2019 학년도 공정강하 모의고사 손글씨 해설

하승진

1. 정답 ②

$\lim_{x\to\infty} \frac{x\ln(1+\frac{2}{x})}{2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+\frac{2}{x})}{\frac{2}{x}} = 2$

2. 정답 ②

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = \frac{1}{2}$

[참고] 배각 공식 $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

3. 정답 ③

$A(-1, 5, 3)$, $B(-7, 3, 1)$을 $1:3$으로 외분하는

점의 좌표는 $\left(\frac{-7-(-3)}{1-3}, \frac{3-15}{1-3}, \frac{1-9}{1-3}\right)$

$= (2, 6, 4) = (a, b, c)$

$\therefore a+b+c = 12$

4. 정답 ①

$8 = 1+1+6 = 2+2+4$

$= 1+2+5 = 2+3+3$

$= 1+3+4$ $\quad\therefore P(8,3) = 5$

5. 정답 ②

$3^x + k = -3$, $3^x = -k-3 > 0$, $-3 > k$

$5+k > 0$, $k > -5$

$\therefore -5 < k < -3$, $k = -4$

6. 정답 ④

직선의 방향 벡터가 평면의 법선벡터이므로

$\vec{n} = (2, 3, 1)$

또한 점$(1, -5, 2)$를 지나므로

평면의 방정식은 $2(x-1) + 3(y+5) + z - 2 = 0$

$\therefore 2x + ay + bz + c = 2x + 3y + z + 11$

$a+b+c = 3+1+11 = 15$

7. 정답 ③

1개 남은 빨간맛 사탕을 받는 학생을 정하는 경우의 수는 2,

빨간맛 1개를 받은 학생이 받을 나머지 2개의 사탕을

정하는 경우의 수는 3 ($\because$ 오렌지×2 or 바람×2 or 오렌지×1+ 바라×1)

$\therefore$ 모든 경우의 수는 $2 \times 3 = 6$

[참고] 마지막 학생은 남은 사탕을 받으므로 경우의 수가 1이다.

8. 정답 ⑤

$\int_{-3}^{0} (e^{x+3} - 1)\,dx = \left[e^{x+3} - x\right]_{-3}^{0}$

$= e^3 - 4$

9. 정답 ③

$P(A\cap B)$가 최소일 때 $P(A^c\cap B)$는 최대이고

$P(A^c) \geq P(A^c\cap B)$ 이므로

$P(A^c\cap B) = P(A^c) = \frac{2}{3}$

$\therefore P(A^c | B) = \frac{P(A^c\cap B)}{P(B)} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{8}{9}$

10. 정답 ①

$\frac{dx}{dt} = 3t^2 + 1$, $\frac{dy}{dt} = 2t + 2$

$x = 1$ 일때 $t = 0$ 이므로

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2}{1} = 2$

11. 정답 ⑤

$\overline{BD} = 3$, $\triangle BDE$ 에서 $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\cos\alpha = \frac{2}{3}$

$\overline{BE} = 2$, $\overline{CE} = 3$, $\overline{CD} = \sqrt{14}$ 이므로

$\triangle CDE$에서 $\sin\beta = \frac{3\sqrt{14}}{14}$, $\cos\beta = \frac{\sqrt{60}}{14}$

$\therefore \sin(\beta - \alpha) = \sin\beta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\beta$

$= \frac{3\sqrt{14}}{14} \times \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{5}}{3} \times \frac{\sqrt{60}}{14} = \frac{\sqrt{14}}{42}$

[참고] 2018 수능 가형 #14

12. 정답 ②

$X \sim N(m, 6^2)$, $\overline{X} \sim N(m, 3^2)$

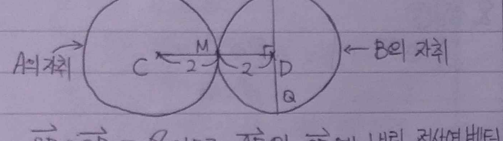
$P(Z \le \frac{126-m}{6}) + P(Z \le \frac{117-m}{3}) = 1$

$\therefore \frac{126-m}{6} = \frac{117-m}{3}$, $m = 120$

$\therefore P(\overline{X} \ge 117) = P(Z \ge -1) = 0.8413$

13. 정답 ⑤

$|\overrightarrow{BD}| = |\overrightarrow{AC}| = 2$, $|\overrightarrow{CD}| = 4$를 만족하는 그림을 그려보면 다음과 같다.



$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 8$이므로 $\overrightarrow{AB}$의 $\overrightarrow{CD}$에 내린 정사영 벡터의 길이가 2이므로 B의 자취는 점 M을 포함하는 $\overparen{PQ}$이다.

$\therefore \frac{4\pi}{2} = 2\pi$

14. 정답 ③

$\int_1^e x\ln x\,dx = \frac{1}{4a}$

$[\frac{1}{2}x^2\ln x]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2}x\,dx = \frac{1}{4a}$

$\therefore \frac{e^2+1}{4} = \frac{1}{4a}$, $a = \frac{1}{e^2+1}$

15. 정답 ⑤

조건 (나)에 의해 2, 3, 5, 7의 순서가 정해진다.

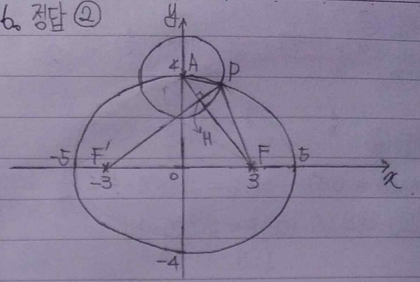
조건 (가)에 의해 8이 배열되는 경우의 수는 2

($\because$ 5, 8, 7 or 5, 7, 8)

나머지 1, 4, 6을 이미 배열한 2, 3, 5, 7, 8 사이에 배열하는 경우의 수 $_6H_3 \times 3!$

$\therefore 2 \times {}_6H_3 \times 3! = 672$

16. 정답 ②



$\overline{AF}$와 $\overline{PF'}$의 교점을 H라 하면

$\triangle AOF \backsim \triangle F'HF$ (AA닮음)이므로

$\overline{AF} : \overline{AO} = \overline{F'F} : \overline{F'H}$

$5 : 4 = 6 : \overline{F'H}$, $\overline{F'H} = \frac{24}{5}$

같은 방법으로 $\overline{FH} = \frac{18}{5}$

$\overline{PF} = a$, $\overline{PH} = b$라고 하면 $\triangle PHF$에서

$a^2 - b^2 = (\frac{18}{5})^2$ ($\because$ 피타고라스의 정리) $\cdots$ ㉠

P는 타원 위의 점이므로 $\overline{PF} + \overline{PF'} = 10$

$a + b + \frac{24}{5} = 10 \cdots$ ㉡

㉠과 ㉡을 연립하면 $a - b = \frac{18}{5} \times \frac{9}{13}$

$\therefore \overline{PF'} - \overline{PF} = \frac{24}{5} + b - a$

$= \frac{24}{5} - \frac{18}{5} \times \frac{9}{13} = \frac{6}{5}(4 - \frac{27}{13}) = \frac{30}{13}$

17. 정답 ③

ⅰ) 가장 큰 수와 가장 작은 수의 차가 2일 경우

3-1=2 인 경우는

1, 1, 3인 경우가 $_3C_2 \times 3 = 9$,

1, 2, 3인 경우가 $3^3 = 27$,

1, 3, 3인 경우가 $_3C_2 \times 3 = 9$ 이므로

총 45가지이다.

4-2=2, 5-3=2 인 경우도 같은 방법으로 각각 45가지이다.

ⅱ) 가장 큰 수와 가장 작은 수의 차가 3일 경우

$4-1=3$, $5-2=3$인 경우 ⅰ)과 같은 방법으로 각각 72가지이다.

ⅰ)의 경우 중 세 수가 전부 다른 경우의 수는 27×3

ⅱ)의 경우 중 세 수가 전부 다른 경우의 수는 27×4

$$\therefore \frac{27\times3+27\times4}{45\times3+72\times2}=\frac{3\times7}{15+16}=\frac{21}{31}$$

18. 정답 ①

정사각형 ADEF에서 $\overline{DF}\perp\overline{AE}$이고

$\overline{DF}\,/\!/\,\overline{BC}$이므로 $\overline{AE}\perp\overline{BC}$이다.

$\overrightarrow{AD}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AF}=\vec{b}$라고 하면

$\overrightarrow{AE}=\vec{a}+\vec{b}$, $\overrightarrow{FD}=\vec{a}-\vec{b}$

$\overrightarrow{CB}=\frac{4}{2\sqrt{3}}\overrightarrow{FD}$ ($\because |\overrightarrow{FD}|=2\sqrt{3}$, $|\overrightarrow{CB}|=4$) 이므로

$\overrightarrow{EB}=\frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{a}-\vec{b})$

$\therefore \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EB}=\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\vec{a}+\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\vec{b}$

같은 방법으로 $\overrightarrow{AC}=\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\vec{a}+\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\vec{b}$

$\triangle ADE$에서 $\overrightarrow{AP}=t\vec{a}+(1-t)(\vec{a}+\vec{b})$ (t는 상수)

$=\vec{a}+(1-t)\vec{b}$

$\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}$ (s는 상수) 라고 하면

$s\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\vec{a}+s\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\vec{b}=\vec{a}+(1-t)\vec{b}$

$\therefore s=\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$, $t=\frac{2}{\sqrt{3}+1}$

$\therefore \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AF}=\vec{a}+\vec{b}=k(2-t)(\vec{a}+\vec{b})$

$k=\frac{1}{2-t}=\frac{3+\sqrt{3}}{6}$

[참고] $E(0,0)$, $B(-2,0)$, $A(0,2\sqrt{3})$과 같이 좌표평면을 도입하여 해결할 수도 있다.

19. 정답 ③

확률 변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3 이다.

(ⅰ) $X=0$인 사건은 첫 번째 시행에서 검은 공이 나오는 경우이므로

$$P(X=0)=\boxed{\frac{4}{7}}$$

(ⅱ) $X=k$ $(k=1,2,3)$인 사건은 k번째 시행까지는 흰 공이 나오고 $(k+1)$번째 시행에서 검은 공이 나오는 경우이므로

$$P(X=k)=\boxed{\frac{{}_3P_k}{7^k}}\times\frac{4+k}{7}$$

따라서 확률 변수 X의 평균 $E(X)$는

$$E(X)=\sum_{k=0}^{3}\{k\times P(X=k)\}$$

$$=0\times\frac{4}{7}+1\times\frac{3}{7}\times\frac{5}{7}+2\times\frac{6}{7^2}\times\frac{6}{7}$$

$$+3\times\frac{6}{7^3}\times\frac{7}{7}$$

$$=\frac{15}{7^2}+\frac{72}{7^3}+\frac{18}{7^3}=\boxed{\frac{195}{7^3}}$$

$\therefore a=\frac{4}{7}$, $b=\frac{195}{7^3}$, $f(k)=\frac{{}_3P_k}{7^k}$

$$\frac{af(1)}{b}=\frac{4}{7}\times\frac{3}{7}\times\frac{7^3}{195}=\frac{28}{65}$$

20. 정답 ④

ㄱ. $\frac{f(x)}{x}+f'(x)=3x$ $(x\neq0)$

$f(x)+xf'(x)=3x^2$

$\int f(x)+xf'(x)\,dx=\int 3x^2\,dx$

$xf(x)=x^3+C$ (C는 상수)

$f(x)=x^2+\frac{C}{x}$, $f'(x)=2x-\frac{C}{x^2}$

$f(1)=1+C>1$, $C>0$ 이므로

$x<0$ 이면 $f'(x)<0$

$\therefore x<0$ 이면 $f(x)$는 감소함수이다.

(거짓)

ㄴ. $x\geq0$일 때 $g(x)=\frac{2a}{g'(x)}$

$g'(x)g(x)=2a$

$\int g'(x)g(x)\,dx=\int 2a\,dx$

$\frac{1}{2}\{g(x)\}^2=2ax+C'$ (C'은 상수)

$\{g(x)\}^2=4ax+2C'$

$g(-2)=f(-2)=4-\frac{C}{2}=0$, $C=8$

$\therefore$ $x<0$ 일 때 $g(x) = x^2 + \frac{8}{x}$

$xf(x)g(x) \le 0$ 이므로

$x \ge 0$ 일 때 $g(x) = -\sqrt{4ax+2C'}$

$g'(-2) = -6$ 이고 $x \ge 0$ 이면 $g(x)$는 증가함수

이므로 $y = g'(x)$는 극댓값 -6을 갖는다

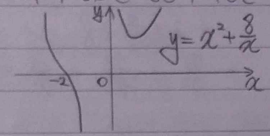
(참)

[참고] $y = -\sqrt{4ax+2C'}$은 포물선의 일부이므로

이계도함수를 구하지 않고 그래프를 통해

도함수의 증감을 충분히 추론할 수 있다.

[참고]



ㄷ. ㄴ에서 $g(x) = \begin{cases} x^2 + \frac{C}{x} & (x<0) \\ -\sqrt{4ax+C'} & (x \ge 0) \end{cases}$

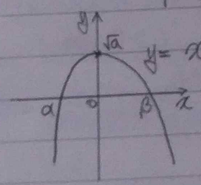
$xg(x) = \begin{cases} x^3 + C & (x<0) \\ -x\sqrt{4ax+C'} & (x \ge 0) \end{cases}$

$\lim_{x\to 0-} xg(x) = \lim_{x\to 0-}(x^3+C) = 0$, $C = 0$

$\lim_{x\to 0+} xg(x) = \lim_{x\to 0+}(-x\sqrt{4ax+C'}) = 0$

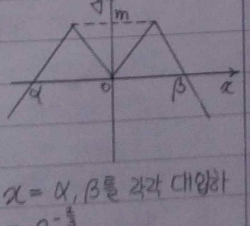
$g(0) = -\sqrt{C'} = 0$, $C' = 0$

$\therefore$ $xg(x) = \begin{cases} x^3 & (x<0) \\ -2\sqrt{a}\,x\sqrt{x} & (x \ge 0) \end{cases}$



$xg(x) + \sqrt{a} = 0$의 두 근을 α, β라 하면 $(\alpha < \beta)$

h=(0)=0과 ㄷ조건을 만족하는 $y = |h(x)|$의 증감만을 이용해 그래프를 추론하면 오른쪽과 같다.



$xg(x) + \sqrt{a} = 0$에 $x = \alpha, \beta$를 각각 대입하면 $\alpha = -a^{\frac{1}{6}}$, $\beta = 2^{-\frac{1}{3}}$

$\therefore \int_\alpha^0 x^3 + \sqrt{a}\,dx = \int_0^\beta \sqrt{a}(-2x\sqrt{x}+1)\,dx$

$\frac{3}{4}a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{4}{5}\times 2^{-\frac{5}{3}} + 2^{-\frac{2}{3}}\right)$

$a^{\frac{1}{6}} = -\frac{16}{15}\times 2^{-\frac{5}{3}} + \frac{4}{3}\times 2^{-\frac{2}{3}}$

$= -\frac{1}{15}\times 2^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{3}\times 2^{\frac{4}{3}}$

$= \frac{2^{\frac{4}{3}}}{3}\left(-\frac{2}{5}+1\right)$

$= \frac{2^{\frac{4}{3}}}{5}$

$\therefore f(5)g(25) = 5^2 \times \left(-2 \times \frac{2^4}{5^3} \times 5\right)$

$= -32$

(참)

[참고] $f(5)g(25) = -250\sqrt{a}$임을 통해 $\sqrt{a} = t$로 치환할 수도 있다.

[참고] ㄱ, ㄴ에서 사용한 "부정적분을 이용한 방정식의 정리"는 2019.6月#30, 2015.9月#30, 2016.수능#30에 출제된 바 있다.

ㄷ에서 사용한 "피적분 함수를 통한 정적분 함수의 추론"은 2018.6月#30에 출제된 바 있다.

21. 정답 ③

$f(x) = \cos^n(\pi x)\,e^{-x^2+x}$ (n은 자연수)

$f'(x) = n\cos^{n-1}(\pi x)\times(-\pi\sin(\pi x))\,e^{-x^2+x}$

$\quad + (-2x+1)\cos^n(\pi x)\,e^{-x^2+x}$

$= \cos^{n-1}(\pi x)\,e^{-x^2+x}(-n\pi\sin(\pi x) - (2x-1)\cos(\pi x))$

$= -\cos^{n-1}(\pi x)\,e^{-x^2+x}(n\pi\sin(\pi x) + (2x-1)\cos(\pi x))$

$p(x) = n\pi\sin(\pi x) + (2x-1)\cos(\pi x)$라고 하면

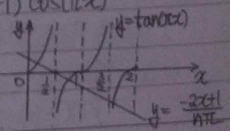
$f(x)$는 $\cos(\pi x) = 0$ 또는 $p(x) = 0$ 일 때 극값을 가진다.

($\because \sin(\pi x) = \cos(\pi x) \ne 0$)

$p(x) = n\pi\sin(\pi x) + (2x-1)\cos(\pi x) = 0$

$n\pi\sin(\pi x) = -(2x-1)\cos(\pi x)$

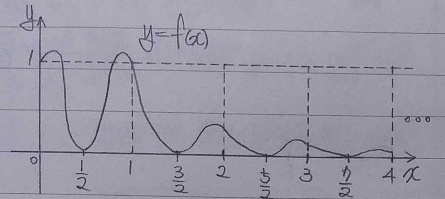
$\tan(\pi x) = \frac{-2x+1}{n\pi}$



DATE.

ⅰ) $n=2m$ (m은 자연수)일 때

$y=f(x)$의 증감을 판단하면 개형은 다음과 같다.



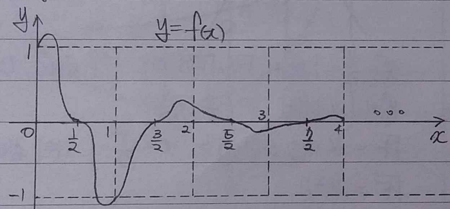
$y=|f(x)-1|$의 미분불가능점은 4개,

$y=|f(x)+1|$의 미분불가능점은 0개이므로

조건 (가)를 만족시키지 못한다.

ⅱ) $n=2m-1$ (m은 자연수)일 때

$y=f(x)$의 증감을 판단하면 개형은 다음과 같다.



$y=|f(x)-1|$과 $y=|f(x)+1|$의 미분불가능점의 개수는 각각 2개로 조건(가)를 만족한다.

또한, 조건(나)에 의해 $k=4$이다.

$h(x)=\ln f(x)+x^2-x$, $h'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}+2x-1$

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{-\cos^{n-1}(\pi x)e^{-x^2+x}(n\pi\sin(\pi x)+(2x-1)\cos(\pi x))}{\cos^{n}(\pi x)e^{-x^2+x}}$$

$$=-(n\pi\tan(\pi x)+(2x-1))$$

$\therefore h'(x)=-n\pi\tan(\pi x)$

$h'(\frac{1}{4})=-n\pi=-\pi$, $n=1$

$f(4)=e^{-12}<\frac{1}{8}<f(2)=e^{-2}$ ($\because 2<e<3$)

이므로 $g(\frac{1}{2k})=g(\frac{1}{8})=5$

$\therefore n+g(\frac{1}{2k})=1+5=6$

22. 정답 35

$_7C_3=\frac{7!}{4!3!}=35$

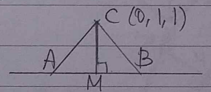
23. 정답 10

$3\vec{a}=(-3,6)$, $\vec{b}=(3,4)$ 이므로

$3\vec{a}+\vec{b}=(-3+3,6+4)=(p,q)$

$p+q=10$

24. 정답 6



$l: \frac{x}{2}=y=-z$

$\overline{AB}$의 중점을 $M(2t,t,-t)$라 하면

$\vec{CM}\cdot\vec{AB}=(2t,t-1,-t-1)\cdot(2,1,-1)=0$

$4t+t-1+t+1=0$, $t=0$

$\therefore M(0,0,0)$, $|\vec{CM}|=\sqrt{2}$, $\overline{AB}=2\sqrt{8-2}=2\sqrt{6}$

$\sqrt{3}S=\sqrt{3}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times2\sqrt{6}=6$

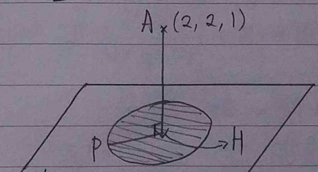
25. 정답 2

$f(1)=0$ 이므로 $\lim_{x\to1}\frac{3(f(x)-f(1))}{(x-1)(x^2+x+1)}=f'(1)$

$f'(x)=3e^{3x-1}\ln x+\frac{1}{x}\times e^{3x-1}$

$f'(1)=e^2=t$, $\ln t=2$

26. 정답 14



점P가 나타내는 도형은 내부를 포함하는 원이다.

점A에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H라 하고

점P가 나타내는 원을 S라 하자.

DATE .

$\overline{AH} = \dfrac{|2+4+2-14|}{\sqrt{1+4+4}} = 2$ 이므로

S의 반지름 길이 $= \sqrt{5^2-2^2} = \sqrt{21}$

평면α와 xy평면이 이루는 이면각 θ에 대하여

$\cos\theta = \dfrac{2}{\sqrt{1+4+4}\times 1} = \dfrac{2}{3}$

$\therefore k\pi = 21\pi \times \dfrac{2}{3} = 14\pi, \quad k=14$

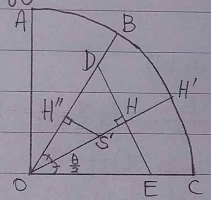
$= \dfrac{2}{\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}\left(\sin\frac{\theta}{2}+1\right)^2$

$\therefore \lim_{\theta\to 0+} \dfrac{R(\theta)\{S(\theta)+T(\theta)\}}{\theta}$

$= \lim_{\theta\to 0+} \dfrac{2}{\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}\left(\sin\frac{\theta}{2}+1\right)^2 \times \dfrac{20\sin^2\frac{\theta}{2}}{\left(2\sin\frac{\theta}{2}+1\right)^2} \times \dfrac{\pi}{\theta}$

$= 2\times 2\times 20\times\pi = 80\pi$

27. 정답 80



중심 O에서 $\overline{DE}$에 내린 수선의 발을 H,

$\overleftrightarrow{OH}$ 와 $\widehat{BC}$의 교점을 H', T의 반지름 길이를

r이라 하자.

원 S의 중심을 S', S'에서 $\overline{OB}$에 내린 수선의

발을 H''이라 하면

$\overline{HH'} = \overline{HS'} = 2r$, $\triangle OH''S'$에서 $\overline{OS'} = \dfrac{2r}{\sin\frac{\theta}{2}}$

$\therefore \overline{HH'}+\overline{HS'}+\overline{OS'} = 4r + \dfrac{2r}{\sin\frac{\theta}{2}} = 4$

$r = \dfrac{2}{2+\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}} = \dfrac{2\sin\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}+1}$

$\therefore S(\theta) = 4r^2\pi, \quad T(\theta) = r^2\pi$

$S(\theta)+T(\theta) = 5\times\dfrac{4\sin^2\frac{\theta}{2}}{\left(2\sin\frac{\theta}{2}+1\right)^2}\pi$

$\overline{OH} = \overline{OS'}+\overline{HS'} = 2r\times\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}+1}{\sin\frac{\theta}{2}}$

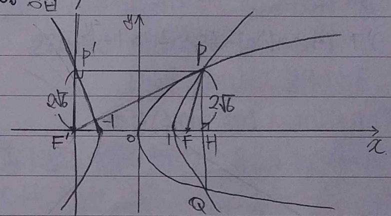
$\overline{DH} = \tan\frac{\theta}{2}\,\overline{OH}$, $\overline{OD} = \dfrac{1}{\cos\frac{\theta}{2}}\overline{OH}$ 이므로

$R(\theta) = 2\overline{DH}+2\overline{OD}$

$= 2\left(\tan\frac{\theta}{2}+\dfrac{1}{\cos\frac{\theta}{2}}\right)\overline{OH}$

$= 2\times\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}+1}{\cos\frac{\theta}{2}}\times\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}+1}{\sin\frac{\theta}{2}}$

28. 정답 9



$x^2-\dfrac{y^2}{a}=1$ 에서 $F(\sqrt{1+a}, 0)$, $F'(-\sqrt{1+a}, 0)$

$y^2 = bx$ 에서 $F\left(\dfrac{b}{4}, 0\right)$

$\overline{PF} = k$ 라고 하면 P는 $x^2-\dfrac{y^2}{a}=1$ 위의 점이므로

$\overline{PF'} = k+2$

점P를 지나고 x축에 평행한 직선과 $y^2=bx$의

준선의 교점을 P'이라 하면

$\overline{PP'} = \overline{PF} = k$, $\overline{P'F'} = 2\sqrt{6}$

$\triangle PP'F'$에서 $k^2+(2\sqrt{7})^2 = (k+2)^2$

$28 = 4k+4, \quad k=5$

$\overline{PQ}$의 중점을 H라 하면 $\triangle PHF$에서 $\overline{FH}=1$

$\overline{PP'} = 5 = 2\sqrt{a+1}+1, \quad a=3$

$\dfrac{b}{4}=2, \quad b=8, \quad P(3, 2\sqrt{6})$

$2x - \dfrac{2}{a}y\times\dfrac{dy}{dx} = 0, \quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3\sqrt{6}}{4}$

$\dfrac{3\sqrt{6}}{4}(t-3)+2\sqrt{6} = 0, \quad t=\dfrac{1}{3}$

$\therefore at+b = 3\times\dfrac{1}{3}+8 = 9$

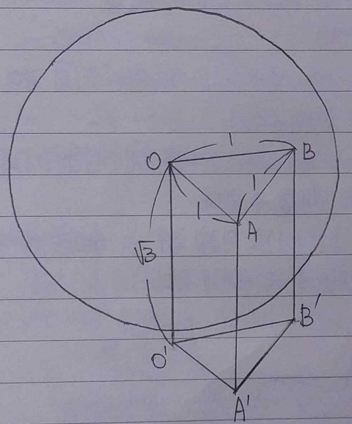
DATE .

29. 정답 126

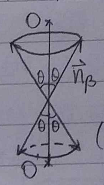
조건(가)에서 $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$이므로 $\triangle OAB$는 한 변의 길이가 1인 정삼각형이다.

조건(나)에 의해 $\triangle OAB$와 평면 α가 평행임을 알 수 있다.

또한 조건(가)에 의해 $\overline{OO'} = \sqrt{3}$임을 알 수 있다.



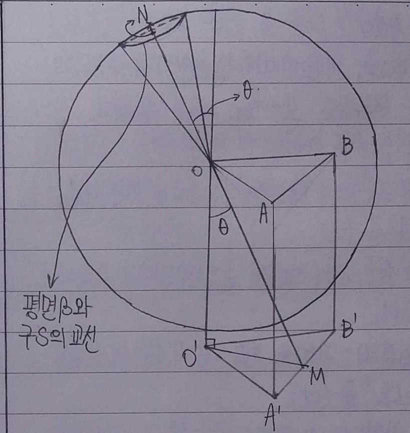
조건(다)에 의해 평면 β의 법선벡터 $\overrightarrow{n_\beta}$와 평면 α의 법선벡터와 평행인 직선 OO'의 위치 관계는 다음과 같다.



$(\tan\theta = \frac{1}{2})$

$\overline{A'B'}$의 중점을 M이라 하면 $\triangle OO'M$에서 $\tan(\angle MOO') = \frac{1}{2}$이므로 $\angle MOO' = \theta$이다.

$(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})\cdot(\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}) = (\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})\cdot 2\overrightarrow{OM}$ 이므로 $(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})\cdot(\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'})$이 최솟값을 가지려면 $\overline{CD}$는 평면 β와 구 S의 교선인 원의 지름이 되어야 한다. 이때 $\overline{CD}$의 중점을 N이라고 하자.

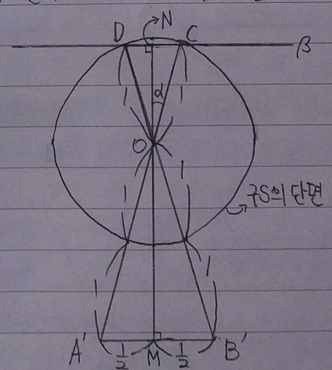


평면 β와 O 사이의 거리가 $\frac{\sqrt{15}}{4}$ 즉, $\overline{ON} = \frac{\sqrt{15}}{4}$이므로

$\triangle ONC$에서 $\overline{CN} = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2} = \frac{1}{4}$

$\overline{CD} = \frac{1}{2}$

$\overline{CD}$는 원의 지름을 유지하며 회전할 수 있으므로 $\overrightarrow{A'C}\cdot\overrightarrow{B'D}$가 최대일 때 평면 OCD와 평면 $OA'B'$는 일치하면서 위치 관계는 다음과 같다.



$\angle NOC = \alpha$라 하면 $\triangle ONC$에서 $\cos\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$

$\therefore K = |\overrightarrow{A'C}| \times |\overrightarrow{B'D}| \times \cos 2\alpha$

$= 3 \times 3 \times (2\cos^2\alpha - 1)$

$= 9 \times \left(2 \times \frac{15}{16} - 1\right)$

$= \frac{63}{8}$ $\qquad \therefore 16K = 126$

2019 공정강하 모의고사

DATE.

30. 정답 720

$y=f(x)$의 개형에 따라 $y=g(t)$가 결정되므로

조건을 만족시키는 $y=f(x)$ 개형을 찾아보자.

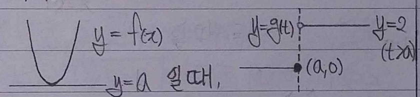
문제의 조건 중

" 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)=0$ 이면 $|f(x)|>1$ 이다."를 (가),

" 모든 실수 x에 대하여 $y=f(x)g(x)$가 연속이다." 를 (나),

" $f(x)g(x)=g(x)$는 서로 다른 두 실근 α, β만을 갖는다."를 (다),

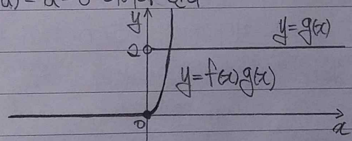
라고 하자.

i) 

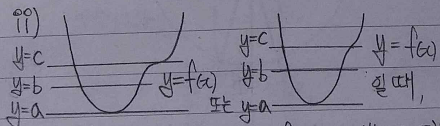
$y=a$ 일 때,

이므로 조건(나)를 만족시키려면

$f(a)=a=0$ 이어야 한다

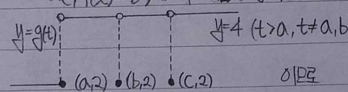


하지만 $f(x)g(x)=g(x)$는 한 양근과 셀 수 없이 많은 음근을 가지므로 조건(다)를 만족할 수 없다.

ii) 

일 때,

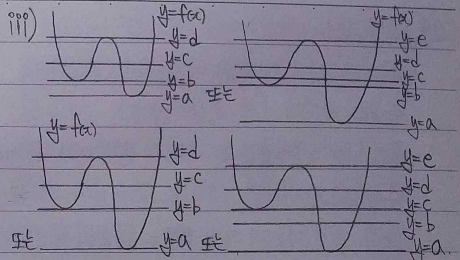
(단, $f(x)=b, c$의 교점은 $y=f(x)$의 모든 변곡점을 포함한다.)



이므로

조건 (나)를 만족할 수 없다.

($\because$ $f(x)=0$의 실근의 개수 최댓값은 2개이지만 $y=g(x)$의 불연속점의 개수는 3개이다.)

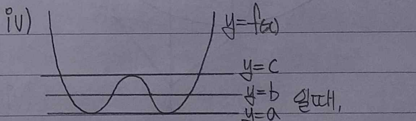
iii) 

일때, (단, $f(x)=b, c, d$의 교점은 $y=f(x)$의 모든 변곡점을 포함한다.)

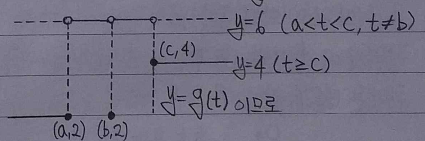
$f(x)=e$가 존재하는 2가지 경우는 ii)과 같이 조건 (나)를 만족할 수 없다.

또한 나머지 2가지 경우도 조건 (가)와 (다)를 동시에 만족할 수 없다.

($\because$ 조건 (가)를 만족할 경우 $f(x)g(x)=g(x)$의 서로 다른 실근은 4개가 된다.)

iv) 

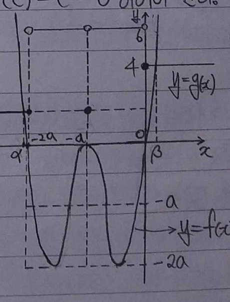
일때,



$y=g(t)$ 이므로

조건 (가), (나), (다)를 모두 만족시키려면

$f(c)=c=0$ 이어야 한다. ··· [자세한 풀이]



또한 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이므로

$a=-2b$가 된다.

$\therefore f(x)=x(x+a)^2(x+2a)$

DATE .

$h(x) = \frac{f(x)}{x+2}$에 대하여 $h(x)=0$의 모든 실근은 $-2a, -a, 0$ 이므로 ··· [자세한 풀이]

$-3a = -6, \ a = 2$

$\therefore h(x) = \frac{f(x)}{x+2} = x(x+2)(x+4)$

$\beta > -\alpha$ 이므로 ($\because y = f(x)$는 $x=-2$에 대하여 대칭인 함수이고 $f(\alpha)=2, \ f(\beta)=4$)

$-2 < \frac{\alpha+\beta}{2} < 0, \ g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 6$

$\int_{-2}^{2} g(x)h(x)\,dx$

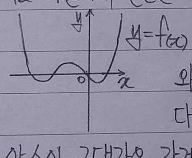
$= \int_{-2}^{0} 6h(x)\,dx + \int_{0}^{2} 4h(x)\,dx$

$= -24 + 144 = 120$

$\therefore g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\int_{-2}^{2} g(x)h(x)\,dx = 6 \times 120 = 720$

[자세한 풀이]

조건 (나)를 만족시키려면 $y=f(x)$는 적어도 서로 다른 세 실근을 가져야만 한다. 하지만



와 같이 $f(x)=0$이 서로 다른 4개의 실근을 갖게되면 양수인 극댓값을 갖게되어 $f(x)g(x) = g(x)$의 실근의 개수가 4개가 되므로 ($\because$ (가)) 조건 (다)를 만족시킬 수 없다.

[자세한 풀이]

$h(x) = \frac{f(x)}{x+2} = \frac{f(x)-0}{x-(-2)}$ 이므로

$h(x)$의 값은 $(-2, 0)$과 $(x, f(x))$의 평균 변화율과 같다.

$-\alpha < -2$인 경우, $-\alpha = -2$인 경우, $-\alpha > -2$인 경우 전부 다 $h(x)=0$의 실근은 $x = -2a, -a, 0$ 으로 같다. 식으로 접근하면 $x=-2$일 때를 주의해야 한다.

[참고] "$h(x) = \frac{f(x)}{x+2}$를 평균 변화율로 해석함"은 2017. 수능 #30과 여타 기출 문제에 출제된 바 있다.

[참고] "사차 이하의 다항함수의 개형 추론"은 2017. 수능 #30과 여타 기출 문제에 출제된 바 있다.

∘

∘

∘

출제 기간 : 약 1년 (2017 ~ 2018)

검토 기간 : 약 3개월

출제자 : 하 승진 (21)

검토자 : 전 상현 (전 문항 검토) (2?)

김 장현(20) 송근호(비킬러 전문항 검토)(20)

제작 지원 : 이종원T 권유민T 김성보(20)

문제지 편집 : 송근호(20) 하승진(21)

작년(2017) 이맘때 즈음 강남대성기숙학원에서 단순한 지적 유희 추구와 지루한 수험 생활에 변화를 준다는 생각으로 시작된 "수학 문제 만들기"가 쌓여 여기까지 오게 되었네요 ㅎㅎ

역시, 저는 프로 출제자가 아니기에, 전반적 난이도 벨런스, 개별 문항에 대한 적합성이 저와 여러분이 설정한 '평가원'이라는 기준에 한참 못 미칠 수도 있습니다.

하지만, 하찮아 보이는 #1 부터 #30 까지 여러분이 생각하는 것 이상으로 수많은 시간, 고뇌, 노력이 녹아 있으니 아무쪼록 얻어가는 것이 있기를 바라며 우리의 2019 수능의 전승을 기원합니다.

p.s. 오류, 오자 제보는 2D반으로!

2018. 8. 18 하승진.

2019 공정강하 모의고사

DATE.

공정강하 [空庭降下]feat.근호

: 항공기로 수송되어 낙하산을 타고 전투 지역이나 후방에 침투하는 작전 또는 행위

♥PBY♥