}{3v} \quad \rightarrow \quad v = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{qE_0L}{m}}$

(1-3)



A가 전기장 영역을 빠져나왔을 때

A_1, B : A, B의 위치

A_2 : 전기장이 없었을 때 A의 위치

P : 전기장이 없었을 때 질량중심의 위치

Q : 전기장이 있었을 때 질량중심의 위치

$\mathrm{BP} : \mathrm{PA_2} = \mathrm{BQ} : \mathrm{QA} = 1 : 3 \rightarrow \mathrm{QP} : \mathrm{A_1A_2} = 1 : 4$

따라서 $\mathrm{QP} = \frac{\mathrm{L}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{qE_0}}{\mathrm{4m}}\right)^2\left(\frac{\mathrm{2L}}{\mathrm{3v}}\right)^2$

따라서 $v = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{qE_0L}{m}}$