

제 2 교시

수학 영역(나형) 해설

문항 번호	정답	문항 번호	정답	문항 번호	정답	문항 번호	정답	문항 번호	정답
1	③	7	④	13	⑤	19	①	25	2
2	⑤	8	④	14	①	20	④	26	4
3	②	9	①	15	②	21	②	27	104
4	③	10	③	16	⑤	22	4	28	90
5	②	11	⑤	17	②	23	16	29	20
6	①	12	④	18	③	24	63	30	10

1. $27^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ 의 값은? [2점]

- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설 : $27^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = (3^3)^{\frac{1}{3}} + 2^2 = 7$

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1} - 4^n}{5^n + 2^n}$ 의 값은? [2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설 : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1} - 4^n}{5^n + 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 - \left(\frac{4}{5}\right)^n}{1 + \left(\frac{2}{5}\right)^n} = \frac{5-0}{1+0} = 5$

3. 두 집합 $A = \{a, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, b+1\}$ 가 $A \subset B$ 를 만족시킬 때, $a+b$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.) [2점]

- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

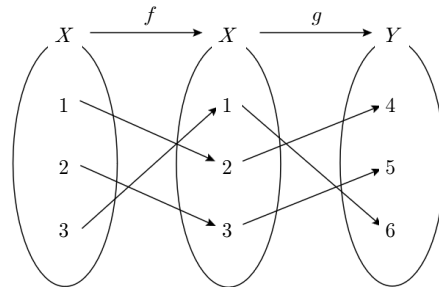
해설 :

집합 A 의 모든 원소가 집합 B 에 속해야 하므로

$$a=2, 4=b+1 \text{ 즉, } a=2, b=3$$

$$\therefore a+b=5$$

4. 그림은 두 함수 $f: X \rightarrow X$, $g: X \rightarrow Y$ 를 나타낸 것이다.



$(g \circ f^{-1})(3)$ 의 값은? [3점]

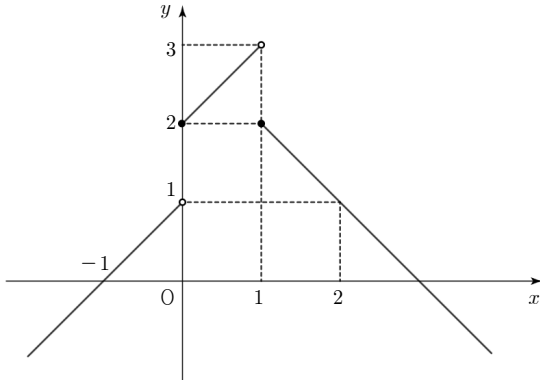
- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설 :

$f^{-1}(3) = 2$ 이고, $g(2) = 4$ 이므로,

$$(g \circ f^{-1})(3) = g(f^{-1}(3)) = g(2) = 4 \text{이다.}$$

5. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1+} f(x)$ 의 값은? [3점]

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설 :

$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 2$ 이고 $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = 1$ 이므로

$\therefore \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = 3$ 이다.

6. 두 사건 A 와 B 는 서로 독립이고

$$P(A) = \frac{1}{3}, P(A \cap B) = \frac{1}{15}$$

일 때, $P(A \cup B)$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{7}{15}$ ② $\frac{8}{15}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{11}{15}$

해설 :

두 사건 A 와 B 가 서로 독립이므로

$P(A) \times P(B) = P(A \cap B)$ 이고 $\frac{1}{3} \times P(B) = \frac{1}{15}$ 이다.

$$\therefore P(B) = \frac{1}{5}$$

그러므로, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{15} \\ &= \frac{5+3-1}{15} = \frac{7}{15} \end{aligned}$$

7. 실수 x 에 대한 두 조건

$$p : x^2 - 8x + 12 \leq 0$$

$$q : |x - a| < \frac{7}{3}$$

에 대하여 p 가 q 이기 위한 충분조건이 되도록 하는 정수 a 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설 :

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라고 하자.

조건 p 에서 주어진 이차부등식을 풀면 $2 \leq x \leq 6$ 이므로

$$P = \{x | 2 \leq x \leq 6\}$$

조건 q 에서 주어진 일차부등식을 풀면 $a - \frac{7}{3} < x < a + \frac{7}{3}$ 이므로

$$Q = \left\{x \mid a - \frac{7}{3} < x < a + \frac{7}{3}\right\}$$

p 가 q 이기 위한 충분조건일 때는 $P \subset Q$ 이다.

따라서 $a - \frac{7}{3} < 2$, $a + \frac{7}{3} > 6$, 즉 $\frac{11}{3} < a < \frac{13}{3}$ 이다.

위 범위에 속하는 정수 a 의 값은 4이다.

8. 닫힌 구간 $[1, 9]$ 에서 정의된 함수 $y = -\sqrt{x} + a$ 의 최댓값이 5일 때, 최솟값은? (단, a 는 상수이다.) [3점]

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설 :

닫힌 구간 $[1, 9]$ 에서 함수 $y = -\sqrt{x} + a$ 는 감소함수이므로 $x=1$ 일 때, 최댓값 $-1+a$ 를, $x=9$ 일 때, 최솟값 $-3+a$ 을 갖는다.

$-1+a=5$ 이므로 $a=6$ 이고, 따라서 최솟값은 3이다.

9. $\int_1^2 (8x^3 + 6x - 1)dx$ 의 값은? [3점]

① 38 ② 41 ③ 44 ④ 47 ⑤ 50

해설 :

$$\int_1^2 (8x^3 + 6x - 1)dx = [2x^4 + 3x^2 - x]_1^2 = 38$$

10. 다항식 $(x^2 + a)^6$ 의 전개식에서 x^8 의 계수가 240일 때, 양수 a 의 값은? [3점]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설 :

주어진 다항식의 전개식에서 일반항은 ${}_6C_r (x^2)^{6-r} a^r = {}_6C_r x^{12-2r} a^r$

x^8 은 $r=2$ 일 때이므로, x^8 의 계수는 ${}_6C_2 a^2 = 240$ 이다.

${}_6C_2 = 15$ 이므로 $a^2 = 16$ 이고, a 가 양수이므로 $a=4$ 이다.

11. 확률변수 X 의 확률분포표는 다음과 같다.

X	1	2	5	10	합계
$P(X=x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	a	b	1

$E(X)=4$ 일 때, $E\left(\frac{1}{a}X+\frac{1}{b}\right)$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.)

[3점]

- ① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

해설 :

$$P(X=1)+P(X=2)+P(X=5)+P(X=10)$$

$$= \frac{3}{10} + \frac{1}{10} + a + b = 1 \text{ 이므로, } a + b = \frac{3}{5} \text{ 이다. } \dots \textcircled{1}$$

확률변수 X 의 평균은

$$E(X) = 1 \times \frac{3}{10} + 2 \times \frac{1}{10} + 5 \times a + 10 \times b = 4 \text{ 이므로,}$$

$$5a + 10b = \frac{7}{2} \text{ 이다. } \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{과 } \textcircled{2} \text{을 연립하면 } a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{10} \text{ 이다.}$$

$$\text{확률변수 } \frac{1}{a}X + \frac{1}{b} = 2X + 10 \text{의 평균은}$$

$$E(2X+10) = 2E(X) + 10 = 18$$

12. 등차수열 $\{a_n\}$ 이

$$\sum_{k=1}^5 a_{2k} = 60, \quad \sum_{k=1}^9 a_{2k-1} = 270$$

을 만족시킬 때, a_8 의 값은? [3점]

- ① 15 ② 18 ③ 21 ④ 24 ⑤ 27

해설 :

수열 $\{a_n\}$ 이 등차수열이므로 수열 $\{a_{2n}\}$, 수열 $\{a_{2n-1}\}$ 도 등차수열이다.

$$\text{따라서 } \sum_{k=1}^5 a_{2k} = \frac{a_2 + a_{10}}{2} \times 5 = 5a_6 = 60, \text{ 즉 } a_6 = 12 \text{ 이고,}$$

$$\sum_{k=1}^9 a_{2k-1} = \frac{a_1 + a_{17}}{2} \times 9 = 9a_9 = 270, \text{ 즉 } a_9 = 30 \text{ 이다.}$$

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 할 때,

$$a_9 - a_6 = 3d = 18 \text{ 이므로 } d = 6 \text{ 이다.}$$

$$\therefore a_8 = a_9 - d = 24$$

13. 함수 $f(x) = x^3 - 3x^2$ 이 극대가 되는 점의 x 좌표를 a , 극소가 되는 점의 x 좌표를 b 라 할 때,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

를 만족시키는 모든 실수 c 의 값의 곱은? [3점]

- ① $-\frac{2}{3}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

해설 :

함수 $f(x)$ 의 도함수는 $f'(x) = 3x^2 - 6x$ 이다.

$f'(x) = 3x(x-2) = 0$ 인 x 는 $x=0$ 또는 $x=2$ 이다.

함수 $f'(x)$ 의 최고차항의 계수가 양수이므로, 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극댓값을 갖고, $x=2$ 에서 극솟값을 갖는다.

$\therefore a=0, b=2$

주어진 등식은

$$\frac{f(2)-f(0)}{2-0} = -2 = f'(c) = 3c^2 - 6c, \text{ 즉 } 3c^2 - 6c + 2 = 0 \text{이므로,}$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

모든 실수 c 의 곱은 $\frac{2}{3}$ 이다.

14. 다음은 어느 고등학교 3학년 학생들이 2019학년도 대학수학능력 시험에서 불 사회탐구 영역의 신청 과목을 조사한 표이다.

과목명	생활과 윤리	윤리와 사상	한국 지리	세계 지리	합계
비율(%)	40	23	24	13	100

이 고등학교 3학년 전체 학생 중 150명을 임의로 뽑아 2019학년도 대학수학능력시험에서 불 사회탐구 영역을 조사하였을 때, 생활과 윤리를 불 학생이 54명 이상이고 69명 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

[4점]

- ① 0.7745 ② 0.8185 ③ 0.8351 ④ 0.9104 ⑤ 0.9270

해설 :

150명의 학생들 중에서 임의로 한 학생을 선택하였을 때, 선택된

학생이 생활과 윤리를 불 확률은 $\frac{40}{100} = \frac{2}{5}$ 이다.

생활과 윤리를 불 학생의 수를 X 로 두면

확률변수 X 는 이항분포 $B\left(150, \frac{2}{5}\right)$ 를 따른다.

확률변수 X 의 평균과 분산을 구하면

$$m = 150 \times \frac{2}{5} = 60, \sigma^2 = 150 \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = 36$$

150은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X 는

정규분포 $N(60, 6^2)$ 을 따른다.

$Z = \frac{X-60}{6}$ 라 할 때,

확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1^2)$ 을 따른다.

구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(54 \leq X \leq 69) &= P(-1 \leq Z \leq 1.5) \\ &= P(0 \leq Z \leq 1) + P(0 \leq Z \leq 1.5) \\ &= 0.3413 + 0.4332 = 0.7745 \end{aligned}$$

15. 1이 아닌 서로 다른 두 양수 a, b 에 대하여 밑과 진수에 따른 로그의 값을 표로 나타내면 다음과 같다.

밑 \ 진수	a	b	$\frac{a}{b}$
a	k_1	k_2	k_3
b	k_4	k_5	k_6
$\frac{a}{b}$	k_7	k_8	k_9

예를 들어, $\log_a b = k_2$ 이다. $k_7 + k_8 = 2$ 일 때, $\sum_{i=1}^9 k_i$ 의 값은? [4점]

- ① 9 ② 11 ③ 13 ④ 15 ⑤ 17

해설 :

$$k_7 - k_8 = \log_{\frac{a}{b}} a - \log_{\frac{a}{b}} b = 1 \text{ 이고, } k_7 + k_8 = 2 \text{ 이므로}$$

$$k_7 = \frac{3}{2}, k_8 = \frac{1}{2} \text{ 이다.}$$

$$k_3 = \frac{1}{k_7} = \frac{2}{3} \text{ 이고, } k_6 = \frac{1}{k_8} = 2 \text{ 이다.}$$

$$k_3 = \log_a a - \log_a b = 1 - k_2 \text{ 이므로, } k_2 = \frac{1}{3} \text{ 이다.}$$

$$k_6 = \log_b a - \log_b b = k_4 - 1 \text{ 이므로, } k_4 = 3 \text{ 이다.}$$

$$\text{그리고 } k_1 = k_5 = k_9 = 1 \text{ 이다.}$$

$$\text{그러므로 } \sum_{i=1}^9 k_i = 11 \text{ 이다.}$$

16. 첫째항이 a 인 수열 $\{a_n\}$ 은 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - n & (n \text{이 } 3 \text{의 배수가 아닌 경우}) \\ -a_n + 2n & (n \text{이 } 3 \text{의 배수인 경우}) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_{16} = 8$ 일 때, a 의 값은? [4점]

- ① 21 ② 22 ③ 23 ④ 24 ⑤ 25

해설 :

$$a_2 = a_1 - 1 = a - 1$$

$$a_3 = a_2 - 2 = a - 3$$

$$a_4 = -a_3 + 6 = -a + 9$$

$$a_5 = a_4 - 4 = -a + 5$$

$$a_6 = a_5 - 5 = -a$$

$$a_7 = -a_6 + 12 = a + 12$$

$$a_8 = a_7 - 7 = a + 5$$

$$a_9 = a_8 - 8 = a - 3$$

$$a_{10} = -a_9 + 18 = -a + 21$$

$$a_{11} = a_{10} - 10 = -a + 11$$

$$a_{12} = a_{11} - 11 = -a$$

⋮

$$a_{15} = a - 3$$

$$a_{16} = -a_{15} + 30 = -a + 33 = 8$$

$$\text{따라서 } a = 25$$

* 이 수열은 항상 $a_{6n-3} = a - 3$ 인 수열이다.

proof) $a_{6n-3} = a - 3$ 임을 보이자. ... (*)

$$a_3 = a_2 - 2 = (a_1 - 1) - 2 = a - 3$$

따라서 $n = 1$ 일 때, (*)이 성립한다.

$n = k$ 일 때, (*)이 성립한다고 가정하자.

$$a_{6k+3} = a_{6k+2} - (6k+2)$$

$$= \{a_{6k+1} - (6k+1)\} - 6k - 2 = a_{6k+1} - 12k - 3$$

$$= (-a_{6k} + 12k) - 12k - 3 = -a_{6k} - 3$$

$$= -\{a_{6k-1} - (6k-1)\} - 3 = -a_{6k-1} + 6k - 4$$

$$= -\{a_{6k-2} - (6k-2)\} + 6k - 4 = -a_{6k-2} + 12k - 6$$

$$= -\{-a_{6k-3} + 2(6k-3)\} + 12k - 6 = a_{6k-3} = a - 3$$

즉, $n = k+1$ 일 때, (*)이 성립한다.

17. 사차함수 $f(x)$ 가

$$\lim_{x \rightarrow n} \frac{f(x)}{(x-n)^n} = n \quad (n=1, 2)$$

을 만족시킬 때, $f(3)$ 의 값은? [4점]

- ① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

해설 :

$$n=1 \text{ 일 때 주어진 등식은 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 1 \dots\dots ①$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x)}{x-1} \times (x-1) \right\} = 0 \text{ 이고 함수 } f(x) \text{ 는 다항함수이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \text{ 즉, } f(1) = 0$$

$$n=2 \text{ 일 때 주어진 등식은 } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{(x-2)^2} = 2 \dots\dots ②$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \left\{ \frac{f(x)}{(x-2)^2} \times (x-2)^2 \right\} = 0 \text{ 이고 } f(x) \text{ 는 다항함수이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \text{ 즉, } f(2) = 0$$

따라서 다항식 $f(x)$ 는 $x-1$ 과 $x-2$ 를 인수로 갖는다.

다항식 $f(x)$ 의 최고차항의 계수를 a (a 는 상수)라 하자.

$$f(x) = a(x-1)(x-2)g(x)$$

(단, $g(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 이차식)

이를 ②에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a(x-1)(x-2)g(x)}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a(x-1)g(x)}{x-2} = 2$$

위의 방식으로 다항식 $g(x)$ 가 $x-2$ 를 인수로 가지는 것을 알 수 있다.

$$\therefore g(x) = (x-2)(x-\alpha)$$

$$\therefore f(x) = a(x-1)(x-2)^2(x-\alpha)$$

이를 다시 ①과 ②에 대입하면

$$① \text{ 에서 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a(x-1)(x-2)^2(x-\alpha)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} a(x-2)^2(x-\alpha) = a(1-\alpha) = 1$$

$$② \text{ 에서 } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a(x-1)(x-2)^2(x-\alpha)}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2} a(x-1)(x-\alpha) = a(2-\alpha) = 2$$

두 식을 연립하면 $a=1, \alpha=0$

$$\therefore f(x) = x(x-1)(x-2)^2, f(3) = 6$$

18. 1부터 9까지의 자연수를 다음 규칙에 따라 일렬로 나열하는 경우의 수는? [4점]

(가) 1보다 9를 왼쪽에 나열한다.

(나) 소수 다음에는 짝수를 나열한다.

- ① 720 ② 900 ③ 1080 ④ 1260 ⑤ 1440

해설 :

1부터 9까지의 자연수 중 소수는 2, 3, 5, 7, 4개이고 짝수는

2, 4, 6, 8, 4개다. 2가 중복되면서 조건 (나)를 만족시키는 방법은 2가 다른 소수 뒤에 나열되는 방법이다.

예를 들어 3, 2, 4, 5, 6, 7, 8 순으로 나열하면 조건 (나)를 만족시킨다. 이런 경우의 수는 2가 다음에 놓일 소수를 선택하는 방법의 수가 3이고, 2를 제외한 3개의 소수를 나열하는 방법의 수가 3!, 그리고 짝수가 다음에 놓일 소수를 선택하는 방법의 수가 3!이므로, $3 \times 3! \times 3!$ 이다.

이 경우 중 3, 2, 4, 5, 6, 7, 8 순으로 나열되었을 때, 숫자 1, 9가 들어갈 수 있는 곳은

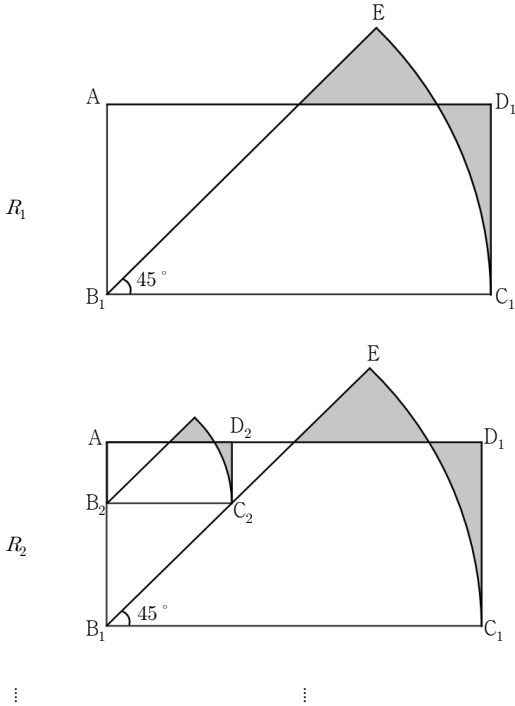
$$\vee, 3, 2, 4, \vee, 5, 6, \vee, 7, 8, \vee$$

에서 $\vee$ 표시된 곳이므로, 1, 9가 4곳 중 중복을 허용하여 2곳에 들어가는 경우의 수는 ${}_4H_2$ 이다.

그러므로 위의 규칙에 따라 나열하는 방법의 수는

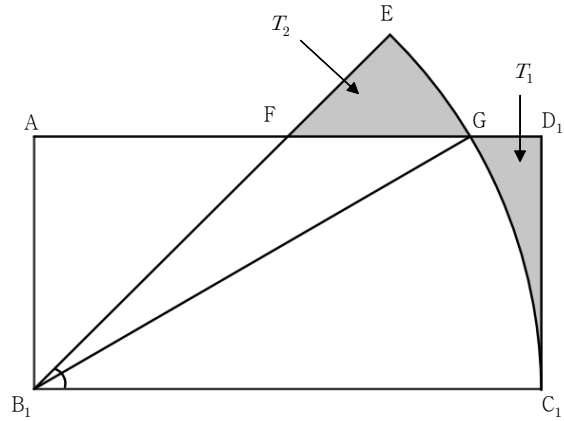
$$3 \times 3! \times 3! \times {}_4H_2 = 1080 \text{ 이다.}$$

19. 가로와 세로가 $2\sqrt{3}$, 세로가 $\sqrt{3}$ 인 직사각형 $AB_1C_1D_1$ 가 있다. 그림과 같이 중심이 B_1 , 반지름의 길이가 $\overline{B_1C_1}$ 이고 중심각의 크기가 45° 인 부채꼴 BCE 를 호 CE 가 선분 AD 와 만나도록 그리고, 선분 B_1E , 선분 AD_1 와 호 C_1E 로 둘러싸인 부분과 선분 AD_1 , 선분 C_1D_1 와 호 C_1E 로 둘러싸인 부분을 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자.
- 그림 R_1 에 점 A , 선분 AB_1 위의 점 B_2 , 선분 B_1E 위의 점 C_2 와 선분 AD_1 위의 점 D_2 를 꼭짓점으로 하고 가로와 세로의 길이의 비가 $2:1$ 인 직사각형 $AB_2C_2D_2$ 를 그리고, 직사각형 $AB_2C_2D_2$ 에서 그림 R_1 을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 부분을 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자.
- 이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{9}{16}(15-6\sqrt{3}-\pi)$ ② $\frac{9}{8}(15-6\sqrt{3}-\pi)$
- ③ $\frac{9}{4}(15-6\sqrt{3}-\pi)$ ④ $\frac{9}{16}(12-3\sqrt{3}-\pi)$
- ⑤ $\frac{9}{8}(12-3\sqrt{3}-\pi)$

해설 :



선분 AD 와 선분 B_1E 가 만나는 점을 F 라 하자.

$\angle AB_1F = 45^\circ$ 이고, 각 A 는 90° 이므로, $\overline{AB_1} = \overline{AF} = \sqrt{3}$ 이다.

호 C_1E 와 선분 AD_1 이 만나는 점을 G 라 하자.

$\overline{AB_1} = \sqrt{3}$ 이고 $\overline{B_1G} = \overline{B_1C_1} = 2\sqrt{3}$ 이므로, $\angle AB_1G = 60^\circ$ 다.

T_1 은 사다리꼴 $GB_1C_1D_1$ 의 넓이에서 부채꼴 B_1GC_1 의 넓이를 뺀 것과 같다. $\overline{AG} = \sqrt{3}\tan 60^\circ = 3$ 이므로, $\overline{GD} = 2\sqrt{3}-3$ 이다.

그러므로 사다리꼴 $GB_1C_1D_1$ 의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}(4\sqrt{3}-3)}{2} = \frac{12-3\sqrt{3}}{2}$

부채꼴 B_1GC_1 의 넓이는 $12\pi \times \frac{1}{12} = \pi$ 이다.

$T_1 = 6 - \frac{3\sqrt{3}}{2} - \pi$ 이다.

T_2 는 부채꼴 B_1EC_1 의 넓이에서 부채꼴 B_1GC_1 의 넓이와 삼각형 B_1FG 의 넓이를 뺀 것과 같다.

$\overline{FG} = \overline{AG} - \overline{AF} = 3 - \sqrt{3}$ 이므로,

$T_2 = 12\pi \times \frac{1}{8} - \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times (3 - \sqrt{3}) - \pi = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}(3\sqrt{3}-3)$ 이다.

$S_1 = T_1 + T_2 = \frac{15}{2} - 3\sqrt{3} - \frac{1}{2}\pi$ 이다.

직사각형 $AB_2C_2D_2$ 에서 $\overline{AB_2} = a$ 라 할 때, $\overline{B_1B_2} = \sqrt{3} - a = \overline{B_2C_2} = 2a$

이므로, $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 이다. 그러므로 직사각형 $AB_1C_1D_1$ 과 직사각형

$AB_2C_2D_2$ 의 한 변의 길이의 비는 $\frac{1}{3}$ 이고, 닮음인 도형의 넓이의 비

는 $\frac{1}{9}$ 이다. $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\frac{15}{2} - 3\sqrt{3} - \frac{1}{2}\pi}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{9}{16}(15 - 6\sqrt{3} - \pi)$

20. 무게가 1인 추 4개, 무게가 2인 추 2개와 양팔 저울이 있다.

왼쪽 저울을 A, 오른쪽 저울을 B라 할 때, 1, 2, 3의 숫자가 하나씩 적혀 있는 3장의 카드를 사용하여 다음의 시행을 한다.

3장의 카드 중에서 임의로 1장의 카드를 선택할 때, 선택한 카드에 적힌 수가 홀수이면 양팔 저울에 올리지 않은 추 중 무게가 적은 추 1개를 A에 놓고, 짝수이면 양팔 저울에 올리지 않은 추 중 무게가 적은 추 1개를 B에 놓는다.

위의 시행을 반복하여 양팔 저울에 추 6개를 모두 놓았더니 양팔 저울이 수평을 이루었을 때, 양팔 저울에 추 6개를 모두 놓는 동안 양팔 저울이 수평을 이룬 횟수가 2일 확률을 구하는 과정의 일부이다. (단, 무게의 단위는 g이고 첫 번째 추를 놓기 전 양팔 저울이 수평을 이룬 것은 횟수에 포함하지 않는다.)

양팔 저울에 추 6개를 모두 놓은 후 수평을 이룬 확률을 p_1 이라 할 때, p_1 은 '(i) A에 무게가 1인 추 4개, B에 무게가 2인 추 2개를 놓을 확률', '(ii) A와 B에 각각 무게가 1인 추 2개와 무게가 2인 추 1개를 놓을 확률', '(iii) A에 무게가 2인 추 2개, B에 무게가 1인 추 4개를 놓을 확률'을 모두 더하면 된다.

(i)의 경우 :

확률은 $\boxed{(가)}$ 이다.

(ii)의 경우:

확률은 $\boxed{(나)}$ 이다.

(iii)의 경우:

확률은 $\left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^2$ 이다.

그러므로 $p_1 = \boxed{(가)} + \boxed{(나)} + \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^2$ 이다.

한편 양팔 저울에 추 6개를 모두 놓았더니 저울이 수평을 이루고 추 6개를 놓는 동안 수평을 이룬 횟수가 2일 확률을 p_2 라 할 때, p_2 는 ' $\boxed{(나)}$ 에서 수평을 이루는 횟수가 3일 확률을 뺀 확률'이다. 그러므로 $p_2 = \boxed{(나)} - \boxed{(다)}$ 이다.

⋮

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 a , b , c 라 할 때,

$3^6 \times \frac{ab}{c}$ 의 값은? [4점]

- ① 6 ② 12 ③ 18 ④ 24 ⑤ 30

해설 :

(i)의 경우는 홀수가 4번 연속해서 나오고, 그 다음에 짝수가 2번 연속

해서 나오면 된다. 그러므로 $a = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^4$ 이다.

(ii)의 경우는 처음부터 네 번은 짝수 두 번, 홀수 두 번 나오고, 남은 두 번은 짝수 한번, 홀수 한번이 나오면 되므로,

$b = {}_4C_2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times {}_2C_1 \left(\frac{2}{3}\right)^1 \left(\frac{1}{3}\right)^1$ 이다.

수평을 이룬 횟수가 3일 경우는 첫 번째 추와 두 번째 추를 서로 다른 곳에 놓고 세 번째 추와 네 번째 추를 서로 다른 곳에 놓고 다섯 번째 추와 여섯 번째 추를 서로 다른 곳에 놓으면 된다.

그러므로 $c = {}_2C_1 \left(\frac{2}{3}\right)^1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \times {}_2C_1 \left(\frac{2}{3}\right)^1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \times {}_2C_1 \left(\frac{2}{3}\right)^1 \left(\frac{1}{3}\right)^1$ 이다.

구한 값들을 식에 대입하면

$$3^6 \times \frac{ab}{c} = 3^6 \times \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^4 \times {}_4C_2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times {}_2C_1 \left(\frac{2}{3}\right)^1 \left(\frac{1}{3}\right)^1}{{}_2C_1 \left(\frac{2}{3}\right)^1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \times {}_2C_1 \left(\frac{2}{3}\right)^1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \times {}_2C_1 \left(\frac{2}{3}\right)^1 \left(\frac{1}{3}\right)^1} = 24 \text{이다.}$$

21. $1 \leq a \leq 10$, $1 \leq b \leq 10$ 인 두 자연수 a, b 에 대하여
함수 $f(x)$ 가

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x-1} + b & (x < 0) \\ \frac{b}{x+1} + a & (x \geq 0) \end{cases}$$

일 때, 방정식 $f(x) = (f \circ f)(x)$ 가 서로 다른 두 실근을 갖도록
하는 a, b 의 모든 순서쌍 (a, b) 의 개수는? [4점]

- ① 71 ② 73 ③ 75 ④ 77 ⑤ 79

해설 :

함수 $y = \frac{a}{x-1} + b$ 의 그래프는 함수 $y = \frac{a}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향

으로 1만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 것이다.

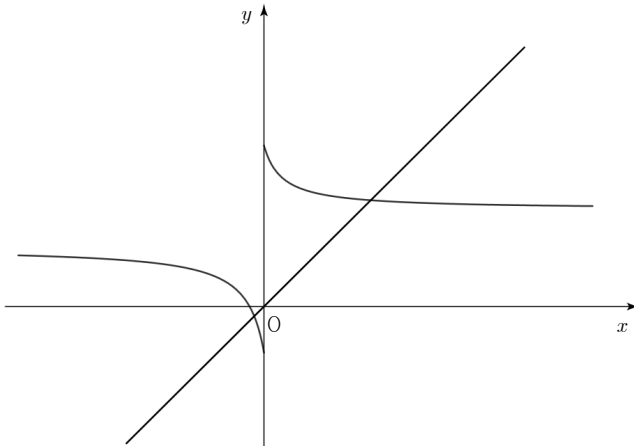
함수 $y = \frac{b}{x+1} + a$ 의 그래프는 함수 $y = \frac{b}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향

으로 -1만큼, y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 것이다.

a, b 의 대소 관계를 나누어 관찰하자.

1) $a > b$ 인 경우

두 함수 $y = f(x), y = x$ 의 그래프는 다음과 같다.



$t = f(x)$ 라 할 때, $b-a \leq t \leq b+a$ 이다.

방정식 $f(f(x)) = f(x)$ 를 풀기 위해 먼저 t 에 대한 방정식 $f(t) = t$ 를 풀면, 방정식 $f(t) = t$ 의 실근은 두 함수 $y = f(t), y = t$ 의 그래프의 교점의 t 좌표와 같다.

두 함수 $y = f(t), y = t$ 의 그래프의 교점의 개수는 2이다. 이를 각각 $(\alpha, \alpha), (\beta, \beta)$ 로 두자. ($\alpha > \beta$) 이때 α 와 β 는 모두 닫힌 구간 $[b-a, b+a]$ 에 속한다.

즉 방정식 $f(t) = t$ 의 실근은 $t = \alpha$ 또는 $t = \beta$ 이다.

이제 두 방정식 $f(x) = \alpha, f(x) = \beta$ 의 실근의 개수를 구하면,
방정식 $f(x) = \alpha$ 의 실근의 개수는 두 함수 $y = f(x), y = \alpha$ 의 그래프의 교점의 개수와 같다.

마찬가지로 방정식 $f(x) = \beta$ 의 실근의 개수는 두 함수 $y = f(x), y = \beta$ 의 그래프의 교점의 개수와 같다.

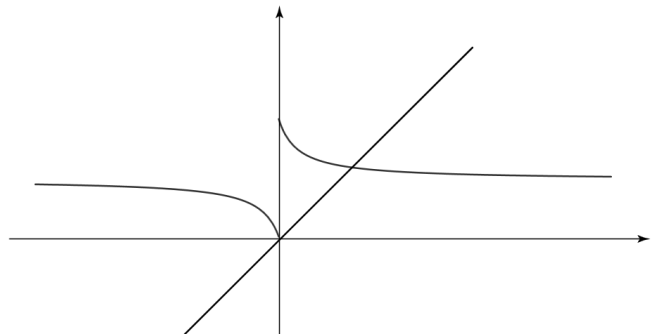
교점의 개수는 각각 1이므로, 방정식 $f(f(x)) = x$ 의 실근의 개수는 2이다.

따라서 문제의 조건을 만족시킨다.

$a > b$ 를 만족시키는 순서쌍 (a, b) 의 개수는 ${}_{10}C_2 = 45$

2) $a = b$ 인 경우

두 함수 $y = f(x), y = x$ 의 그래프는 다음과 같다.



$t = f(x)$ 로 두자. 이때 $0 < t \leq b+a$ 이다.

방정식 $f(f(x)) = f(x)$ 를 풀기 위해 먼저 t 에 대한 방정식 $f(t) = t$ 를 풀면, 방정식 $f(t) = t$ 의 실근은 두 함수 $y = f(t), y = t$ 의 그래프의 교점의 t 좌표와 같다.

두 함수 $y = f(t), y = t$ 의 그래프의 교점의 개수는 1이다. 이를 (α, α) 로 두자.

이때 α 는 구간 $(0, b+a]$ 에 속한다.

즉 방정식 $f(t) = t$ 의 실근은 $t = \alpha$ 이다.

이제 방정식 $f(x) = \alpha$ 의 실근의 개수를 구하자.

방정식 $f(x) = \alpha$ 의 실근의 개수는 두 함수 $y = f(x), y = \alpha$ 의 그래프의 교점의 개수와 같다.

교점의 개수는 1이므로, 방정식 $f(f(x)) = x$ 의 실근의 개수는 1이다.

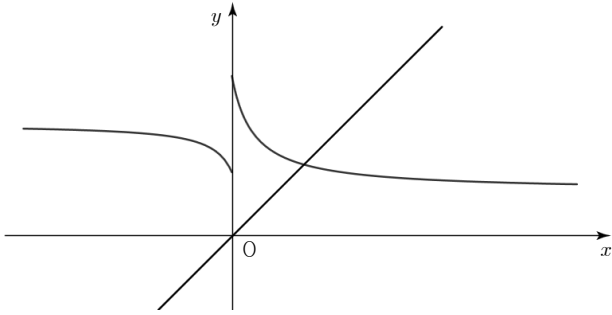
따라서 문제의 조건에 부합하지 않는다.

3) $a < b$ 인 경우

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = b-a$ 이고, 함수 $y = \frac{b}{x+1} + a$ 의 그래프의 x 축에 평행한 점근선은 $y = a$ 이다. 따라서 $b-a$ 와 a 의 대소관계에 따라 관찰해야 한다.

(1) $b-a > a$, 즉 $b > 2a$ 인 경우

두 함수 $y = f(x), y = x$ 의 그래프는 다음과 같다.



$t=f(x)$ 로 두자. 이때 $a < t \leq b+a$ 이다.

방정식 $f(f(x))=f(x)$ 를 풀기 위해 먼저 t 에 대한 방정식 $f(t)=t$ 를 풀면, 방정식 $f(t)=t$ 의 실근은 두 함수 $y=f(t)$, $y=t$ 의 그래프의 교점의 t 좌표와 같다.

두 함수 $y=f(t)$, $y=t$ 의 그래프의 교점의 개수는 1이다.

이를 (α, α) 로 두자.

이때 α 는 구간 $(a, b+a]$ 에 속한다.

즉 방정식 $f(t)=t$ 의 실근은 $t=\alpha$ 이다.

이제 방정식 $f(x)=\alpha$ 의 실근의 개수를 구하자.

방정식 $f(x)=\alpha$ 의 실근의 개수는 두 함수 $y=f(x)$, $y=\alpha$ 의 그래프의 교점의 개수와 같다.

두 함수 $y=f(x)$, $y=\alpha$ 의 그래프의 교점의 개수는 α 와 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = (b-a)$ 의 대소 관계에 따라 결정된다.

α 는 두 함수 $y = \frac{b}{x+a} + a (x \geq 0)$, $y=x$ 의 그래프의 교점의 x 좌표이므로

방정식 $\frac{b}{x+1} + a = x$ 의 실근과 같다.

이 방정식을 풀면 $x = \frac{(a-1) + \sqrt{(a+1)^2 + 4b}}{2}$ 또는

$$x = \frac{(a-1) - \sqrt{(a+1)^2 + 4b}}{2}$$

$$x \geq 0 \text{이므로 } x = \frac{(a-1) + \sqrt{(a+1)^2 + 4b}}{2},$$

$$\text{즉 } \alpha = \frac{(a-1) + \sqrt{(a+1)^2 + 4b}}{2}$$

방정식 $f(x)=\alpha$ 의 실근의 개수가 2이어야 하므로 $\alpha > \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ 이다.

$$\text{따라서 } \frac{(a-1) + \sqrt{(a+1)^2 + 4b}}{2} > b-a$$

$$\text{정리하면 } (a+1)^2 + 4b > (2b-3a+1)^2$$

이제 두 부등식 $b > 2a$, $(a+1)^2 + 4b > (2b-3a+1)^2$ 을 만족시키는 순서쌍 (a, b) 를 찾자.

부등식 $b > 2a$ 에서 $a=1, 2, 3, 4$ 만 대입해보면 된다.

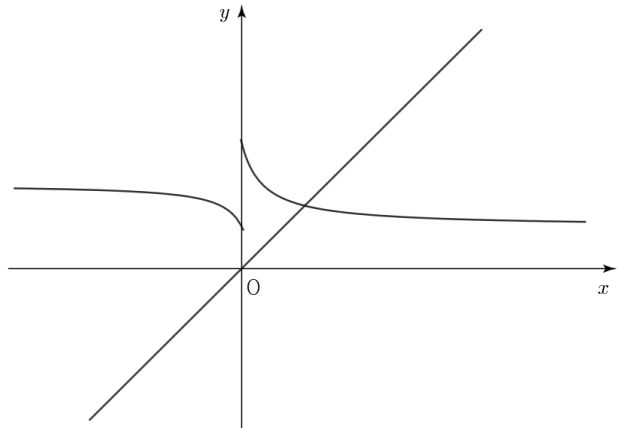
(b 는 $1 \leq b \leq 10$ 인 자연수)

대입해서 찾아보면 순서쌍 $(2, 5)$, $(3, 7)$, $(4, 9)$ 이 두 부등식을 만족시킨다.

따라서 순서쌍 (a, b) 의 개수는 3

(2) $b-a=a$, 즉 $b=2a$ 인 경우

두 함수 $y=f(x)$, $y=x$ 의 그래프는 다음과 같다.



$t=f(x)$ 로 두자. 이때 $a < t \leq b+a$ 이다.

방정식 $f(f(x))=f(x)$ 를 풀기 위해 먼저 t 에 대한 방정식 $f(t)=t$ 를 풀면, 방정식 $f(t)=t$ 의 실근은 두 함수 $y=f(t)$, $y=t$ 의 그래프의 교점의 t 좌표와 같다.

두 함수 $y=f(t)$, $y=t$ 의 그래프의 교점의 개수는 1이다.

이를 (α, α) 로 두자.

이때 α 는 구간 $(a, b+a]$ 에 속한다.

즉 방정식 $f(t)=t$ 의 실근은 $t=\alpha$ 이다.

이제 방정식 $f(x)=\alpha$ 의 실근의 개수를 구하면, 방정식 $f(x)=\alpha$ 의 실근의 개수는 두 함수 $y=f(x)$, $y=\alpha$ 의 그래프의 교점의 개수와 같다.

두 함수 $y=f(x)$, $y=\alpha$ 의 그래프의 교점의 개수는 2이다.

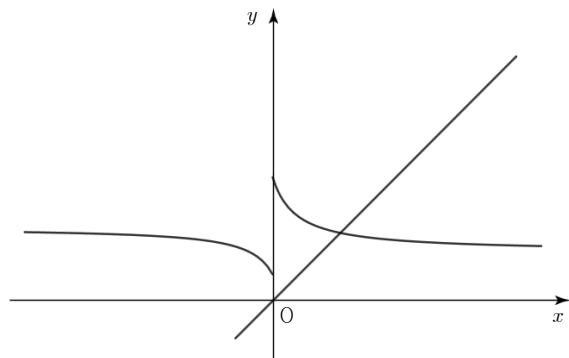
따라서 방정식 $f(x)=\alpha$ 의 실근의 개수는 2이므로 문제의 조건을 만족시킨다.

따라서 순서쌍 (a, b) 는 $(1, 2)$, $(2, 4)$, $(3, 6)$, $(4, 8)$, $(5, 10)$ 이다.

따라서 순서쌍 (a, b) 의 개수는 5

(3) $b-a < a \Leftrightarrow b < 2a$ 인 경우

두 함수 $y=f(x)$, $y=x$ 의 그래프는 다음과 같다.



$t=f(x)$ 로 두자. 이때 $0 < b-a < t \leq b+a$ 이다.

방정식 $f(f(x))=f(x)$ 를 풀기 위해 먼저 t 에 대한 방정식 $f(t)=t$ 를 풀면, 방정식 $f(t)=t$ 의 실근은 두 함수 $y=f(t)$, $y=t$ 의 그래프의 교점의 t 좌표와 같다.

두 함수 $y=f(t)$, $y=t$ 의 그래프의 교점의 개수는 1이다.

이를 (α, α) 로 두자.

이때 α 는 구간 $(b-a, b+a]$ 에 속한다.

즉 방정식 $f(t)=t$ 의 실근은 $t=\alpha$ 이다.

이제 방정식 $f(x)=\alpha$ 의 실근의 개수를 구하면, 방정식 $f(x)=\alpha$ 의 실근의 개수는 두 함수 $y=f(x)$, $y=\alpha$ 의 그래프의 교점의 개수와 같다.

두 함수 $y=f(x)$, $y=\alpha$ 의 그래프의 교점의 개수는 2이다.

따라서 방정식 $f(x)=\alpha$ 의 실근의 개수는 2이므로 문제의 조건을 만족시킨다.

$a < b$ 이고 $b < 2a$ 이므로 $a < b < 2a$ 이다.

이 부등식을 만족시키는 순서쌍 (a, b) 는 $(2, 3)$, $(3, 4)$, $(3, 5)$, $(4, 5)$, $(4, 6)$, $(4, 7)$, $(5, 6)$, $(5, 7)$, $(5, 8)$, $(5, 9)$, $(6, 7)$, $(6, 8)$, $(6, 9)$, $(6, 10)$, $(7, 8)$, $(7, 9)$, $(7, 10)$, $(8, 9)$, $(8, 10)$, $(9, 10)$

따라서 순서쌍 (a, b) 의 개수는 20

1, 2, 3에서 문제의 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b) 의 개수는 $45 + (3 + 5 + 20) = 73$

단 답 형

22. ${}_4C_3$ 의 값을 구하시오. [3점]

해설 : ${}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$

23. 함수 $f(x) = x^2(x+1)$ 에 대하여 $f'(2)$ 의 값을 구하시오. [3점]

해설 : 함수 $f(x)$ 의 도함수는 $f'(x) = 2x(x+1) + x^2$
 $\therefore f'(2) = 16$

24. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이

$$S_n = n^3 + 1$$

일 때, $a_1 + a_5$ 의 값을 구하시오. [3점]

해설 :

수열의 합과 일반항의 관계에 의하여

$$a_1 = S_1 = 2 \text{이고,}$$

$$a_n = S_n - S_{n-1} = 3n^2 - 3n + 1 \ (n \geq 2)$$

$$\therefore a_1 + a_5 = 1 + 61 = 62$$

25. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 가

$$(x-1)f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

일 때, $f(1)$ 의 값을 구하시오. [3점]

해설 :

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3) \text{이므로,}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{x-1} & (x \neq 1) \\ f(1) & (x = 1) \end{cases} \text{이다.}$$

함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$$\begin{aligned} f(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x-2)(x-3) = (-1) \times (-2) = 2 \end{aligned}$$

$$\therefore f(1) = 2$$

26. 두 곡선 $y = x^2 - 6x + 4$, $y = -x^2$ 으로 둘러싸인 부분의

넓이가 $\frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

해설 :

우선 주어진 두 곡선의 교점의 x 좌표를 구하자.

두 곡선의 방정식을 연립하면 $x=1$ 또는 $x=2$ 이다.

그러므로 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_1^2 |(x^2 - 6x + 4) - (-x^2)| dx \\ &= \int_1^2 (-2x^2 + 6x - 4) dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + 3x^2 - 4x \right]_1^2 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

27. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 의 부분집합 A 에 대하여

$$\{1, 2, 3\} \subset A, \{1, 2, 4, 5\} \subset A^c$$

을 만족시키는 모든 집합 A 의 개수를 구하시오. [4점]

해설 :

(i) 집합 A 가 1과 2를 모두 원소로 갖는 경우

이 때, 집합 A 는 3을 원소로 갖지 않아야 한다.

집합 A 의 개수는 $2^4 = 16$ 이다.

(ii) 집합 A 가 1을 원소로 갖고 2를 원소로 갖지 않는 경우

이 때, 집합 A 는 주어진 조건을 모두 만족시키므로

집합 A 의 개수는 $2^5 = 32$ 이다.

(iii) 집합 A 가 1을 원소로 갖지 않고 2를 원소로 갖는 경우

(ii)와 같으므로 집합 A 의 개수는 32이다.

(iv) 집합 A 가 1과 2를 모두 원소로 갖지 않는 경우

이 때, 집합 A 는 4 또는 5를 원소로 가져야 한다.

집합 A 의 개수는 $2^5 - 2^3 = 24$ 이다.

그러므로 주어진 조건을 모두 만족시키는 모든 집합 A 의 개수는 104개다.

28. 좌표평면 위에서 상하 또는 좌우 방향으로 한 번에 1만큼씩 움직이는 점 P 가 있다. 원점을 출발한 점 P 가 $x \geq 0, y \geq 0$ 인 영역에서 6번 움직여서 도착한 위치가 점 $A(2, 2)$ 이 되는 경우의 수를 구하시오. [4점]

해설 :

상하좌우로 한 번에 1만큼 움직이는 것을 각각 $\uparrow, \downarrow, \leftarrow, \rightarrow$ 라고 하자.

(i) $\uparrow$ 방향으로 3번, $\downarrow$ 방향으로 1번, $\rightarrow$ 방향으로 2번

움직이는 경우

$\uparrow, \uparrow, \uparrow, \downarrow, \rightarrow, \rightarrow$ 을 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므

로 같은 것이 있는 순열에 의하여 $\frac{6!}{3!2!} = 60$ 이다.

주어진 영역 밖에서 움직이는 경우를 고려하자.

(1) 첫 번째로 $\downarrow$ 방향으로 움직이는 경우

$\uparrow, \uparrow, \uparrow, \rightarrow, \rightarrow$ 을 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{5!}{3!2!} = 10 \text{이다.}$$

(2) $\rightarrow$ 방향으로 1번 움직인 후 $\downarrow$ 방향으로 움직이는 경우

$\uparrow, \uparrow, \uparrow, \rightarrow$ 을 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{4!}{3!} = 4 \text{이다.}$$

(3) $\rightarrow$ 방향으로 2번 움직인 후 $\downarrow$ 방향으로 움직이는 경우

$\uparrow, \uparrow, \uparrow$ 을 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로 1이다.

전체 경우에서 (1), (2), (3)에서 구한 경우의 수를 각각 빼면

$$60 - (10 + 4 + 1) = 45$$

(ii) $\uparrow$ 방향으로 2번, $\leftarrow$ 방향으로 1번, $\rightarrow$ 방향으로 3번

움직이는 경우

앞서 구한 경우와 움직이는 방향만 바뀌었을 뿐, 고려할 상황 자체는 같다.

따라서 경우의 수는 45이다.

$$\therefore 45 \times 2 = 90$$

29. 실수 t 에 대하여 곡선 $y = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{4}k\right)^2 + \frac{1}{6}k$ 와 직선 $y = t$ 가

서로 다른 두 점에서 만날 때, 두 점 중 x 좌표가 더 작은 점의 좌표를 $P(f(t), t)$, x 좌표가 더 큰 점의 좌표를 $Q(g(t), t)$ 라 하자. 이 곡선 위의 점 P 에서의 접선과 점 Q 에서의 접선이 각각 y 축과 만나는 점의 y 좌표의 합을 $h(t)$ 라 할 때, 두 함수 $f(t)$ 와 $h(t)$ 의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 정수 k 의 개수는 a 이다. $10a$ 의 값을 구하시오. [4점]

해설 :

곡선 위의 점 P 에서의 접선의 기울기는 $f(t) - \frac{1}{4}k$ 이므로,

이 점에서의 접선은 $y = \left\{f(t) - \frac{1}{4}k\right\}\{x - f(t)\} + t$ 이다.

그러므로 이 접선이 y 축과 만나는 점의 y 좌표는

$$-\{f(t)\}^2 + \frac{1}{4}kf(t) + t \text{이다.}$$

같은 방식으로 점 Q 에서의 접선의 기울기는 $g(t) - \frac{1}{4}k$ 이므로,

이 점에서의 접선이 y 축과 만나는 점의 y 좌표는

$$-\{g(t)\}^2 + \frac{1}{4}kg(t) + t \text{이다.}$$

그러므로 $h(t) = -[\{f(t)\}^2 + \{g(t)\}^2] + \frac{1}{4}k\{f(t) + g(t)\} + 2t$ 이다.

한편, $f(t)$ 와 $g(t)$ 는 곡선 $y = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{4}k\right)^2 + \frac{1}{6}k$ 과 직선 $y = t$ 가 만나는 서로 다른 두 점의 x 좌표이므로,

방정식 $\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{4}k\right)^2 + \frac{1}{6}k = t$ 의 서로 다른 두 실근이다.

그러므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$f(t) + g(t) = \frac{1}{2}k \text{이고, } f(t)g(t) = \frac{1}{16}k^2 + \frac{1}{3}k - 2t \text{이다.}$$

$$\begin{aligned} \{f(t)\}^2 + \{g(t)\}^2 &= \{f(t) + g(t)\}^2 - 2f(t)g(t) \\ &= \left(\frac{1}{2}k\right)^2 - 2\left(\frac{1}{16}k^2 + \frac{1}{3}k - 2t\right) \\ &= \frac{1}{8}k^2 - \frac{2}{3}k + 4t \text{이므로,} \end{aligned}$$

이 식들을 $h(t)$ 에 대입하면,

$$h(t) = -\left(\frac{1}{8}k^2 - \frac{2}{3}k + 4t\right) + \frac{1}{4}k \times \frac{1}{2}k + 2t = \frac{2}{3}k - 2t \text{이다.}$$

곡선 $y = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{4}k\right)^2 + \frac{1}{6}k$ 를 $l(t)$ 라 할 때, $l(f(t)) = t$ 이므로,

함수 $f(t)$ 는 $t < \frac{1}{4}k$ 에서 정의된, 함수 $l(t)$ 의 역함수다.

그러므로 $f(t) = \frac{1}{4}k - \sqrt{2t - \frac{1}{3}k}$ ($\because t < \frac{1}{4}k$)이다.

즉, $f(t)$ 는 꼭짓점이 $\left(\frac{1}{6}k, \frac{1}{4}k\right)$ 이고 감소하는 무리함수이다.

직선 $h(t)$ 와 곡선 $f(t)$ 가 서로 다른 두 점에서 만나려면

$h\left(\frac{1}{6}k\right) < \frac{1}{4}k$ 이고, 방정식 $f(t) = h(t)$ 가 서로 다른 두 실근을 가져

야 한다.

$h\left(\frac{1}{6}k\right) = \frac{1}{3}k$ 이므로, 부등식 $\frac{1}{3}k < \frac{1}{4}k$ 를 풀면 $k < 0$ 이다. ... ㉠

방정식 $\frac{1}{4}k - \sqrt{2t - \frac{1}{3}k} = \frac{2}{3}k - 2t$ 을 정리하면

$$2t - \frac{5}{12}k = \sqrt{2t - \frac{1}{3}k} \text{이고, 양변을 제곱하면,}$$

$$4t^2 - \frac{5}{3}kt + \frac{25}{144}k^2 = 2t - \frac{1}{3}k \text{이므로 } t \text{에 대하여 정리하면,}$$

$$4t^2 - \left(2 + \frac{5}{3}k\right)t + \frac{25}{144}k^2 + \frac{1}{3}k = 0 \text{이다.}$$

이 방정식이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로, 이 이차방정식의

판별식 $D = \left(2 + \frac{5}{3}k\right)^2 - 16\left(\frac{25}{144}k^2 + \frac{1}{3}k\right) = \frac{4}{3}k + 4 > 0$ 이어야 한다.

그러므로 $k > -3$ 이다. ... ㉡

㉠, ㉡에 의하여 k 의 범위는 $-3 < k < 0$ 이고, 이 범위에 포함되는 정수 k 의 개수는 2이다.

그러므로 $10a = 20$ 이다.

30. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$ 인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $|f(x)-f(t)|$ 가 $x=a$ 에서 미분가능하지 않은 실수 a 의 개수를 $g(t)$ 라 할 때, 함수 $g(t)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

함수 $g(t)$ 가 $t=\alpha$ 에서 불연속인 모든 정수 α 를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 $0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ (m 은 자연수)라 할 때, $\frac{1}{2} \left\{ \lim_{t \rightarrow \alpha_1^-} g(t) + \lim_{t \rightarrow \alpha_m^+} g(t) \right\} \int_0^{\alpha_m} f(x) dx = -\alpha_m \int_1^3 f'(x) dx$ 이다.

자연수 n 에 대하여 구간 $[0, \infty)$ 에서 정의된 함수 $h(x)$ 가

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{3^{n-1}} f(x-2n+2) & (2n-2 \leq x < 2n-1) \\ -\frac{1}{3^{n-1}} \{f(x-2n+1)-4\} & (2n-1 \leq x < 2n) \end{cases}$$

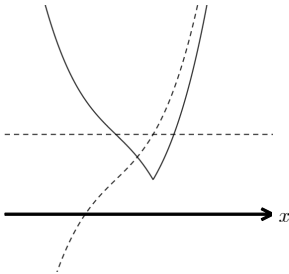
이다. 수열 $\{a_n\}$ 을 $a_n = \int_0^{2n} h(x) dx$ 라 할 때, $m+g(\alpha_1)+\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값을 구하시오. [4점]

해설 :

방정식 $f'(x)=0$ 의 실근의 개수에 따라 나누어 관찰하자.

1) 방정식 $f'(x)=0$ 의 실근의 개수가 0인 경우

함수 $y=|f(x)-f(t)|$ 의 그래프는 다음과 같다.



함수 $|f(x)-f(t)|$ 가 $x=a$ 에서 미분가능하지 않은 실수 a 의 개수는 항상 1이므로 $g(t)=1$ 이다.

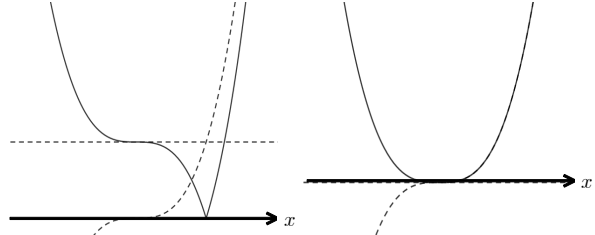
$g(t)$ 는 연속함수이므로 문제의 조건을 만족시키지 않는다.

2) 방정식 $f'(x)=0$ 의 실근의 개수가 1인 경우

함수 $y=|f(x)-f(t)|$ 의 그래프는 다음과 같다.

$t \neq 0$ 일 때

$t=0$ 일 때



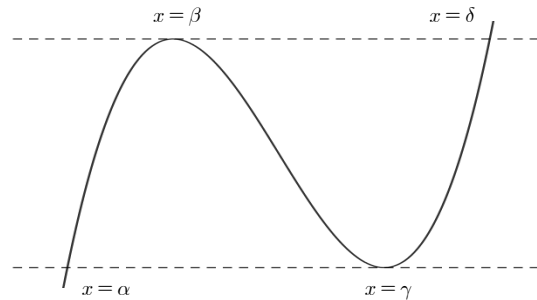
함수 $|f(x)-f(t)|$ 가 $x=a$ 에서 미분가능하지 않은 실수 a 의 개수는 $t \neq 0$ 일 때 1이고 $t=0$ 일 때 0이다.

따라서 함수 $g(t)$ 는 $g(t) = \begin{cases} 1 & (t \neq 0) \\ 0 & (t = 0) \end{cases}$ 이다.

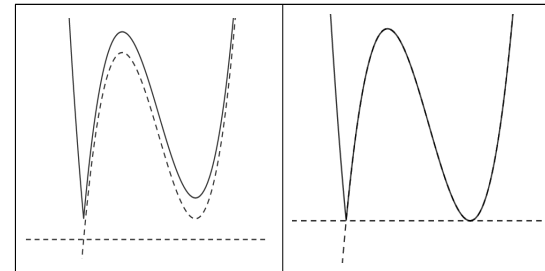
함수 $g(t)$ 에서 α_i (i 는 자연수)가 존재하지 않으므로 문제의 조건을 만족시키지 않는다.

3) 방정식 $f'(x)=0$ 의 실근의 개수가 2인 경우

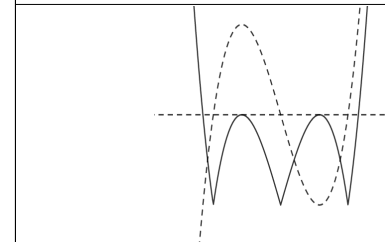
함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



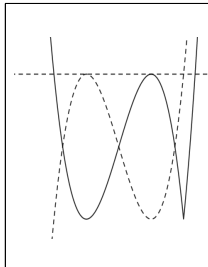
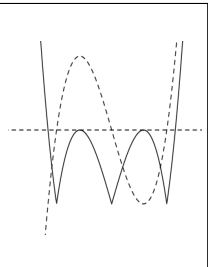
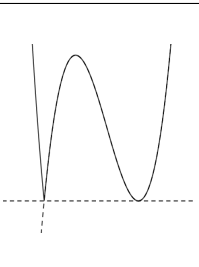
함수 $y=|f(x)-f(t)|$ 의 그래프는 다음과 같다.

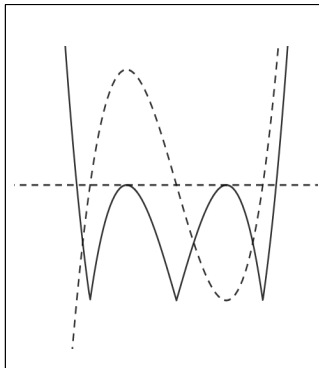
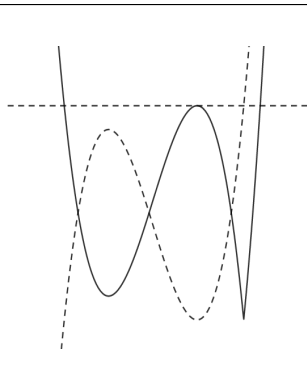


• $t \leq \alpha$ 일 때 함수 $|f(x)-f(t)|$ 가 $x=a$ 에서 미분가능하지 않은 실수 a 의 개수는 1



• $\alpha < t < \beta$ 일 때 함수 $|f(x)-f(t)|$ 가 $x=a$ 에서 미분가능하지 않은 실수 a 의 개수는 3

		
• $t=\beta$일 때, 함수 $f(x)-f(t)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 실수 a의 개수는 1	• $\beta < t < \gamma$일 때, 함수 $f(x)-f(t)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 실수 a의 개수는 3	• $t=\gamma$일 때, 함수 $f(x)-f(t)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 실수 a의 개수는 1

	
• $\gamma < t < \delta$일 때, 함수 $f(x)-f(t)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 실수 a의 개수는 3	• $t \geq \delta$일 때, 함수 $f(x)-f(t)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 실수 a의 개수는 1

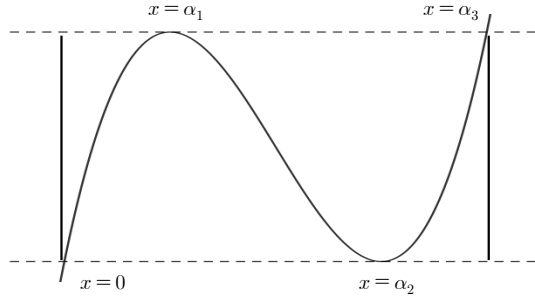
따라서 함수 $g(t)$ 는 $g(t)=\begin{cases} 1 & (t \leq \alpha, t=\beta, t=\gamma, t \geq \delta) \\ 3 & (\alpha < t < \beta, \beta < t < \gamma, \gamma < t < \delta) \end{cases}$ 이다.

따라서 $\alpha=0, \beta=\alpha_1, \gamma=\alpha_2, \delta=\alpha_3$ 이고, $m=3$ 이다.

이제 주어진 등식을 해석해보자.

$\lim_{t \rightarrow \alpha_1} g(t)=3, \lim_{t \rightarrow \alpha_m^+} g(t)=\lim_{t \rightarrow \alpha_3^+} g(t)=1$ 이므로 주어진 등식은

$$2 \int_0^{\alpha_m} f(x) dx = -\alpha_3 \int_1^3 f'(x) dx$$



위 그래프에서 좌변은 가로의 길이가 α_3 이고 세로의 길이가 $f(\alpha_1)=f(\alpha_3)$ 인 직사각형의 넓이를 의미한다. ($\therefore$ 삼차함수의 대칭성) 우변에 가로의 길이인 α_3 이 있으므로 $-\int_1^3 f'(x) dx$ 는 세로의 길이이다.

이때 $-\int_1^3 f'(x) dx = f(1) - f(3)$ 이고, 이것이 좌변의 $f(\alpha_1)=f(\alpha_3)$ 과 같기 위해서는 $f(\alpha_1)=f(\alpha_3)=f(1)$ 이고 $f(3)=0$ 이어야 한다.

즉 $\alpha_1=1, \alpha_2=3 \therefore f(x)=x(x-3)^2, \alpha_3=4$

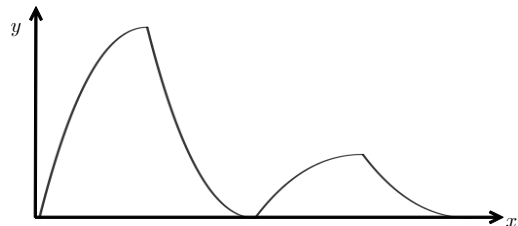
이제 함수 $h(x)$ 를 분석해보자.

$$n=1 \text{을 대입하면, } h(x)=\begin{cases} f(x) & (0 \leq x < 1) \\ -\{f(x-1)-4\} & (1 \leq x < 2) \end{cases}$$

$$n=2 \text{를 대입하면, } h(x)=\begin{cases} \frac{1}{3}f(x-2) & (2 \leq x < 3) \\ -\frac{1}{3}\{f(x-3)-4\} & (3 \leq x < 4) \end{cases}$$

즉 함수 $h(x)$ 의 그래프는 닫힌 구간 $[0, 1]$ 에서의 함수 $f(x)$ 의 그래프를 평행이동, 대칭이동 및 축소한 것이다.

위에서 알아본 함수 $h(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



닫힌 구간 $[2n-2, 2n]$ 에서 함수 $h(x)$ 의 그래프를 살펴보자.

닫힌 구간 $[2n-1, 2n]$ 에서 함수 $h(x)$ 의 그래프와 x 축 및 직선 $x=2n$ 으로 둘러싸인 영역의 넓이는 닫힌 구간 $[2n-2, 2n-1]$ 에서

함수 $h(x)$ 의 그래프와 y 축 및 직선 $y=4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ 로 둘러싸인 영역

의 넓이와 같다. 따라서 닫힌 구간 $[2n-2, 2n]$ 에서 함수 $h(x)$ 의 정적분은 가로의 길이가 1이고 세로의 길이가 $4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ 인 직사각형

의 넓이와 같다. $\therefore a_n = 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$$\therefore m+g(\alpha_1)+\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 3+1+\frac{4}{1-\frac{1}{3}}=10$$