

제 2 교시

수학 영역(가형) 해설

문항 번호	정답	문항 번호	정답	문항 번호	정답	문항 번호	정답	문항 번호	정답
1	②	7	②	13	③	19	⑤	25	10
2	③	8	③	14	②	20	④	26	90
3	①	9	④	15	⑤	21	④	27	567
4	①	10	④	16	⑤	22	24	28	27
5	③	11	②	17	④	23	7	29	8
6	⑤	12	①	18	①	24	13	30	240

1. 두 벡터 $\vec{a} = (1, -3)$, $\vec{b} = (2, 1)$ 에 대하여 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 의 값은? [2점]

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설 : $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times 2 + (-3) \times 1 = 2 - 3 = -1$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{\ln(1+4x)}$ 의 값은? [2점]

- ① $-\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{7}{4}$

해설 : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{\ln(1+4x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\ln(1+4x)}{x}} = 3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

3. 좌표공간의 두 점 $A(2, -1, a)$, $B(b, 3, 2)$ 을 2:1로 내분하는 점이 y 축 위에 있을 때, $a-b$ 의 값은? [2점]

- ① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설 :

두 점 A , B 를 2:1로 내분하는 점을 C 라 하자.

점 C 의 x 좌표와 z 좌표는 각각 $\frac{2b+2}{2+1}$, $\frac{4+a}{2+1}$ 이다.

그런데 점 C 가 y 축 위에 있으므로 점 C 의 x 좌표와 z 좌표는 모두 0이다.

즉 $b = -1$, $a = -4$ 이고, $a - b = -3$ 이다.

4. 두 사건 A 와 B 는 서로 독립이고

$$P(A) = \frac{1}{3}, P(A \cap B) = \frac{1}{15}$$

일 때, $P(A \cup B)$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{7}{15}$ ② $\frac{8}{15}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{11}{15}$

해설 :

두 사건 A 와 B 가 서로 독립이므로

$P(A) \times P(B) = P(A \cap B)$ 이고 $\frac{1}{3} \times P(B) = \frac{1}{15}$ 이다.

$$\therefore P(B) = \frac{1}{5}$$

그러므로, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{15}$$

$$= \frac{5+3-1}{15} = \frac{7}{15}$$

5. 함수 $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ 에 대하여 $f'(e^2)$ 의 값은? [3점]

- ① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

해설 :

$$f'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} \text{ 이므로, } f'(e^2) = \frac{1}{4} \text{ 이다.}$$

6. 모든 실수 x 에 대하여 부등식

$$\sin^2 x + \cos x \leq k$$

이 성립하기 위한 실수 k 의 최솟값은? [3점]

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

해설 :

함수 $y = \sin^2 x + \cos x$ 의 최댓값보다 k 가 크거나 같으면 된다.

$$\sin^2 x + \cos x = (1 - \cos^2 x) + \cos x = -\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}$$

따라서 $y = \sin^2 x + \cos x$ 는 최댓값 $\frac{5}{4}$ 을 가지므로

$$\frac{5}{4} \leq k$$

7. 포물선 $(y-2)^2 = a(x-1)$ 이 타원 $\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$ 과

한 초점을 공유하도록 하는 모든 실수 a 의 값의 합은? [3점]

- ① -20 ② -16 ③ -12 ④ -8 ⑤ -4

해설 :

포물선의 초점의 좌표는 $\left(\frac{a}{4} + 1, 2\right)$ 이다.

타원의 두 초점을 F, F'이라 할 때,

$$F(4-1, 0+2) = (3, 2), F'(-4-1, 0+2) = (-5, 2) \text{ 이다.}$$

(i) 초점 F와 공유할 경우 : $\frac{a}{4} + 1 = 3$ 이므로, $a = 8$ 이다.

(ii) 초점 F'과 공유할 경우 : $\frac{a}{4} + 1 = -5$ 이므로, $a = -24$ 이다.

$$\therefore 8 + (-24) = -16$$

8. 함수 $f(x)=x^3+k$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $g(a)>0$ 인 어떤 실수 a 에 대하여 $f(a)=-3$ 이고, $g'(a)=\frac{1}{3}$ 이다. $a+k$ 의 값은?
(단, a, k 는 상수이다.) [3점]

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

해설 :

$$g'(a)=\frac{1}{f'(g(a))}=\frac{1}{3}\text{이므로, }f'(g(a))=3\text{이다.}$$

$$f'(x)=3x^2\text{이므로, }3\{g(a)\}^2=3\text{이고, }g(a)=1\text{이다. }(\because g(a)>0)$$

$$\text{함수 }g(x)\text{는 함수 }f(x)\text{의 역함수이므로, }f(1)=a=1+k\text{이다.}$$

$$\text{그러므로 }f(a)=a^3+k=a^3+a-1=-3\text{이고, }a^3+a+2=0\text{인}$$

$$\text{실수 }a\text{는 }-1\text{이다.}$$

$$k=a-1\text{이므로, }k=-2\text{이다.}$$

$$\therefore a+k=-3$$

9. 매개변수 t 로 나타낸 곡선

$$x=\frac{1}{4}t^2-3\ln t, \quad y=\sqrt{6}t \quad (1\leq t\leq e^2)$$

의 길이는? [3점]

① $\frac{e^4+17}{4}$ ② $\frac{e^4+19}{4}$ ③ $\frac{e^4+21}{4}$
④ $\frac{e^4+23}{4}$ ⑤ $\frac{e^4+25}{4}$

해설 :

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}t-\frac{3}{t}, \quad \frac{dy}{dt}=\sqrt{6}$$

따라서 주어진 곡선의 길이는

$$\begin{aligned} & \int_1^{e^2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_1^{e^2} \sqrt{\left(\frac{1}{2}t - \frac{3}{t}\right)^2 + (\sqrt{6})^2} dt = \int_1^{e^2} \sqrt{\left(\frac{1}{2}t + \frac{3}{t}\right)^2} dt \\ &= \int_1^{e^2} \left(\frac{1}{2}t + \frac{3}{t}\right) dt \quad (\because 1\leq t\leq e^2 \Rightarrow \frac{1}{2}t + \frac{3}{t} > 0) \\ &= \left[\frac{1}{4}t^2 + 3\ln t\right]_1^{e^2} = \frac{e^4+23}{4} \end{aligned}$$

10. 어느 고등학교 3학년 학생들의 하루 수면 시간은 모평균이 m , 모표준편차가 2인 정규분포를 따른다고 한다. 이 고등학교 3학년 학생 중 n 명을 임의추출하여 얻은 모평균 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $6\leq m\leq 6.98$ 이다. 자연수 n 의 값은? (단, Z 가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $P(0\leq Z\leq 1.96)=0.475$ 로 계산한다.) [3점]

① 25 ② 36 ③ 49 ④ 64 ⑤ 81

해설 :

신뢰도 95%로 추정한 모평균 m 에 대한 신뢰구간은 표본의 크기가 n , 표본평균이 $\bar{X}$, 모표준편차가 σ 일 때,

$$\left[\bar{X}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]\text{이다.}$$

모표준편차가 2인 모집단에서 크기가 n 인 표본을 임의추출하여

구한 표본평균을 $\bar{X}$ 라 하면

신뢰도 95%로 추정한 모평균 m 에 대한 신뢰구간은

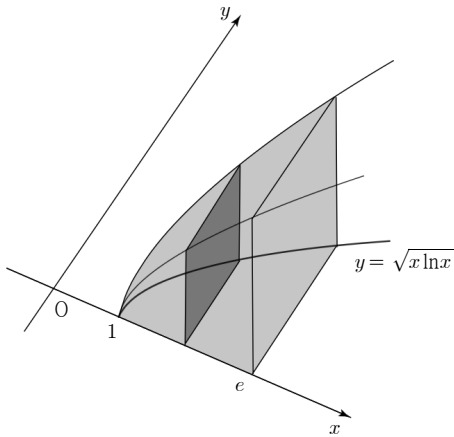
$$\left[\bar{X}-1.96\times\frac{2}{\sqrt{n}}, \bar{X}+1.96\times\frac{2}{\sqrt{n}}\right]\text{이고, }[6, 6.98]\text{와 같다.}$$

$$6.98-6=0.98=\left(\bar{X}+1.96\times\frac{2}{\sqrt{n}}\right)-\left(\bar{X}-1.96\times\frac{2}{\sqrt{n}}\right)=\frac{7.84}{\sqrt{n}}$$

따라서 $\sqrt{n}=8$, $n=64$ 이다.

11. 곡선 $y = \sqrt{x \ln x}$ ($x \geq 1$)와 x 축 및 직선 $x = e$ 로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는?
[3점]

- ① $\frac{e^2}{4}$ ② $\frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$ ③ $\frac{e^2}{4} + \frac{1}{2}$
④ $\frac{e^2}{4} + \frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{e^2}{4} + 1$



해설 :

입체도형을 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형이므로, 이 입체도형의 단면의 넓이는 $x \ln x$ 이다.

그러므로 이 입체도형의 부피는

$$\begin{aligned} \int_1^e x \ln x \, dx &= \left[\frac{1}{2} x^2 \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2} x^2 \times \frac{1}{x} \, dx \\ &= \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} \int_1^e x \, dx = \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{4} (e^2 - 1) \\ &= \frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

이다.

12. 확률변수 X 가 가지는 값이 4 이하의 자연수이고

$$n \times P(X=n) = c \quad (n=1, 2, 3, 4)$$

을 만족시킬 때, $E(25X)$ 의 값은? (단, c 는 상수이다.) [3점]

- ① 48 ② 50 ③ 52 ④ 54 ⑤ 56

해설 :

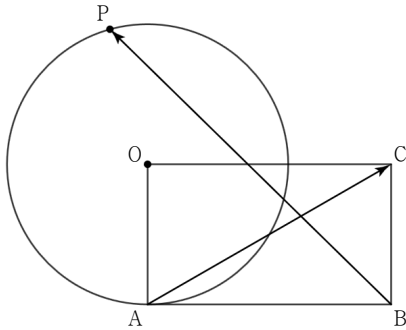
$$P(X=1)=c, \quad P(X=2)=\frac{c}{2}, \quad P(X=3)=\frac{c}{3}, \quad P(X=4)=\frac{c}{4}$$

$$\sum_{n=1}^4 P(X=n)=1 \text{ 이므로 } c=\frac{12}{25} \text{ 이다.}$$

$$\text{한편 } E(X)=\sum_{n=1}^4 n \times P(X=n)=4c=\frac{48}{25} \text{ 이므로}$$

$$E(25X)=25E(X)=48 \text{ 이다.}$$

13. 그림과 같이 가로, 세로의 길이가 $\sqrt{3}$, 1 인 직사각형 OABC가 있다. 점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1 인 원을 움직이는 점 P에 대하여 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BP}$ 의 최댓값은? [3점]



- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설 :

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{OP}$$

이때 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BO} = 2 \times 2 \times \cos \frac{2}{3}\pi = -2$ 이므로,

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{OP}$ 의 값이 가장 클 때가 최댓값이다.

$\overrightarrow{AC}$ 와 $\overrightarrow{OP}$ 가 평행한 벡터일 때 최댓값을 가지므로,

$2 \times 1 \times \cos 0 = 2$ 일 때이다.

따라서 $(-2) + 2 = 0$ 이다.

14. 숫자 1, 2, 4가 하나씩 적힌 카드가 각각 2장, n 장, 2장이 있다. 이 $(n+4)$ 장의 카드를 일렬로 나열하여 양 끝에 놓인 카드에 적힌 숫자의 곱이 4일 확률이 $\frac{5}{14}$ 일 때, n 의 값은? [4점]

- ① 2 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

해설 :

양 끝에 놓인 카드에 적힌 숫자의 곱이 4일 경우는

- i) 양 끝에 숫자 1이 적힌 카드와 숫자 4가 적힌 카드가 놓이는 경우와
ii) 양 끝에 숫자 2가 적힌 카드가 놓이는 경우가 있다.

그러므로 i)의 확률은 $\frac{{}_2C_1 \times {}_2C_1 \times 2! \times (n+2)!}{(n+4)!}$ 이고,

ii)의 확률은 $\frac{{}_n C_2 \times 2! \times (n+2)!}{(n+4)!}$ 이다.

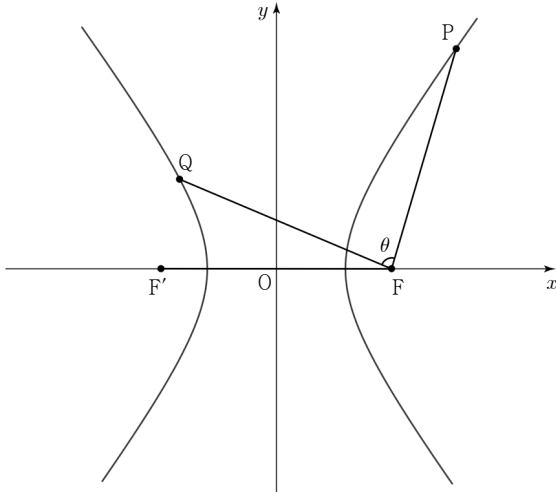
$$\frac{{}_2C_1 \times {}_2C_1 \times 2! \times (n+2)!}{(n+4)!} + \frac{{}_n C_2 \times 2! \times (n+2)!}{(n+4)!}$$

$$= \frac{8 + n(n-1)}{(n+4)(n+3)} = \frac{5}{14} \text{ 이고, 방정식을 정리하면}$$

$$9n^2 - 49n + 52 = (n-4)(9n-13) = 0 \text{ 이므로, 자연수 } n \text{ 은 } 4 \text{ 이다.}$$

$$\therefore n = 4$$

15. 그림과 같이 두 초점이 F, F'인 쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 위의 두 점 P, Q가 각각 제 1사분면, 제 2사분면에 있다. $\overline{PF} = \overline{QF} = \overline{FF'}$ 이고 $\angle PFQ = \theta$ 일 때, $\cos \frac{\theta}{2}$ 의 값은? (단, $\overline{QF'} < \overline{PF'}$) [4점]



- ① $\frac{2+\sqrt{6}}{25}$ ② $\frac{2+3\sqrt{6}}{25}$ ③ $\frac{2+6\sqrt{6}}{25}$
 ④ $\frac{4+3\sqrt{6}}{25}$ ⑤ $\frac{4+6\sqrt{6}}{25}$

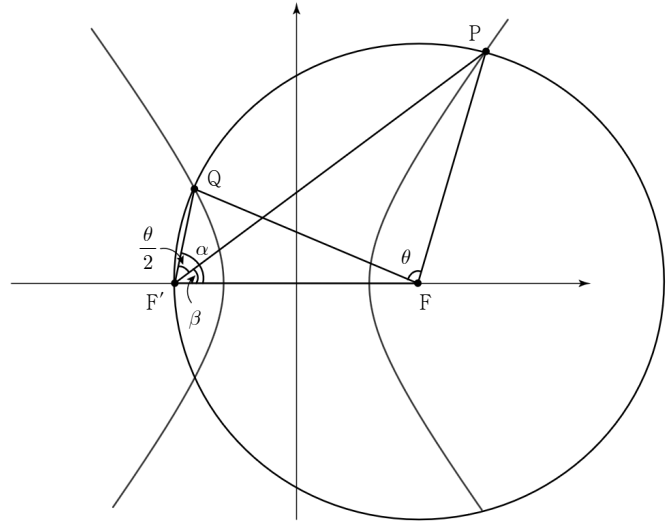
해설 :

$$\overline{PF} = \overline{QF} = \overline{FF'} = 10 \text{ 이므로}$$

$$\text{쌍곡선의 성질에 의하여 } \overline{PF'} = 16, \overline{QF'} = 4$$

점 F를 중심으로, $\overline{FF'}$ 의 길이를 반지름으로 하는 원에서

$$\angle PF'Q = \frac{\theta}{2} \quad (\because \text{원주각} = \frac{1}{2} \text{ 중심각}) \text{이다.}$$



$\angle FF'Q = \alpha$, $\angle FF'P = \beta$ 라 할 때,

$$\cos \frac{\theta}{2} = \cos(\alpha - \beta)$$

$$= \cos \alpha \times \cos \beta + \sin \alpha \times \sin \beta$$

$$= \frac{1}{5} \times \frac{4}{5} + \frac{2\sqrt{6}}{5} \times \frac{3}{5}$$

$$= \frac{4+6\sqrt{6}}{25}$$

16. 함수 $f(x) = \log_a x$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x-1} & (x \neq 1) \\ \frac{1}{\ln a} & (x = 1) \end{cases}$$

라 하자. 중심이 $(t, g(t))$ 이고 y 축에 접하는 원과 x 축과의 교점의 개수가 c 가 되도록 하는 t 의 범위는 $t > 1$ 이다. $a+c$ 의 값은?
(단, $a > 1$ 이고, a 와 c 는 상수이다.) [4점]

- ① 1 ② $e-1$ ③ e ④ $e+1$ ⑤ $e+2$

해설 :

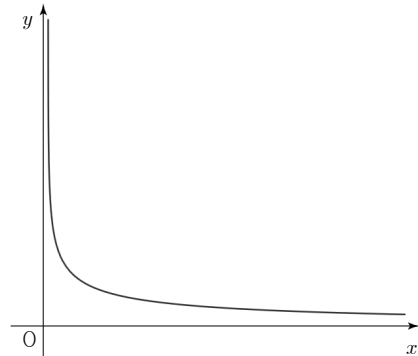
함수 $\frac{f(x)}{x-1}$ 는 두 점 $(1, 0)$, $(x, f(x))$ 사이의 평균변화율이다.

따라서 함수 $\frac{f(x)}{x-1}$ 는 감소함수이다.

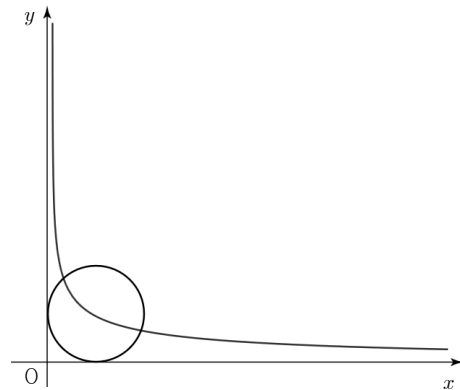
$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = f'(1) = \frac{1}{\ln a} = g(1)$ 이므로

함수 $g(x)$ 는 양의 실수 전체의 집합에서 연속함수이다.

함수 $g(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



중심이 $(t, g(t))$ 이고 y 축에 접하는 원이 x 축에도 접할 때를 기준으로 관찰하자.



위의 그림에서 중심이 $(t, g(t))$ 이고 y 축에 접하는 원이 x 축에도

접하기 위해서는 $1 = \frac{1}{\ln a}$ 즉 $a = e$ 임을 알 수 있다.

이때 t 의 값이 1보다 커지면 중심이 $(t, g(t))$ 이고 y 축에 접하는 원과 x 축과의 교점의 개수는 2가 된다.

$\therefore c = 2$

$\therefore a + c = e + 2$

17. 무게가 1인 추 4개, 무게가 2인 추 2개와 양팔 저울이 있다.

왼쪽 저울을 A, 오른쪽 저울을 B라 할 때, 1, 2, 3의 숫자가 하나씩 적혀 있는 3장의 카드를 사용하여 다음의 시행을 한다.

3장의 카드 중에서 임의로 1장의 카드를 선택할 때, 선택한 카드에 적힌 수가 홀수이면 양팔 저울에 올리지 않은 추 중 무게가 적은 추 1개를 A에 놓고, 짝수이면 양팔 저울에 올리지 않은 추 중 무게가 적은 추 1개를 B에 놓는다.

위의 시행을 반복하여 양팔 저울에 추 6개를 모두 놓았더니 양팔 저울이 수평을 이루었을 때, 양팔 저울에 추 6개를 모두 놓는 동안 양팔 저울이 수평을 이룬 횟수가 2일 확률을 구하는 과정 중 일부이다. (단, 무게의 단위는 g이고 첫 번째 추를 놓기 전 양팔 저울이 수평을 이룬 것은 횟수에 포함하지 않는다.)

양팔 저울에 추 6개를 모두 놓은 후 수평을 이룬 확률을 p_1 이라 할 때, p_1 은 '(i) A에 무게가 1인 추 4개, B에 무게가 2인 추 2개를 놓을 확률', '(ii) A와 B에 각각 무게가 1인 추 2개와 무게가 2인 추 1개를 놓을 확률', '(iii) A에 무게가 2인 추 2개, B에 무게가 1인 추 4개를 놓을 확률'을 모두 더하면 된다.

(i)의 경우 :

확률은 $\boxed{\text{가}}$ 이다.

(ii)의 경우:

확률은 $\boxed{\text{나}}$ 이다.

(iii)의 경우:

확률은 $\left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^2$ 이다.

그러므로 $p_1 = \boxed{\text{가}} + \boxed{\text{나}} + \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^2$ 이다.

한편 양팔 저울에 추 6개를 모두 놓았더니 저울이 수평을 이루고 추 6개를 놓는 동안 수평을 이룬 횟수가 2일 확률을 p_2 라 할 때, p_2 는 ' $\boxed{\text{나}}$ '에서 수평을 이루는 횟수가 3일 확률을 뺀 확률'이다. 그러므로 $p_2 = \boxed{\text{나}} - \boxed{\text{다}}$ 이다.

⋮

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 a , b , c 라 할 때,

$3^6 \times \frac{ab}{c}$ 의 값은? [4점]

- ① 6 ② 12 ③ 18 ④ 24 ⑤ 30

해설 :

(i)의 경우는 홀수가 4번 연속해서 나오고, 그 다음에 짝수가 2번 연속

해서 나오면 된다. 그러므로 $a = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^4$ 이다.

(ii)의 경우는 처음부터 네 번은 짝수 두 번, 홀수 두 번 나오고, 남은 두 번은 짝수 한번, 홀수 한번이 나오면 되므로,

$b = {}_4C_2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times {}_2C_1 \left(\frac{2}{3}\right)^1 \left(\frac{1}{3}\right)^1$ 이다.

수평을 이룬 횟수가 3일 경우는 첫 번째 추와 두 번째 추를 서로 다른 곳에 놓고 세 번째 추와 네 번째 추를 서로 다른 곳에 놓고 다섯 번째 추와 여섯 번째 추를 서로 다른 곳에 놓으면 된다.

그러므로 $c = {}_2C_1 \left(\frac{2}{3}\right)^1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \times {}_2C_1 \left(\frac{2}{3}\right)^1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \times {}_2C_1 \left(\frac{2}{3}\right)^1 \left(\frac{1}{3}\right)^1$ 이다.

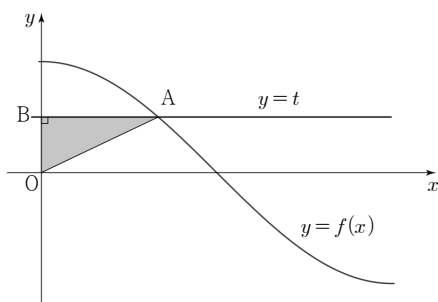
구한 값들을 식에 대입하면

$$3^6 \times \frac{ab}{c} = 3^6 \times \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^4 \times {}_4C_2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times {}_2C_1 \left(\frac{2}{3}\right)^1 \left(\frac{1}{3}\right)^1}{{}_2C_1 \left(\frac{2}{3}\right)^1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \times {}_2C_1 \left(\frac{2}{3}\right)^1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \times {}_2C_1 \left(\frac{2}{3}\right)^1 \left(\frac{1}{3}\right)^1} = 24 \text{ 이다.}$$

18. 닫힌 구간 $[0, \pi]$ 에서 정의된 함수 $f(x) = \cos x$ 와 $-1 \leq t \leq 1$ 인 실수 t 에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=t$ 가 만나는 점을 A, 점 A에서 y 축에 내린 수선의 발을 B라 하자. 삼각형 OAB의 넓이를 $g(t)$ 라 할 때, $\int_{-1}^1 tg(t)dt$ 의 값은? (단, O는 원점이다.)

[4점]

- ① $-\frac{\pi}{6} + \frac{2}{9}$ ② $-\frac{\pi}{6} + \frac{4}{9}$ ③ $-\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}$
 ④ $-\frac{\pi}{3} + \frac{2}{9}$ ⑤ $-\frac{\pi}{3} + \frac{4}{9}$



해설 :

두 점 A, B의 좌표는 각각 $A(f^{-1}(t), t)$, $B(0, t)$ 이다.

그러므로 $g(t) = \frac{1}{2} |t| f^{-1}(t)$ 이다.

$$\therefore \int_{-1}^1 tg(t)dt = \int_{-1}^1 t \times \frac{1}{2} |t| f^{-1}(t)dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^0 (-t^2) f^{-1}(t)dt + \frac{1}{2} \int_0^1 t^2 f^{-1}(t)dt$$

$$s = f^{-1}(t) \text{라 할 때, } ds = \frac{1}{f'(f^{-1}(t))} dt = \frac{1}{f'(s)} dt, f(s) = t$$

$$t = -1 \text{ 일 때 } s = f^{-1}(-1) = \pi, t = 0 \text{ 일 때 } s = f^{-1}(0) = \frac{\pi}{2},$$

$$t = 1 \text{ 일 때 } s = f^{-1}(1) = 0$$

그러므로

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^0 (-t^2) f^{-1}(t)dt + \frac{1}{2} \int_0^1 t^2 f^{-1}(t)dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} -\{f(s)\}^2 s f'(s)ds + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \{f(s)\}^2 s f'(s)ds$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} s \{f(s)\}^2 f'(s)ds - \int_0^{\frac{\pi}{2}} s \{f(s)\}^2 f'(s)ds \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \left\{ [s \{f(s)\}^3]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \{f(s)\}^3 ds \right\}$$

$$- \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \left\{ [s \{f(s)\}^3]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{f(s)\}^3 ds \right\}$$

$$= \frac{1}{6} \left\{ -\pi - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^3 s ds \right\} - \frac{1}{6} \left\{ - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 s ds \right\}$$

$$= \frac{1}{6} \left\{ -\pi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos s (1 - \sin^2 s) ds - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos s (1 - \sin^2 s) ds \right\}$$

$$= \frac{1}{6} \left\{ -\pi + \frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3} \right) \right\} = -\frac{\pi}{6} + \frac{2}{9}$$

19. 좌표평면에 반지름의 길이가 1이고 중심이 (2, 2)인 원 위를 움직이는 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 직선 PQ는 원의 중심을 지난다.

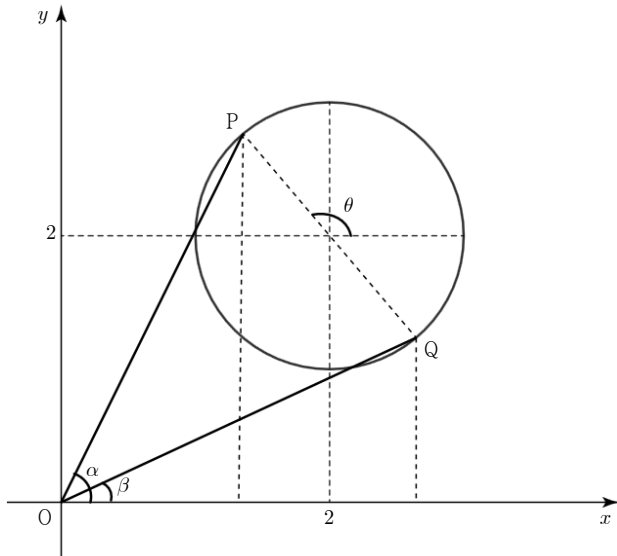
(나) 직선 OP와 직선 OQ가 x 축과 이루는 각의 크기를

각각 α, β 라 할 때, $\tan(\alpha - \beta) = \frac{4}{7}$ 이다.

$\tan(\alpha + \beta)$ 의 최댓값은? [4점]

- ① 0 ② 2 ③ 4 ④ 6 ⑤ 8

해설 :



반지름의 길이가 1이고 원의 중심이 (2, 2)인 원 C 는 반지름의 길이가 1이고 원의 중심이 원점인 원 C' 을 x 축 방향으로 2만큼, y 축 방향으로 2만큼 평행이동시킨 것이다. 그러므로 원 C 위의 두 점 P, Q는 원 C' 위의 두 점 P', Q' 을 x 축 방향으로 2만큼, y 축 방향으로 2만큼 평행이동시킨 것이다. 원 C' 위의 점 P' 를 $(\cos\theta, \sin\theta)$ ($0 \leq \theta < 2\pi$)라 할 때, 조건 (가)에 의하여 점 Q' 는 $(-\cos\theta, -\sin\theta)$ 이고, 점 P는 $(2 + \cos\theta, 2 + \sin\theta)$, 점 Q는 $(2 - \cos\theta, 2 - \sin\theta)$ 이다.

그러므로 $\tan\alpha = \frac{2 + \sin\theta}{2 + \cos\theta}$ 이고, $\tan\beta = \frac{2 - \sin\theta}{2 - \cos\theta}$ 이다.

$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$ 이므로, 위 식을 대입하면,

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\frac{2 + \sin\theta}{2 + \cos\theta} - \frac{2 - \sin\theta}{2 - \cos\theta}}{1 + \frac{2 + \sin\theta}{2 + \cos\theta} \times \frac{2 - \sin\theta}{2 - \cos\theta}}$$

$$= \frac{(2 + \sin\theta)(2 - \cos\theta) - (2 - \sin\theta)(2 + \cos\theta)}{(2 + \cos\theta)(2 - \cos\theta) + (2 + \sin\theta)(2 - \sin\theta)}$$

$$= \frac{4(\sin\theta - \cos\theta)}{8 - (\cos^2\theta + \sin^2\theta)} = \frac{4(\sin\theta - \cos\theta)}{7} \text{ 이므로,}$$

$\sin\theta - \cos\theta = 1$, 즉, $\sin\theta = \cos\theta + 1$ 일 때, 조건 (나)를 만족시킨다.

$0 \leq \theta < 2\pi$ 에서 $\sin\theta = \cos\theta + 1$ 인 θ 는 $\frac{\pi}{2}$ 또는 π 이다.

(i) $\theta = \frac{\pi}{2}$ 일 때, $\tan\alpha = \frac{3}{2}$ 이고 $\tan\beta = \frac{1}{2}$ 이다.

$$\text{그러므로 } \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{3}{2} \times \frac{1}{2}} = 8 \text{ 이다.}$$

(ii) $\theta = \pi$ 일 때, $\tan\alpha = 2$ 이고 $\tan\beta = \frac{2}{3}$ 이다.

$$\text{그러므로 } \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{\frac{2}{3} + 2}{1 - \frac{2}{3} \times 2} = -8 \text{ 이다.}$$

$\therefore \tan(\alpha + \beta)$ 의 최댓값은 8이다.

20. 좌표공간에 두 점 $A(1, 0, 1)$, $B(0, 1, 0)$ 과 다음 조건을 만족시키는 두 직선 l_1 , l_2 가 있다.

- (가) l_1 은 점 A 를 지나고, 선분 OA 와 수직이다.
 (나) l_2 은 점 B 를 지나고, 선분 AB 와 수직이다.
 (다) l_1 과 l_2 는 z 좌표가 양수인 점 P 에서 교점을 갖는다.

평면 PAB 와 평면 OAB 가 이루는 각이 $\frac{\pi}{6}$ 일 때, 선분 BP 의 평면 $x+2y+2z=0$ 위로의 정사영의 길이는? (단, O 는 원점이다.)

[4점]

- ① $\frac{\sqrt{2}}{6}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ④ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ⑤ $\sqrt{2}$

해설 :

$P(a, b, c)$ 라 하자.

두 점 A, P 는 직선 l_1 위에 있는 점이고, l_1 은 선분 OA 와 수직이다.

l_1 의 방향 벡터는 $(a-1, b, c-1)$ 이고, $\overrightarrow{OA} = (1, 0, 1)$ 이므로,
 $(a-1, b, c-1) \cdot (1, 0, 1) = a-1+c-1=0$ 이다.

그러므로, $a+c=2$ 이다.

두 점 B, P 는 직선 l_2 위에 있는 점이고, l_2 은 선분 AB 와 수직이다.

l_2 의 방향 벡터는 $(a, b-1, c)$ 이고, $\overrightarrow{AB} = (-1, 1, -1)$ 이므로,
 $(a, b-1, c) \cdot (-1, 1, -1) = -a+b-1-c=0$ 이다.

그러므로, $a-b+c=-1$ 이다.

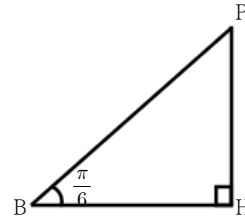
$a+c=2$ 이므로, $b=3$ 이고, 점 P 는 $P(a, 3, c)$ 이다.

점 P 에서 평면 OAB 에 내린 수선의 발을 H 라 할 때,
 평면 PAB 와 평면 OAB 가 이루는 각은 이면각의 정의에 의하여 $\angle PBH$ 이다.

평면 OAB 는 세 점 A, O, B 를 지나는 평면이므로, $x-z=0$ 이다.

$\overline{PB} = \sqrt{a^2+4+c^2}$ 이고, $\overline{PH}$ 는 점 P 와 평면 OAB 사이의

거리이므로 $\frac{|a-c|}{\sqrt{2}}$ 이다.



$\angle PBH = \frac{\pi}{6}$ 이므로, $\frac{\overline{PB}}{2} = \overline{PH}$ 이고, $\frac{\sqrt{a^2+4+c^2}}{2} = \frac{|a-c|}{\sqrt{2}}$ 이다.

식을 정리하면, $(a-c)^2 = 4$ 이므로 $a-c=2$ 또는 $a-c=-2$ 이다.

i) $a-c=2$ 일 때, $a+c=2$ 이므로, $a=2$ 이고 $c=0$ 이다.

조건 (다)에 의하여 $c>0$ 이므로 모순이다.

ii) $a-c=-2$ 일 때, $a+c=2$ 이므로, $a=0$, $c=2$ 이다.

그러므로, 점 P 는 $P(0, 3, 2)$ 이다.

$\overline{BP} = 2\sqrt{2}$ 이고, $\overrightarrow{BP} = (0, 2, 2)$ 이므로 $\overrightarrow{BP}$ 가 평면 $x+2y+2z=0$ 의 법선벡터 $(1, 2, 2)$ 와 이루는 예각을 θ 라 할 때,

$\sin\theta = \frac{8}{6\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ 이다.

그러므로 $\cos\theta = \frac{1}{3}$ 이고, 선분 BP 의 평면 $x+2y+2z=0$ 위로의

정사영의 길이는 $2\sqrt{2}\cos\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ 이다.

21. 함수 $f(x)$ 가

$$|x| < 1 \text{ 일 때, } f\left(-\sin \frac{\pi}{2}x\right) = \frac{4x \ln 3}{4x^2 + 1}$$

$$|x| \geq 1 \text{ 일 때, } f(x) + \ln 3 = \ln(3x^2 + 4x + 2) + \frac{x}{|x|} \ln(x^2)$$

이고, 함수 $g(x)$ 는

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(e^{x+1} - x) & (x < a) \\ -\frac{1}{x+b} + 1 & (a \leq x \leq c) \\ -e^{x+2c} + d & (x > c) \end{cases}$$

일 때, 함수 $h(x) = (f \circ g)(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이고, 함수 $\{h(x)\}^2$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

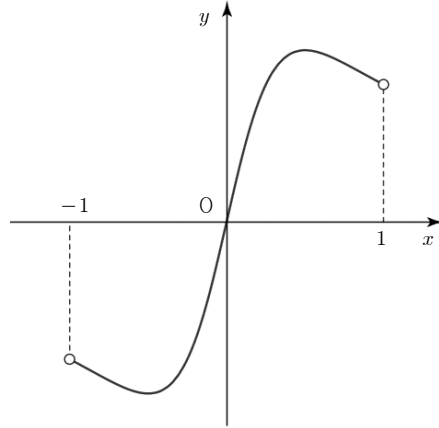
$a+b+c+d+h(-1)$ 의 값은? [4점]

- ① $\ln 3$ ② $1 + \ln 3$ ③ $2 + \ln 3$ ④ $e + \ln 3$ ⑤ $2e + \ln 3$

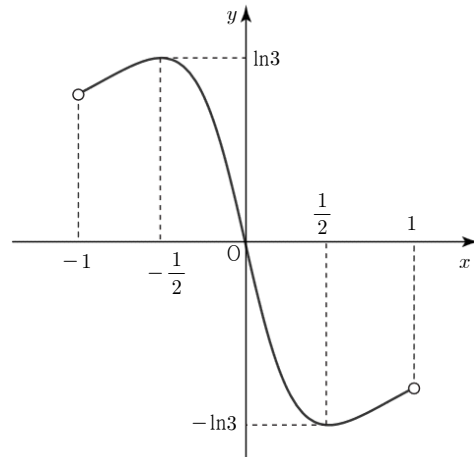
해설 :

x 가 -1 에서 1 로 증가할 때, $-\sin \frac{\pi}{2}x$ 는 1 에서 -1 로 감소하고,

구간 $(-1, 1)$ 에서 곡선 $y = \frac{4x \ln 3}{4x^2 + 1}$ 는



이므로, $|x| < 1$ 일 때, 함수 $f(x)$ 의 개형은

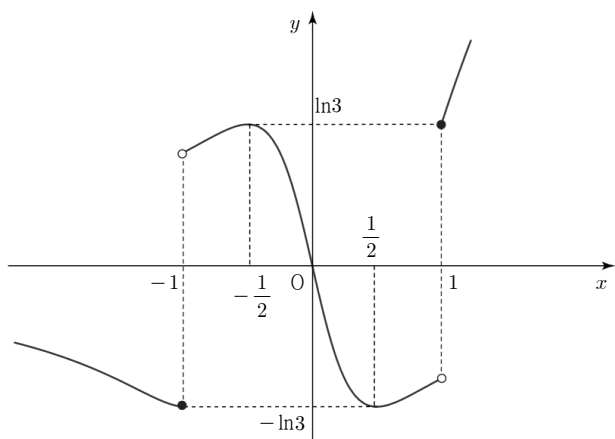


이다.

$x \geq 1$ 일 때, $f(x) = \ln(3x^2 + 4x + 2) + \ln(x^2) - \ln 3$ 이고,

$x \leq -1$ 일 때, $f(x) = \ln(3x^2 + 4x + 2) - \ln(x^2) - \ln 3$ 이므로,

함수 $f(x)$ 의 개형을 모두 그리면,



이다.

함수 $\frac{1}{2}(e^{x+1}-x)$ 는 $x=-1$ 에서 최솟값 1을 갖는다.

함수 $f \circ g$ 가 실수 전체의 집합에서 연속하려면,

(i) $\lim_{x \rightarrow a^-} f \circ g = \lim_{x \rightarrow a^+} f \circ g$ 를 만족시켜야 한다.

(1) $\lim_{x \rightarrow a^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x)$ 일 때,

함수 $\frac{1}{2}(e^{x+1}-x)$ 는 $x < a$ 에서 감소하고, 함수 $-\frac{1}{x+b}+1$ 은

$x < -b$ 에서 증가하고, 함수 $-e^{x+2c}+d$ 는 감소하므로, $g(x)$ 의
치역을 정의역으로 하는 합성함수 $f \circ g$ 는 반드시 불연속한 점이
생긴다.

(2) $\lim_{x \rightarrow a^-} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} g(x)$ 일 때,

$\lim_{x \rightarrow a^-} g(x) \geq 1$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow a^-} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} g(x)$ 와

$\lim_{x \rightarrow a^-} f \circ g = \lim_{x \rightarrow a^+} f \circ g$ 를 동시에 만족시키기 위해서

$\lim_{x \rightarrow a^-} g(x) = 1$ 이고 $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = -\frac{1}{2}$ 가 되어

$\lim_{x \rightarrow a^-} f \circ g = \lim_{x \rightarrow a^+} f \circ g = \ln 3$ 이면 된다.

$\lim_{x \rightarrow a^-} g(x) = 1$ 인 실수 a 는 -1 이고, $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = -\frac{1}{2}$ 를 만족시키는

실수 b 는 $\frac{5}{3}$ 이다.

(ii) $\lim_{x \rightarrow c^-} f \circ g = \lim_{x \rightarrow c^+} f \circ g$ 를 만족시켜야 한다.

(1) $\lim_{x \rightarrow c^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} g(x)$ 일 때,

유리함수 $-\frac{1}{x+\frac{5}{3}}+1$ 은 $x \geq -1$ 에서 증가하는 함수이고,

$x=-1$ 일 때, 함수값은 $-\frac{1}{2}$ 이므로, $\lim_{x \rightarrow c^-} g(x) > -\frac{1}{2}$ 이다.

함수 $-e^{x+2c}+d$ 는 실수 전체의 집합에서 감소하는 함수이므로,

$\lim_{x \rightarrow c^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} g(x)$ 일 때, 반드시 함수 $-e^{x+2c}+d = -1$ 이 되는

x 가 $x > c$ 에서 존재하고 불연속이다.

(2) $\lim_{x \rightarrow c^-} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow c^+} g(x)$

$x \leq -1$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x \rightarrow -\infty$ 일 때, 0보다 작은 값에서 0으로
수렴한다.

그러므로 $\lim_{x \rightarrow c^-} f \circ g = \lim_{x \rightarrow c^+} f \circ g$ 를 만족시키기 위하여,

$\lim_{x \rightarrow c^-} g(x) \geq 0$ 이고, $\lim_{x \rightarrow c^+} g(x) \leq -1$ 이면서

$\lim_{x \rightarrow c^-} f \circ g = \lim_{x \rightarrow c^+} f \circ g$ 을 만족시키면 된다.

함수 $\{h(x)\}^2$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하기 위해서

함수 $\{h(x)\}^2$ 의 도함수가 실수 전체의 집합에서 연속이면 된다.

$x < a$ 일 때와 $a < x < c$, $x > c$ 일 때는 함수 $\{h(x)\}^2$ 가

미분가능하다. 그러므로 $x=a$ 일 때와 $x=c$ 일 때 함수 $\{h(x)\}^2$ 가

실수 전체의 집합에서 연속임을 보이면 충분하다.

함수 $\{h(x)\}^2$ 의 도함수는 $2h(x)h'(x)$ 이다.

$h(x) = (f \circ g)(x)$ 이므로, $h'(x) = f'(g(x))g'(x)$ 이다.

$\lim_{x \rightarrow -1^-} g'(x) = 0$ 이므로, $\lim_{x \rightarrow -1^-} h(x)h'(x) = 0$ 이다.

$\lim_{x \rightarrow -1^+} f'(g(x)) = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} f'(x) = 0$ 이므로, $\lim_{x \rightarrow -1^+} h(x)h'(x) = 0$ 이다.

그러므로 $x=-1$ 에서 도함수 $2h(x)h'(x)$ 가 연속이고,

함수 $\{h(x)\}^2$ 는 $x=-1$ 에서 미분가능하다.

$\lim_{x \rightarrow c^-} h(x) < 0$, $\lim_{x \rightarrow c^-} f'(g(x)) \leq 0$, $\lim_{x \rightarrow c^-} g'(x) > 0$ 이므로,

$\lim_{x \rightarrow c^-} h(x)h'(x) = \lim_{x \rightarrow c^-} h(x)f'(g(x))g'(x) \geq 0$ 이다.

$\lim_{x \rightarrow c^+} h(x) < 0$, $\lim_{x \rightarrow c^+} f'(g(x)) \leq 0$, $\lim_{x \rightarrow c^+} g'(x) < 0$ 이므로,

$\lim_{x \rightarrow c^+} h(x)h'(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} h(x)f'(g(x))g'(x) \leq 0$ 이다.

함수 $2h(x)h'(x)$ 가 연속하기 위한 충분조건은

$$\lim_{x \rightarrow c^-} h(x)h'(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} h(x)h'(x) \text{이고,}$$

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow c^-} h(x)h'(x), \lim_{x \rightarrow c^+} h(x)h'(x) \leq 0 \text{이면,}$$

$$\lim_{x \rightarrow c^-} h(x)h'(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} h(x)h'(x) = 0 \text{이면 된다.}$$

함수 $h(x)$ 는 $x=c$ 에서 음수이고, 유리함수 $-\frac{1}{x+\frac{5}{3}}+1$ 와

함수 $-e^{x+2c}+d$ 는 실수 전체의 집합에서 0이 될 수 없으므로,

$x=c$ 에서의 $f'(g(x))$ 의 좌극한과 우극한이 모두 0이어야 한다.

위의 조건을 모두 만족시키기 위하여

$$\lim_{x \rightarrow c^-} g(x) = \frac{1}{2}, \lim_{x \rightarrow c^+} g(x) = -1 \text{ 이 되어 } \lim_{x \rightarrow c} h(x) = -\ln 3$$

이면 된다.

$$\lim_{x \rightarrow c^-} g(x) = \frac{1}{2} \text{ 인 실수 } c \text{ 는 } \frac{1}{3} \text{ 이고,}$$

$$\lim_{x \rightarrow c^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}^+} \left\{ -e^{x+\frac{2}{3}} + d \right\} = -1 \text{ 인 실수 } d = e - 1 \text{ 이다.}$$

$$h(-1) = (f \circ g)(-1) = f(g(-1)) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \ln 3 \text{ 이므로,}$$

$$a+b+c+d+h(-1) = -1 + \frac{5}{3} + \frac{1}{3} + e - 1 + \ln 3 = e + \ln 3 \text{ 이다.}$$

단 답 형

22. ${}_4P_4$ 의 값을 구하시오. [3점]

$$\text{해설 : } {}_4P_4 = 4! = 24$$

23. 함수 $y = 4^{2x+3} + 2^{-4x-2}$ 는 $x=a$ 에서 최솟값 b 를 가진다.

$a+b$ 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 상수이다.) [3점]

해설 :

$$\text{함수 } y = 4^{2x+3} + 2^{-4x-2} = 64 \times 16^x + \frac{1}{4 \times 16^x} \text{ 이고,}$$

모든 실수 x 에 대하여 $16^x > 0$ 이므로 산술 기하 평균에 의하여

$$64 \times 16^x + \frac{1}{4 \times 16^x} \geq 2\sqrt{16} = 8 \text{ 이다.}$$

최솟값 8을 가지는 x 는 $64 \times 16^x = \frac{1}{4 \times 16^x}$ 일 때이므로

$$x = -1 \text{ 이다.}$$

즉, $a = -1$ 이고 $b = 8$ 이다.

$$\therefore a+b = 7 \text{ 이다.}$$

24. 곡선 $5x^3y - y^3 - 2x^2y^2 = 2$ 위의 점 $(1, 1)$ 에서의

접선의 기울기는 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [3점]

해설 :

$$15x^2y + 5x^3 \frac{dy}{dx} - 3y^2 \frac{dy}{dx} - 4xy^2 - 4x^2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx}(5x^3 - 3y^2 - 4x^2y) = -15x^2y + 4xy^2$$

$$\text{따라서 } \frac{dy}{dx} = \frac{-15x^2y + 4xy^2}{5x^3 - 3y^2 - 4x^2y} \text{ 이고,}$$

이 곡선 위의 점 $(1, 1)$ 에서의 접선의 기울기는 $\frac{11}{2}$ 이다.

그러므로 $p=2$, $q=11$ 이고 $p+q=13$ 이다.

25. 자연수 7을 2개 이상의 자연수로 분할할 때, 2 또는 3이

적어도 하나 포함되도록 분할하는 방법의 수를 구하시오. [3점]

해설 :

$$7=1+6=\underline{2+5}=3+4$$

$$=1+1+5=\underline{1+2+4}=\underline{1+3+3}=\underline{2+2+3}$$

$$=1+1+1+4=\underline{1+1+2+3}=\underline{1+2+2+2}$$

$$=\underline{1+1+1+1+3}=\underline{1+1+1+2+2}$$

$$=\underline{1+1+1+1+1+2}$$

$$=1+1+1+1+1+1+1$$

$\therefore 10$ 개이다.

26. 좌표평면 위에서 상하 또는 좌우 방향으로 한 번에 1만큼씩

움직이는 점 P가 있다. 원점을 출발한 점 P가 $x \geq 0$, $y \geq 0$ 인

영역에서 6번 움직여서 도착한 위치가 점 A(2, 2)이 되는

경우의 수를 구하시오. [4점]

해설 :

상하좌우로 한 번에 1만큼 움직이는 것을 각각 $\uparrow$, $\downarrow$, $\leftarrow$, $\rightarrow$ 라고 하자.

(i) $\uparrow$ 방향으로 3번, $\downarrow$ 방향으로 1번, $\rightarrow$ 방향으로 2번

움직이는 경우

$\uparrow, \uparrow, \uparrow, \downarrow, \rightarrow, \rightarrow$ 을 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므

로 같은 것이 있는 순열에 의하여 $\frac{6!}{3!2!} = 60$ 이다.

주어진 영역 밖에서 움직이는 경우를 고려하자.

(1) 첫 번째로 $\downarrow$ 방향으로 움직이는 경우

$\uparrow, \uparrow, \uparrow, \rightarrow, \rightarrow$ 을 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{5!}{3!2!} = 10 \text{이다.}$$

(2) $\rightarrow$ 방향으로 1번 움직인 후 $\downarrow$ 방향으로 움직이는 경우

$\uparrow, \uparrow, \uparrow, \rightarrow$ 을 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{4!}{3!} = 4 \text{이다.}$$

(3) $\rightarrow$ 방향으로 2번 움직인 후 $\downarrow$ 방향으로 움직이는 경우

$\uparrow, \uparrow, \uparrow$ 을 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로 1이다.

전체 경우에서 (1), (2), (3)에서 구한 경우의 수를 각각 빼면

$$60 - (10 + 4 + 1) = 45$$

(ii) $\uparrow$ 방향으로 2번, $\leftarrow$ 방향으로 1번, $\rightarrow$ 방향으로 3번

움직이는 경우

앞서 구한 경우와 움직이는 방향만 바뀌었을 뿐, 고려할 상황 자체는 같다.

따라서 경우의 수는 45이다.

$$\therefore 45 \times 2 = 90$$

27. 두 자연수 m_1, m_2 에 대하여 확률변수 X 는 평균이 m_1 , 표준편차가 5인 정규분포를 따르고, 확률변수 Y 는 평균이 m_2 , 표준편차가 5인 정규분포를 따른다. 두 확률변수 X, Y 의 확률밀도함수를 각각 $f(x), g(x)$ 라 할 때, 두 함수 $f(x), g(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(3) = g(7)$

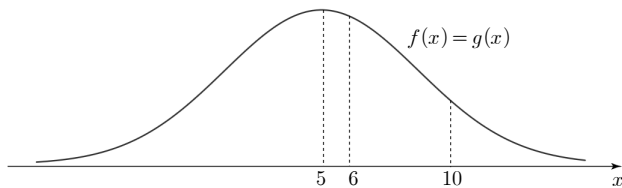
(나) $f(6) < g(10)$

$P(2 \leq X \leq 5) + P(8 \leq Y \leq 13)$ 의 최솟값을 a 라 할 때, $1000a$ 의 값을 오른쪽 표준 정규분포를 이용하여 구하시오. [4점]

해설 :

(i) $m_1 = m_2$

모든 실수 x 에 대하여 $f(x) = g(x)$ 이고 조건 (가)에 의해 $m_1 = 5$ 이다.

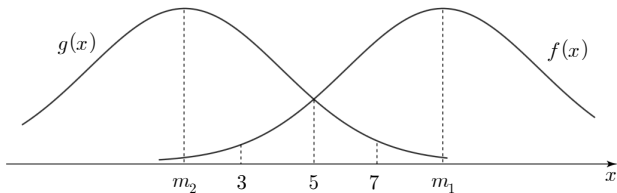


[그림 1]

[그림 1]에서 $f(6) > f(10) = g(10)$ 이고 이는 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $m_1 > m_2$

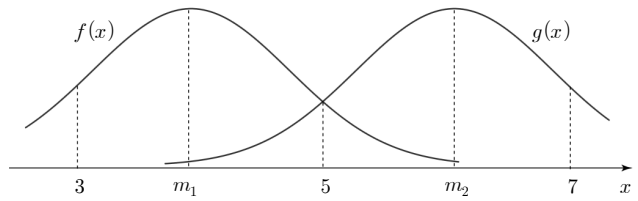
조건 (가)에 의해 [그림 2]와 같고



[그림 2]

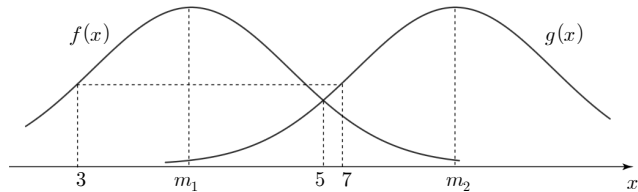
[그림 2]에서 $f(6) > g(10)$ 이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(iii) $m_1 < m_2$



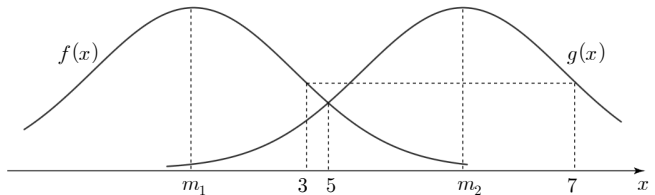
[그림 3-1]

두 직선 $x=3, x=7$ 이 [그림 3-1]과 같이 위치한다면 $f(6) > g(10)$ 이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.



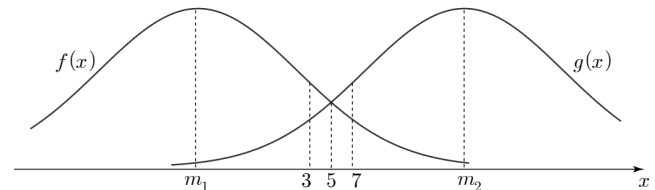
[그림 3-2]

두 직선 $x=3, x=7$ 이 [그림 3-2]와 같이 위치한다면 $f(6) = g(10)$ 이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.



[그림 3-3]

두 직선 $x=3, x=7$ 이 [그림 3-3]과 같이 위치한다면 $f(6) = g(10)$ 이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.



[그림 3-4]

두 직선 $x=3, x=7$ 이 [그림 3-4]와 같이 위치한다면 $f(6) < g(10)$ 이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

m_1, m_2 이 자연수이므로 $m_1 = 1, m_2 = 9$ 또는 $m_1 = 2, m_2 = 8$ 이다.

case I) $m_1 = 1, m_2 = 9$

$P(2 \leq X \leq 5) + P(8 \leq Y \leq 13)$

$= P(0.2 \leq Z \leq 0.8) + P(-0.2 \leq Z \leq 0.8) = 0.576$

case II) $m_1 = 2, m_2 = 8$

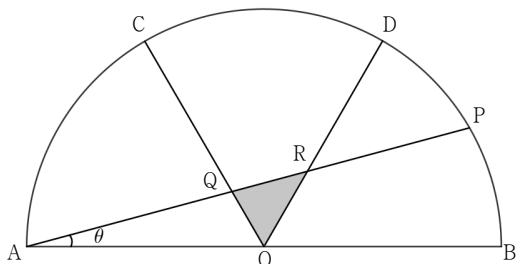
$P(2 \leq X \leq 5) + P(8 \leq Y \leq 13)$

$= P(0 \leq Z \leq 0.6) + P(0 \leq Z \leq 1) = 0.567$

따라서 $P(2 \leq X \leq 5) + P(8 \leq Y \leq 13)$ 의 최솟값 $a = 0.567$ 이고

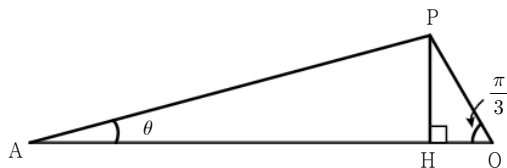
$1000a = 567$ 이다.

28. 그림과 같이 길이가 6인 선분 AB를 지름으로 하고 중심이 O인 반원이 있다. 호 AB를 삼등분하는 두 점 중 점 A에 가까운 점을 C, 점 B에 가까운 점을 D라 하자. 호 BD 위를 움직이는 점 P에 대하여 선분 AP가 선분 OC, 선분 OD와 만나는 점을 각각 Q, R이라 하고, $\angle PAB = \theta$ 일 때, 삼각형 ORQ의 넓이를 $S(\theta)$ 라 하자.
- $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{\theta^2} = a$ 일 때, a^2 의 값을 구하시오. [4점]



해설 :

점 Q에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H, 선분 AH의 길이를 x 라 하자.



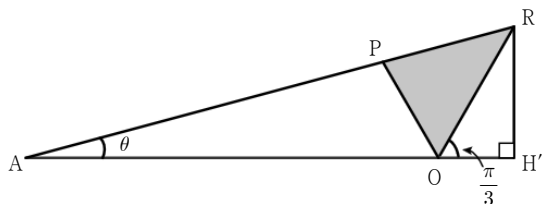
이 그림에서 $\tan \theta = \frac{HQ}{AH}$ 이므로 $HQ = x \tan \theta$ 이고,

$\angle QOH = \frac{\pi}{3}$ 이므로 $\overline{OH} = \frac{1}{\sqrt{3}} x \tan \theta$, $\overline{OQ} = \frac{2}{\sqrt{3}} x \tan \theta$ 이다.

한편 선분 AH의 길이와 선분 HO의 길이의 합은 원의 반지름의 길이와 같다.

즉, $x + \frac{1}{\sqrt{3}} x \tan \theta = 3$ 이고 $x = \frac{3}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \tan \theta}$ 이다.

그러므로 $\overline{OQ} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{3}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \tan \theta} \times \tan \theta$



점 R에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H' , 선분 OH' 의 길이를 y 라 하자.

$\angle ROH' = \frac{\pi}{3}$ 이므로 $\overline{RH'} = \sqrt{3}y$, $\overline{OR} = 2y$ 이다.

위 그림에서 $\tan \theta = \frac{\overline{H'R}}{\overline{AH'}} = \frac{\sqrt{3}y}{3+y}$ 이므로 $y = \frac{3 \tan \theta}{\sqrt{3} - \tan \theta}$ 이고

$\overline{OR} = \frac{6 \tan \theta}{\sqrt{3} - \tan \theta}$ 이다.

따라서 삼각형 ORQ의 넓이는

$S(\theta) = \frac{1}{2} \times \overline{OQ} \times \overline{OR} \times \sin \frac{\pi}{3} = \frac{9 \tan^2 \theta}{\sqrt{3} - \tan \theta}$ 이다.

$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{\theta^2} = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\tan^2 \theta}{\theta^2} \times \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{9}{\sqrt{3} - \tan \theta} = \frac{9}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3} = a$

따라서 $a^2 = 27$ 이다.

29. 좌표공간에 원

$$C_1 : x^2 + y^2 = 16, \quad z = 3$$

$$C_2 : y^2 + z^2 = 1, \quad x = 2$$

가 있다. 원 C_1 위의 점 P와 원 C_2 위의 점 Q에 대하여 점 X는 $\overrightarrow{XP} = 2\overrightarrow{OQ}$ 을 만족시킨다. 점 $Y(-4, 0, 3)$ 에 대하여 $|\overrightarrow{XY}|$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, Mm 의 값을 구하시오.
(단, O는 원점이다.) [4점]

해설 :

점 P는 원 C_1 위의 점이므로 $P(4\cos\theta, 4\sin\theta, 3)$ ($0 \leq \theta < 2\pi$)이다.

점 Q는 원 C_2 위의 점이므로 $Q(2, \cos t, \sin t)$ ($0 \leq t < 2\pi$)이다.

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{XY}| &= |\overrightarrow{YX}| \\ &= |\overrightarrow{YP} + \overrightarrow{PX}| = |\overrightarrow{YP} - 2\overrightarrow{OQ}| \\ &= |(4\cos\theta + 4, 4\sin\theta, 0) - 2(2, \cos t, \sin t)| \\ &= |(4\cos\theta, 4\sin\theta - 2\cos t, -2\sin t)| \\ &= \sqrt{(4\cos\theta)^2 + (4\sin\theta - 2\cos t)^2 + (-2\sin t)^2} \\ &= \sqrt{20 - 16\sin\theta\cos t} \end{aligned}$$

$-1 \leq \sin\theta \leq 1$, $-1 \leq \cos t \leq 1$ 이고, 점 P와 점 Q는 각자 다른 원에서 운동하고 있으므로, $-1 \leq \sin\theta\cos t \leq 1$ 이다.

그러므로 $|\overrightarrow{XY}|$ 의 최솟값 m 은 $\sin\theta\cos t = 1$ 일 때, 2이고,

최댓값 M 은 $\sin\theta\cos t = -1$ 일 때, 6이다.

$Mm = 12$ 이다.

30. 최고차항의 계수가 a 인 이차함수 $f(x)$ 에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$ 가

$$g(x) = \int_0^x \{e^{f(t)} |f'(t) - 1| + g(t)\} dt$$

이고, 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$ 는 $x = -\sqrt{\left|\frac{\ln 2}{a}\right|}$ 에서 최솟값 -15 을

찾는다.

(나) $g'(x) = 0$ 인 x 의 개수는 함수 $g(x)$ 가 극대 또는 극소가 되는 x 의 개수보다 많다.

$g(\ln 4)$ 의 값을 구하시오. (단, a 는 상수이다.) [4점]

해설 :

주어진 식의 양변을 미분하면,

$$g'(x) = e^{f(x)} |f'(x) - 1| + g(x) \text{이다.}$$

$$g'(x) - g(x) = e^{f(x)} |f'(x) - 1| \text{이고, 양변에 } e^{-x} \text{를 곱하면,}$$

$$e^{-x} \{g'(x) - g(x)\} = e^{f(x)-x} |f'(x) - 1| \text{이다.}$$

(i) $f'(x) \geq 1$ 일 때,

$$e^{-x} \{g'(x) - g(x)\} = e^{f(x)-x} \{f'(x) - 1\} \text{이고, 이 식을 적분하면,}$$

$$\text{적분상수 } C_1 \text{에 대하여 } e^{-x} g(x) = e^{f(x)-x} + C_1 \text{이다.}$$

$$\text{그러므로 } g(x) = e^{f(x)} + C_1 e^x \text{이다.}$$

(ii) $f'(x) < 1$ 일 때,

$$e^{-x} \{g'(x) - g(x)\} = -e^{f(x)-x} \{f'(x) - 1\} \text{이고, 이 식을 적분하면,}$$

$$\text{적분상수 } C_2 \text{에 대하여 } e^{-x} g(x) = -e^{f(x)-x} + C_2 \text{이다.}$$

$$\text{그러므로 } g(x) = e^{f(x)} + C_2 e^x \text{이다.}$$

$$\text{즉, } g(x) = \begin{cases} e^{f(x)} + C_1 e^x & (f'(x) \geq 1) \\ -e^{f(x)} + C_2 e^x & (f'(x) < 1) \end{cases} \text{이다.}$$

어떤 실수 m 에 대하여 $f'(m) = 1$ 이면 $f'(x) = 2a(x - m) + 1$ 이다.

(i) $a > 0$ 일 때,

$x \geq m$ 에서 $f'(x) \geq 1$ 이고, $x < m$ 에서 $f'(x) < 1$ 이다.

$$\text{즉, } g(x) = \begin{cases} e^{f(x)} + C_1 e^x & (x \geq m) \\ -e^{f(x)} + C_2 e^x & (x < m) \end{cases} \text{이다.}$$

$$\text{이때, } \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \{e^{f(x)} + C_1 e^x\} = \infty$$

$$\left(\because \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} e^{f(x)} = \infty \right) \text{이다.}$$

$$\text{또, } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \{-e^{f(x)} + C_2 e^x\} = -\infty$$

$$\left(\because \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} -e^{f(x)} = -\infty \right)$$

그러므로 치역이 실수 전체 집합이고, 최솟값이 존재하지 않는다.
조건 (가)에 모순이므로 $a > 0$ 이 아니다.

(ii) $a < 0$ 일 때,

$x \leq m$ 에서 $f'(x) \geq 1$ 이고, $x > m$ 에서 $f'(x) < 1$ 이다.

$$\text{즉, } g(x) = \begin{cases} e^{f(x)} + C_1 e^x & (x \leq m) \\ -e^{f(x)} + C_2 e^x & (x > m) \end{cases} \text{이다.}$$

$f'(x) = 2a(x-m) + 1$ 이므로, $f(x) = a(x-m)^2 + x + b$ 이다.

(단, b 는 상수)

함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이므로,

$$\lim_{x \rightarrow m-} g(x) = \lim_{x \rightarrow m+} g(x) \text{이다. 그러므로 } C_2 - C_1 = 2e^b \text{이다.}$$

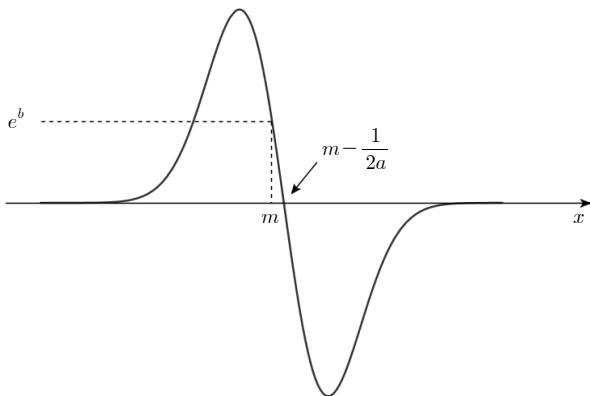
조건 (나)를 확인하기 위해 위의 $g(x)$ 를 미분하면,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \begin{cases} e^{f(x)} f'(x) + C_1 e^x & (x \leq m) \\ -e^{f(x)} f'(x) + C_2 e^x & (x > m) \end{cases} \\ &= \begin{cases} e^{a(x-m)^2 + x + b} \{2a(x-m) + 1\} + C_1 e^x & (x \leq m) \\ -e^{a(x-m)^2 + x + b} \{2a(x-m) + 1\} + C_2 e^x & (x > m) \end{cases} \\ &= \begin{cases} e^x [e^{a(x-m)^2 + b} \{2a(x-m) + 1\} + C_1] & (x \leq m) \\ e^x [-e^{a(x-m)^2 + b} \{2a(x-m) + 1\} + C_2] & (x > m) \end{cases} \end{aligned}$$

이다.

함수 $g(x)$ 의 극값 혹은 $g'(x) = 0$ 인 x 의 값은, 모든 실수 x 에 대하여 $e^x > 0$ 이므로, $x \leq m$ 에서 $e^{a(x-m)^2 + b} \{2a(x-m) + 1\} + C_1 = 0$ 인 x 또는 $x > m$ 에서 $-e^{a(x-m)^2 + b} \{2a(x-m) + 1\} + C_2 = 0$ 인 x 의 값이다.

곡선 $y = e^{a(x-m)^2 + b} \{2a(x-m) + 1\}$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



(주어진 정보만 가지고 그린 그림이며 정확하지 않다.)

$$h_1(x) = e^{a(x-m)^2 + b} \{2a(x-m) + 1\} + C_1 \quad (x \leq m),$$

$$h_2(x) = -e^{a(x-m)^2 + b} \{2a(x-m) + 1\} + C_2 \quad (x > m) \text{라 할 때,}$$

함수 $h_1(x)$ 는 곡선 $y = e^{a(x-m)^2 + b} \{2a(x-m) + 1\}$ 를 y 축으로 C_1 만큼 평행이동시킨 것이고, 함수 $h_2(x)$ 는 곡선

$y = e^{a(x-m)^2 + b} \{2a(x-m) + 1\}$ 를 x 축에 대하여 대칭이동시키고, y 축으로 C_2 만큼 평행이동시킨 것이다.

그러므로 함수 $h_1(x)$ 와 함수 $h_2(x)$ 의 그래프를

곡선 $y = e^{a(x-m)^2 + b} \{2a(x-m) + 1\}$ 의 그래프에서 $x \leq m$ 인 부분과 $x > m$ 인 부분을 각각 대칭이동 혹은 평행이동시켜 파악한다.

알아두어야 할 것은 $\lim_{x \rightarrow m-} h_1(x) = e^b + C_1$ 이고, $\lim_{x \rightarrow m+} h_2(x) = -e^b + C_2$

이므로, $\lim_{x \rightarrow m-} h_1(x) = \lim_{x \rightarrow m+} h_2(x)$ 이다. ($\because C_2 - C_1 = 2e^b$)

또한

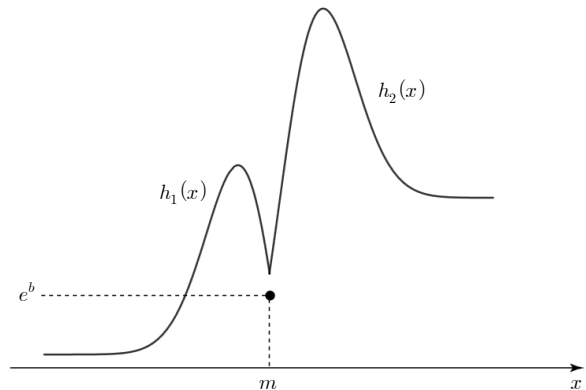
$$h_1'(x) = e^{a(x-m)^2 + b} \times 2a(x-m) \{2a(x-m) + 1\} + e^{a(x-m)^2 + b} \times 2a$$

이므로, $h_1'(m) = e^b \times 2a < 0$ 이다.

즉, m 은 곡선 $y = e^{a(x-m)^2 + b} \{2a(x-m) + 1\}$ 가 극대가 되는 x 보다 크다.

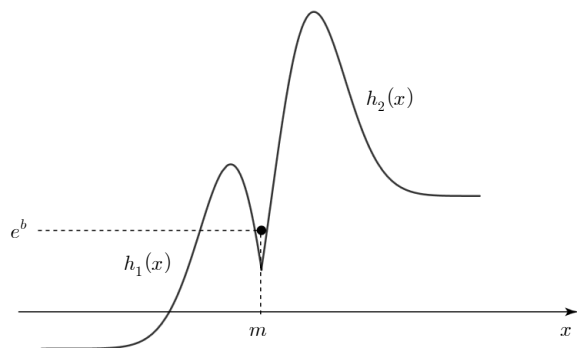
(i) $C_1 \geq 0$ 일 때,

두 함수 $h_1(x)$, $h_2(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



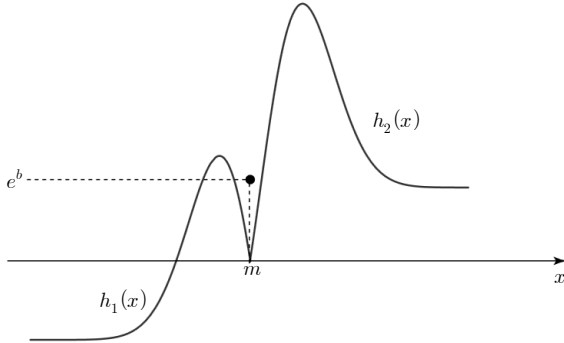
두 함수 $h_1(x)$, $h_2(x)$ 모두 0이 되는 x 가 존재하지 않고, 모두 0보다 크다. 그러므로 극값이 나타나지 않으며, 조건 (나)에 모순이다.

(ii) $-e^b < C_1 < 0$ 일 때,



$h_1(x)=0$ 인 x 가 존재하고 이 곳에서만 극값이 나타난다.
 그러므로 $g'(x)=0$ 인 x 의 개수와 극값의 개수가 같으므로
 조건 (나)에 모순이다.

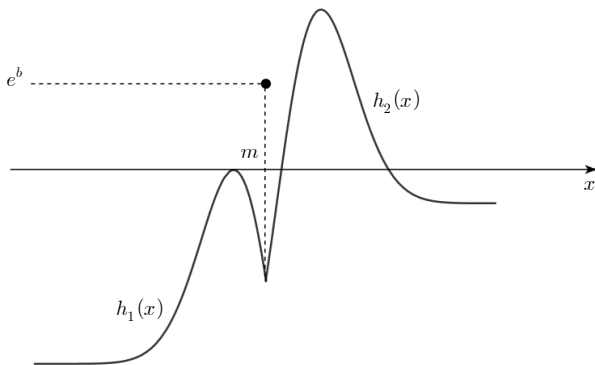
(iii) $C_1 = -e^b$ 일 때,



$h_1(x)=0$ 인 x 가 존재하고 $x=m$ 에서 $g'(x)=0$ 이다.
 하지만 $x=m$ 에서 극값이 나타나지 않는다.
 $g'(x)=0$ 인 실수 x 의 개수는 2이고, 극값의 개수는 1이므로,
 조건 (나)를 만족시킨다.

(i)~(iii)에서 보았듯 조건 (나)를 만족시키기 위해서는 함수값이 0
 이지만 주변 실수에서의 부호가 바뀌지 않는 x 가 존재해야 한다.
 그러므로 이런 경우가 또 나타날 수 있는 경우는 함수 $h_1(x)$ 또는
 함수 $h_2(x)$ 가 x 축에 접하는 경우가 있다.

(iv) 함수 $h_1(x)$ 가 x 축에 접할 때,



극값이 나타나는 x 의 개수가 2이고, $g'(x)=0$ 인 x 의 개수가 3
 이므로 조건 (나)를 만족시킨다.
 하지만, $x \rightarrow \infty$ 일 때, $h_2(x)$ 는 어떤 음의 실수로 수렴하고,
 즉, $x \rightarrow \infty$ 일 때, $g'(x)$ 는 $-\infty$ 로 발산한다.
 그러므로 $g(x)$ 는 $x \rightarrow \infty$ 일 때, $-\infty$ 로 발산하고, 최솟값이 존재하지
 않게 되므로 조건 (가)에 모순이다.
 (v) 함수 $h_2(x)$ 가 x 축에 접할 때,
 (iv)와 같은 이유로 조건 (가)에 모순임을 확인할 수 있다.

즉, 조건 (가), (나)를 모두 만족시킬 때, $C_1 = -e^b$ 이다.

$C_2 - C_1 = 2e^b$ 이므로, $C_2 = e^b$ 이다.

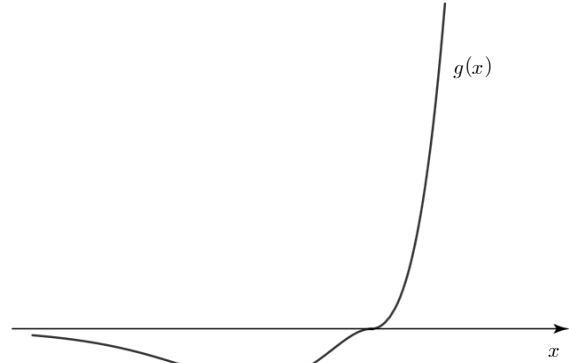
그러므로

$$g'(x) = \begin{cases} e^{x+b} [e^{a(x-m)^2} \{2a(x-m)+1\} - 1] & (x \leq m) \\ e^{x+b} [-e^{a(x-m)^2} \{2a(x-m)+1\} + 1] & (x > m) \end{cases} \text{이고,}$$

$$g(x) = \begin{cases} e^{x+b} \{e^{a(x-m)^2} - 1\} & (x \leq m) \\ e^{x+b} \{-e^{a(x-m)^2} + 1\} & (x > m) \end{cases} \text{이다.}$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = (-)0$ 이고, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$ 이다.

(iii)의 개형으로 함수 $g(x)$ 의 개형을 그리면,



이다.

주어진 $g(x)$ 식에서 $g(0)=0$ 이고, 위 식에서 $g(m)=0$ 이므로,
 $m=0$ 이다.

그러므로

$$g(x) = \begin{cases} e^{x+b} (e^{ax^2} - 1) & (x \leq 0) \\ e^{x+b} (-e^{ax^2} + 1) & (x > 0) \end{cases} \text{이고,}$$

$$g'(x) = \begin{cases} e^{x+b} \{e^{ax^2} (2ax+1) - 1\} & (x \leq 0) \\ e^{x+b} \{-e^{ax^2} (2ax+1) + 1\} & (x > 0) \end{cases} \text{이다.}$$

함수 $g(x)$ 의 최솟값은 $h_1(x)=0$ 인 x 에서 나타나고, 극솟값이므로,

$$g\left(-\sqrt{-\frac{\ln 2}{a}}\right) = e^{-\sqrt{-\frac{\ln 2}{a}}+b} \left\{e^{-\ln 2} \left(-2a\sqrt{-\frac{\ln 2}{a}}+1\right) - 1\right\} = 0 \text{이다.}$$

$$\text{즉, } \frac{1}{2} \left(-2a\sqrt{-\frac{\ln 2}{a}}+1\right) - 1 = 0 \text{이므로, 식을 정리하면,}$$

$$-a\sqrt{-\frac{\ln 2}{a}} = \frac{1}{2} \text{이고, 양변을 제곱하여 식을 정리하면,}$$

$$-a \ln 2 = \frac{1}{4} \text{이므로, } a = -\frac{1}{4 \ln 2} \text{이다.}$$

즉, 함수 $g(x)$ 는 $x = -2 \ln 2$ 에서 최솟값 -15 를 갖는다.

$$g(-2 \ln 2) = e^{-2 \ln 2 + b} \left(e^{-\frac{1}{4 \ln 2} (2 \ln 2)^2} - 1\right) = \frac{1}{4} e^b (e^{-\ln 2} - 1) = -\frac{1}{8} e^b = -15$$

이므로, $b = \ln 120$ 이다.

$\ln 4 > 0$ 이므로,

$$g(\ln 4) = e^{\ln 4 + \ln 120} \left(-e^{-\frac{1}{4 \ln 2} \times \ln 4 \times \ln 4} + 1\right) = 480(-e^{-\ln 2} + 1) = 480 \times \frac{1}{2}$$

$$= 240 \text{이다.}$$