8th Technic. 공간도형방정식 활용하기

공간도형을 해석적으로 접근하는 법을 익혀야 한다.

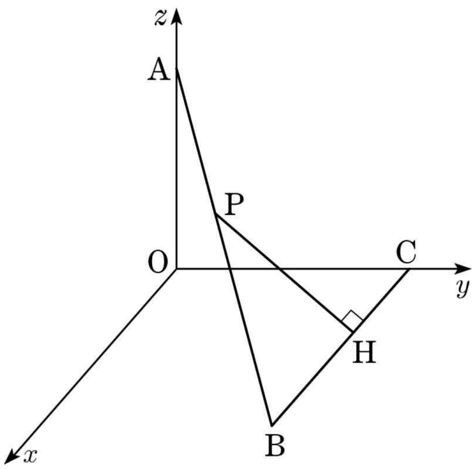
-E.T-

공간도형 레시피

1. 공간도형과 정사형
2. 공간도형의 방정식 활용하기

1. 공간도형과 정사형

1. 그림과 같이 좌표공간에 세 점 A$(0, 0, 3)$, B$(5, 4, 0)$, C$(0, 4, 0)$이 있다. 선분 AB 위의 한 점 P에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\overline{\mathrm{PH}}=3$이다. 삼각형 PBH의 xy평면 위로의 정사영의 넓이는?

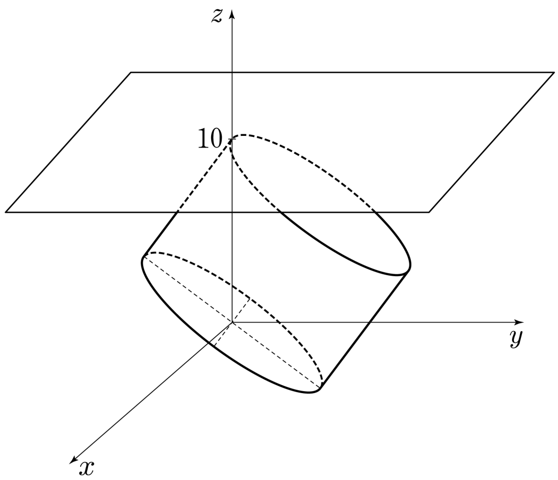


① $\frac{14}{5}$ ② $\frac{16}{5}$ ③ $\frac{18}{5}$ ④ 4 ⑤ $\frac{22}{5}$

2. 좌표공간에 있는 원기둥이 다음 조건을 만족시킨다.

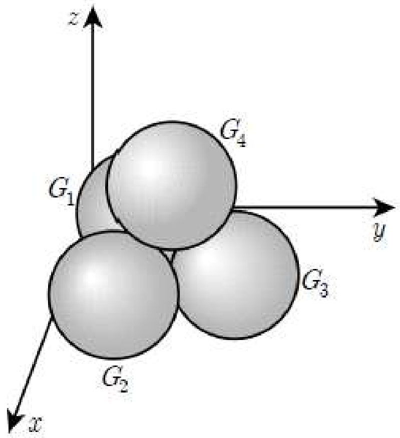
(가) 높이는 8이다.
(나) 한 밑면의 중심은 원점이고 다른 밑면은 평면 $z=10$과 오직 한 점 $(0, 0, 10)$에서 만난다.

이 원기둥의 한 밑면의 평면 $z=10$ 위로의 정사영의 넓이는?



① $\dfrac{139}{5}\pi$ ② $\dfrac{144}{5}\pi$ ③ $\dfrac{149}{5}\pi$
④ $\dfrac{154}{5}\pi$ ⑤ $\dfrac{159}{5}\pi$

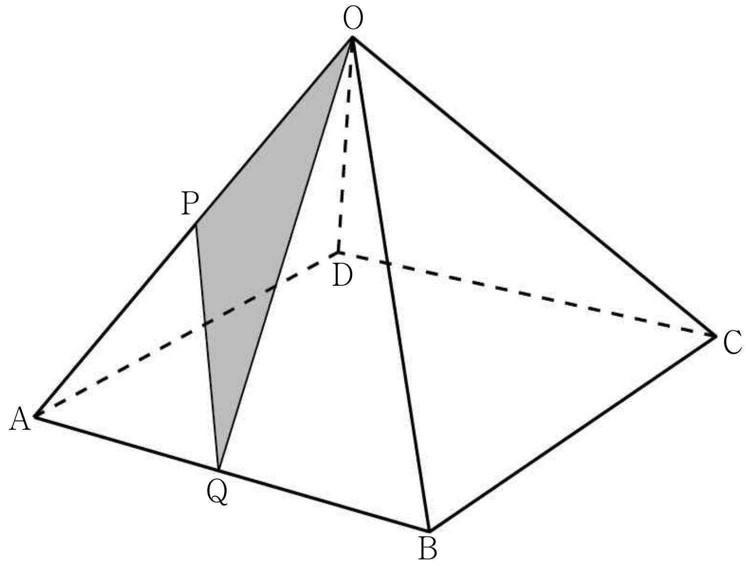
3. 그림과 같이 좌표공간에서 반지름의 길이가 1인 네 개의 구 G_1, G_2, G_3, G_4가 서로 접한다. 세 구 G_1, G_2, G_3은 xy평면에 접하고, 구 G_1, G_2는 zx평면에 접하고, 구 G_1은 yz평면에 접한다. 세 구 G_1, G_2, G_4 각각의 중심을 연결한 삼각형의 zx평면 위로의 정사영의 넓이는?



① $\frac{\sqrt{6}}{6}$ ② $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{6}}{2}$

④ $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{6}}{6}$

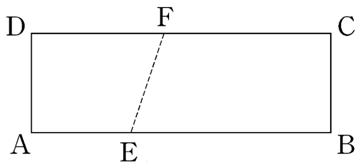
4. 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형을 밑면으로 하고 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=\overline{OD}=2\sqrt{5}$인 정사각뿔 $O-ABCD$가 있다. 두 선분 OA, AB의 중점을 각각 P, Q라 할 때, 삼각형 OPQ의 평면 OCD 위로의 정사영의 넓이는?4) [4점] [2017년 7월 교육청]

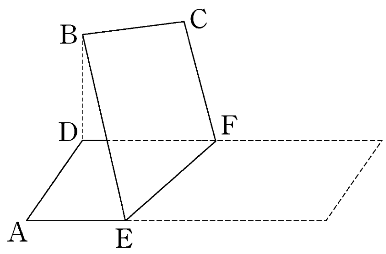


① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

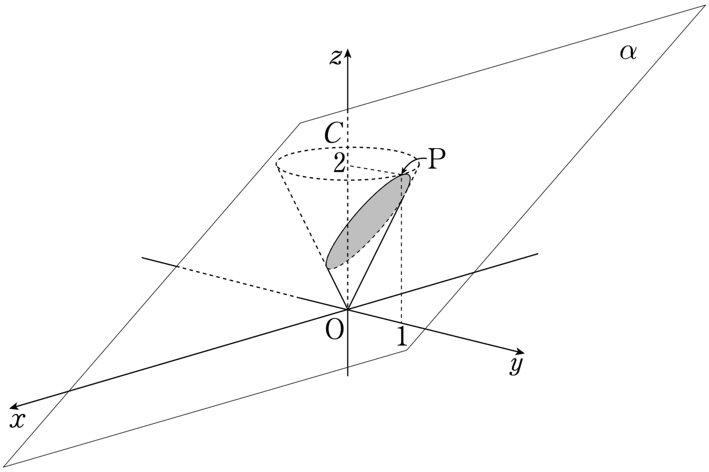
2. 공간도형의 방정식 활용하기

5. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=9$, $\overline{\mathrm{AD}}=3$인 직사각형 ABCD모양의 종이가 있다. 선분 AB위의 점 E와 선분 DC위의 점 F를 연결하는 선을 접는 선으로 하여, 점 B의 평면 AEFD 위로의 정사영이 점 D가 되도록 종이를 접었다. $\overline{\mathrm{AE}}=3$일 때, 두 평면 AEFD와 EFCB가 이루는 각의 크기가 θ이다. $60\cos\theta$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이고, 종이의 두께는 고려하지 않는다.)

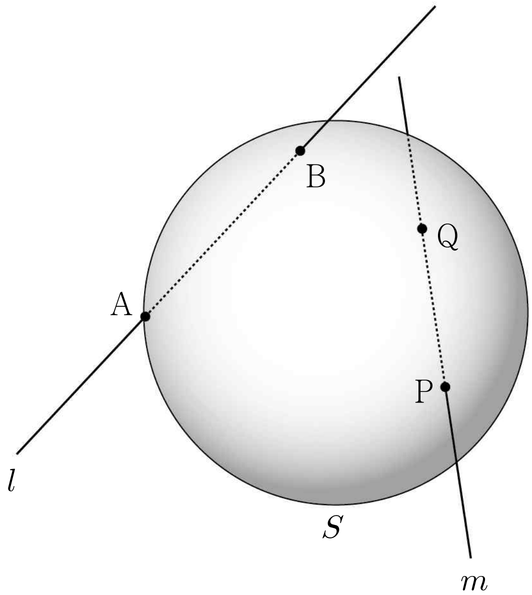




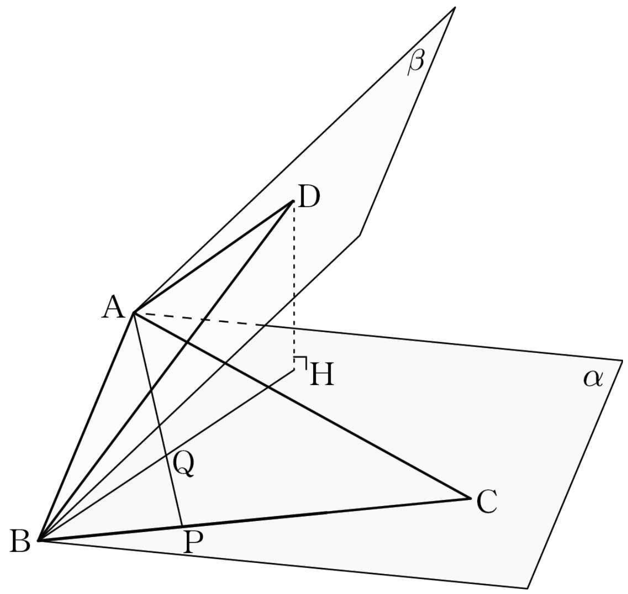
6. 좌표공간에 평면 $z=2$ 위의 원 $C: x^2+y^2=1$을 밑면으로 하고 꼭짓점이 원점인 원뿔이 있다. 원 C와 한 점 $\mathrm{P}(0, 1, 2)$에서만 만나는 평면 α가 이 원뿔과 만나서 생길 수 있는 도형 중 한 타원을 S라 하자. 타원 S의 xy평면 위로의 정사영은 장축의 길이가 $\frac{5}{4}$인 타원이다. 평면 α와 z축이 만나서 생기는 좌표가 $(0, 0, k)$일 때, $50k$의 값을 구하시오.[6] [4점] [2017년 10월 교육청]



7. 그림과 같이 반지름의 길이가 2인 구 S와 서로 다른 두 직선 l, m이 있다. 구 S와 직선 l이 만나는 서로 다른 두 점을 각각 A, B, 구 S와 직선 m이 만나는 서로 다른 두 점을 각각 P, Q라 하자. 삼각형 APQ는 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$인 정삼각형이고 $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{2}$, $\angle\mathrm{ABQ}=\dfrac{\pi}{2}$일 때 평면 APB와 평면 APQ가 이루는 각의 크기 θ에 대하여 $100\cos^2\theta$의 값을 구하시오.[7] [4점] [2016년 7월 교육청]

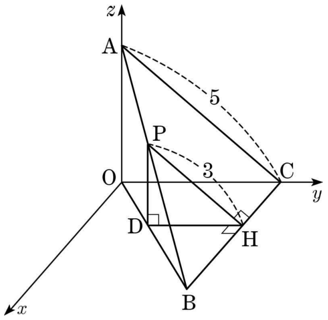


8. 그림과 같이 평면 α 위에 넓이가 27인 삼각형 ABC가 있고, 평면 β 위에 넓이가 35인 삼각형 ABD가 있다. 선분 BC를 $1:2$로 내분하는 점을 P라 하고 선분 AP를 $2:1$로 내분하는 점을 Q라 하자. 점 D에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 Q는 선분 BH의 중점이다. 두 평면 α, β가 이루는 각을 θ라 할 때, $\cos\theta=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)[8] [4점] [2016년 10월 교육청]



정답과 해설

1) 정답 ③
[출제의도] 닮음 도형을 이용하여 정사영 문제를 해결한다.



$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{3^2+4^2}=5$, $\overline{\mathrm{AC}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$

이므로 평면 ABC와 xy평면이 이루는 각의 크기를 θ라 하면 $\cos\theta=\dfrac{4}{5}$이다.

두 직각삼각형 ABC, PBH는 서로 닮은 도형이고

$\overline{\mathrm{BH}}:\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{PH}}:\overline{\mathrm{AC}}=3:5$

$\overline{\mathrm{BH}}=\dfrac{3}{5}\overline{\mathrm{BC}}=3$

$\therefore\ \triangle\mathrm{PBH}=\dfrac{1}{2}\times3\times3=\dfrac{9}{2}$

따라서 삼각형 PBH의 xy평면 위로의 정사영의 넓이를 S라 하면

$S=\triangle\mathrm{PBH}\cdot\cos\theta=\dfrac{9}{2}\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{18}{5}$

[다른 풀이]
점 P에서 xy평면에 내린 수선의 발을 D라 하자.
$\overline{\mathrm{PD}}\perp(xy$평면$)$, $\overline{\mathrm{PH}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$이므로 삼수선의 정리에 의해 $\overline{\mathrm{DH}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$이다.
따라서 두 직각삼각형 ABC, PBH는 서로 닮은 도형이고

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{3^2+4^2}=5$, $\overline{\mathrm{PH}}=3$

이므로

$\overline{\mathrm{BH}}:\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{PH}}:\overline{\mathrm{AC}}=3:5$

$\therefore\ \overline{\mathrm{BH}}=\dfrac{3}{5}\overline{\mathrm{BC}}=3$

또, 두 직각삼각형 OBC, DBH는 서로 닮은 도형이고

$\overline{\mathrm{OC}}=4$, $\overline{\mathrm{BH}}=3$

이므로

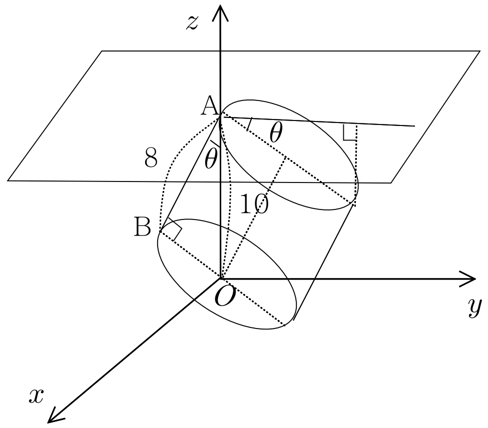
$\overline{\mathrm{DH}}:\overline{\mathrm{OC}}=\overline{\mathrm{BH}}:\overline{\mathrm{BC}}=3:5$

$\therefore\ \overline{\mathrm{DH}}=\dfrac{3}{5}\overline{\mathrm{OC}}=\dfrac{12}{5}$

따라서 삼각형 PBH의 xy평면 위로의 정사영인 삼각형 DBH의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{BH}}\cdot\overline{\mathrm{DH}}=\dfrac{1}{2}\times3\times\dfrac{12}{5}=\dfrac{18}{5}$

이다.
2) 정답 ②



그림의 직각삼각형 ABO에서

$\overline{\mathrm{OA}}=10,\ \overline{\mathrm{AB}}=8$

이므로

$\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{10^2-8^2}=6$

원기둥의 한 밑면과 평면 $z=10$이 이루는 각의 크기를 θ라 하면 각 OAB의 크기도 θ이므로

$$\cos\theta=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$$

이때, 원기둥의 한 밑면의 넓이를 S, 이 밑면의 평면 $z=10$ 위로의 정사영의 넓이를 S'이라 하면

$S=\pi\times6^2=36\pi$

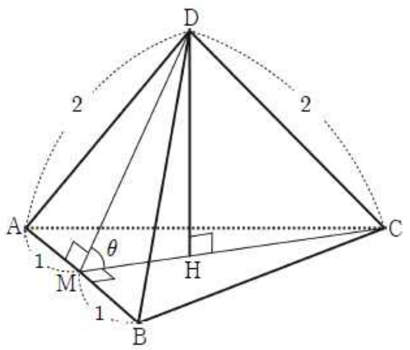
$S'=S\times\cos\theta$

$=36\pi\times\frac{4}{5}$

$=\frac{144}{5}\pi$

3) 정답 ④

[출제의도] 공간도형의 성질을 활용하여 문제해결하기



네 개의 구 $G_1,\ G_2,\ G_3,\ G_4$의 중심을 각각 $A,\ B,\ C,\ D$라 하면 사면체 $ABCD$는 한 모서리의 길이가 2인 정사면체이다. 평면 DAB와 평면 CAB가 이루는 각의 크기를 θ라 하면 평면 DAB와 zx평면이 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{2}-\theta$이다. 정사면체에서 $\cos\theta=\frac{1}{3}$이므로

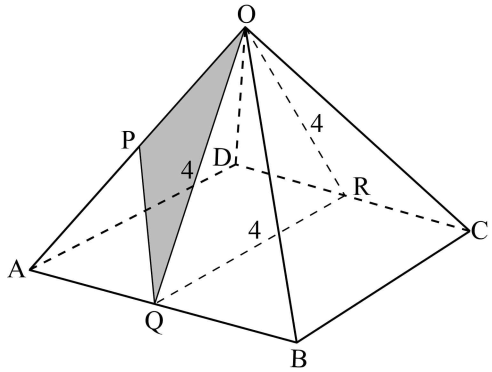
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

따라서 구하고자 하는 넓이는

$\triangle ABD \times \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

4) [출제의도] 정사영 이해하기

선분 CD의 중점을 R라 하자.



두 평면 OAB, OCD가 이루는 예각 θ는

$\theta = \angle \mathrm{QOR}$이다.

$\overline{\mathrm{OQ}} = \overline{\mathrm{OR}} = \overline{\mathrm{QR}} = 4$이므로

삼각형 QOR는 정삼각형이다.

그러므로 $\cos\theta = \frac{1}{2}$

점 P는 선분 OA의 중점이므로

삼각형 OPQ의 넓이를 S라 하면

$S = \frac{1}{2} \times$(삼각형 OAQ의 넓이)$= \frac{1}{2} \times 4 = 2$

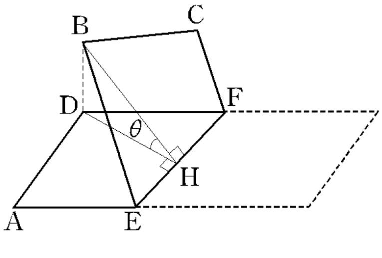
삼각형 OPQ의 평면 OCD 위로의 정사영의 넓이를 S'라 하면

$S' = S\cos\theta = 2 \times \frac{1}{2} = 1$

5) 정답 40

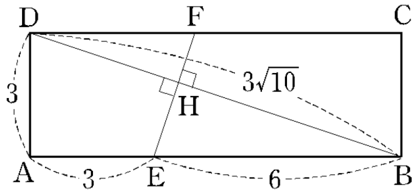
B에서 $\overline{\mathrm{EF}}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼수선의 정리에 의해 $\overline{\mathrm{DH}} \perp \overline{\mathrm{EF}}$

θ는 두 평면의 교선 $\overline{\mathrm{EF}}$ 수직인 $\overline{\mathrm{BH}}$와 $\overline{\mathrm{DH}}$가 이루는 각은 두 평면 AEFD와 EFCB가 이루는 각과 같다.



$\cos\theta = \frac{\overline{\mathrm{DH}}}{\overline{\mathrm{BH}}}$

이제 종이를 다시 펼치면 그림과 같다.



$\triangle \mathrm{BDA} \backsim \triangle \mathrm{BEH}$이므로

$\overline{\mathrm{EB}} : \overline{\mathrm{HB}} = \overline{\mathrm{DB}} : \overline{\mathrm{AB}}$

$\overline{\mathrm{HB}} = \dfrac{9 \cdot 6}{3\sqrt{10}} = \dfrac{18}{\sqrt{10}}$

$\overline{\mathrm{DH}} = \overline{\mathrm{DB}} - \overline{\mathrm{BH}} = 3\sqrt{10} - \dfrac{18}{\sqrt{10}} = \dfrac{12}{\sqrt{10}}$

$\therefore \quad \cos\theta = \dfrac{\overline{\mathrm{DH}}}{\overline{\mathrm{BH}}} = \dfrac{2}{3}$

$\therefore \quad 60\cos\theta = 60 \times \dfrac{2}{3} = 40$

28. [출제의도] 정사영을 활용하여 문제해결하기

구 S의 중심을 O라 하면 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$인 정삼각형 APQ의 무게중심은 점 O와 같다. 점 P에서 선분 AQ에 내린 수선의 발을 O′라 하면 점 O′는 선분 AQ의 중점이고

$\angle \mathrm{ABQ} = \dfrac{\pi}{2}$이므로 점 B는 점 O′를 중심으로 하고 반지름이 선분 AO′인 원 위의 점이다.

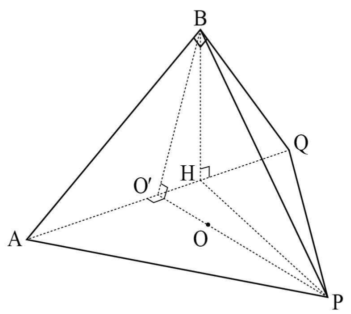
삼각형 BO′O에서

$\overline{\mathrm{O'B}} = \sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{OB}} = 2$, $\overline{\mathrm{OO'}} = 1$ 이므로

$\angle \mathrm{BO'O} = \dfrac{\pi}{2}$

그러므로 $\overline{\mathrm{OO'}} \perp \overline{\mathrm{O'B}}$, $\overline{\mathrm{PO'}} \perp \overline{\mathrm{O'B}}$

$\overline{\mathrm{AO'}} \perp \overline{\mathrm{PO'}}$, $\overline{\mathrm{PO'}} \perp \overline{\mathrm{O'B}}$이므로 직선 PO′는 평면 ABQ와 수직이고, 평면 ABQ와 평면 APQ는 수직이다. 그러므로 점 B에서 선분 AQ에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 APB의 평면 APQ 위로의 정사영은 삼각형 APH이다.



삼각형 BO′P는 직각삼각형이고 $\overline{\mathrm{O'B}} = \sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{O'P}} = 3$이므로 $\overline{\mathrm{PB}} = 2\sqrt{3}$

삼각형 APB는 $\overline{\mathrm{PA}} = \overline{\mathrm{PB}} = 2\sqrt{3}$인 이등변삼각형이고, $\overline{\mathrm{AB}} = 2\sqrt{2}$이므로 삼각형 APB의 넓이는

$\dfrac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{10} = 2\sqrt{5}$

삼각형 ABQ와 삼각형 AHB는 닮음이므로

$\overline{\mathrm{AH}} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

그러므로 삼각형 APH 의 넓이는

$\dfrac{1}{2} \times \dfrac{4\sqrt{3}}{3} \times 3 = 2\sqrt{3}$

$\cos\theta = \dfrac{(\text{삼각형 APH의 넓이})}{(\text{삼각형 APB의 넓이})} = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$

따라서 $100\cos^2\theta = 100 \times \dfrac{3}{5} = 60$

29. [출제의도] 정사영의 성질을 이용하여 두 평면이 이루는 각을 구한다.

점 P 가 선분 BC 를 $1:2$ 로 내분하는 점이므로

$\triangle\mathrm{ABP} = \dfrac{1}{3} \times \triangle\mathrm{ABC} = \dfrac{1}{3} \times 27 = 9$

점 Q 가 선분 AP 를 $2:1$ 로 내분하는 점이므로

$\triangle\mathrm{ABQ} = \dfrac{2}{3} \times \triangle\mathrm{ABP} = \dfrac{2}{3} \times 9 = 6$

점 Q 가 선분 BH 의 중점이므로

$\triangle\mathrm{ABH} = 2 \times \triangle\mathrm{ABQ} = 2 \times 6 = 12$

삼각형 ABD 의 평면 α 로의 정사영이

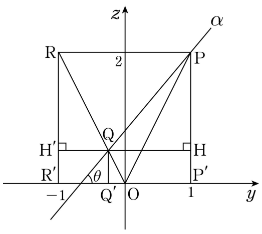
삼각형 ABH 이므로

$\triangle\mathrm{ABD} \times \cos\theta = \triangle\mathrm{ABH}$에서 $\cos\theta = \dfrac{12}{35}$

따라서 $p+q=47$

6) [출제의도] 평면과 원뿔이 만나서 이루는 도형을 추측하여 좌표를 구한다.

원뿔을 yz평면으로 자른 단면은 yz평면 위의 두 점 $\mathrm{P}(0,\ 1,\ 2)$, $\mathrm{R}(0,\ -1,\ 2)$와 원점 O를 세 꼭짓점으로 하는 삼각형 OPR이다.



선분 OR와 평면 α의 교점을 Q라 하자.

두 점 P, Q를 xy평면에 내린 정사영을 각각 P′, Q′이라 할 때 도형 S의 xy평면 위로의 정사영의 장축의 길

이는 선분 $P'Q'$의 길이와 같다. 즉, $\overline{P'Q'}=\frac{5}{4}$

점 Q에서 선분 PP', RR'에 내린 수선의 발을 각각 H, H'이라 하고 평면 α와 xy평면이 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\overline{RH'}=\overline{PH}=\overline{QH}\tan\theta=\overline{Q'P'}\tan\theta=\frac{5}{4}\tan\theta$

$\overline{QH'}=\overline{P'R'}-\overline{P'Q'}=2-\frac{5}{4}=\frac{3}{4}$

삼각형 $RR'O$와 삼각형 $RH'Q$는 닮음이므로

$\frac{\overline{RR'}}{\overline{OR'}}=\frac{\overline{RH'}}{\overline{QH'}}$ 에서

$\frac{\overline{RR'}}{\overline{OR'}}=2$이고 $\frac{\overline{RH'}}{\overline{QH'}}=\frac{\frac{5}{4}\tan\theta}{\frac{3}{4}}=\frac{5\tan\theta}{3}$ 이므로 $\tan\theta=\frac{6}{5}$

평면 α가 z축과 만나서 생기는 좌표가 $(0,0,k)$이므로 $\tan\theta=\frac{2-k}{1}=\frac{6}{5}$

따라서 $k=\frac{4}{5}$이므로 $50k=40$

7) [출제의도] 정사영을 활용하여 문제해결하기

구 S의 중심을 O라 하면 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$인 정삼각형 APQ의 무게중심은 점 O와 같다. 점 P에서 선분 AQ에 내린 수선의 발을 O'라 하면 점 O'는 선분 AQ의 중점이고

$\angle ABQ=\frac{\pi}{2}$ 이므로 점 B는 점 O'를 중심으로 하고 반지름이 선분 AO'인 원 위의 점이다.

삼각형 $BO'O$에서

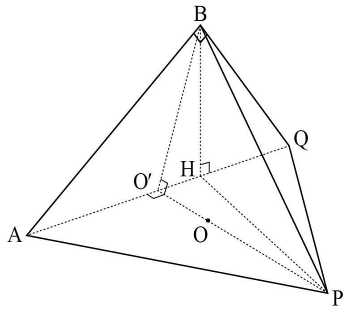
$\overline{O'B}=\sqrt{3}$, $\overline{OB}=2$, $\overline{OO'}=1$이므로

$\angle BO'O=\frac{\pi}{2}$

그러므로 $\overline{OO'}\perp\overline{O'B}$, $\overline{PO'}\perp\overline{O'B}$

$\overline{AO'}\perp\overline{PO'}$, $\overline{PO'}\perp\overline{O'B}$ 이므로 직선 PO'는 평면 ABQ와 수직이고, 평면 ABQ와 평면 APQ는 수직이다.

그러므로 점 B에서 선분 AQ에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 APB의 평면 APQ 위로의 정사영은 삼각형 APH이다.



삼각형 BO′P 는 직각삼각형이고 $\overline{\mathrm{O'B}}=\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{O'P}}=3$ 이므로 $\overline{\mathrm{PB}}=2\sqrt{3}$

삼각형 APB 는 $\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}}=2\sqrt{3}$ 인 이등변삼각형이고, $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{2}$ 이므로 삼각형 APB 의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times\sqrt{10}=2\sqrt{5}$

삼각형 ABQ 와 삼각형 AHB 는 닮음이므로

$\overline{\mathrm{AH}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

그러므로 삼각형 APH 의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{3}}{3}\times 3=2\sqrt{3}$

$\cos\theta=\frac{(\text{삼각형 APH의 넓이})}{(\text{삼각형 APB의 넓이})}=\frac{\sqrt{15}}{5}$

따라서 $100\cos^2\theta=100\times\frac{3}{5}=60$

8) [출제의도] 정사영의 성질을 이용하여 두 평면이 이루는 각을 구한다.

점 P 가 선분 BC 를 1:2 로 내분하는 점이므로

$\triangle\mathrm{ABP}=\frac{1}{3}\times\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{3}\times 27=9$

점 Q 가 선분 AP 를 2:1 로 내분하는 점이므로

$\triangle\mathrm{ABQ}=\frac{2}{3}\times\triangle\mathrm{ABP}=\frac{2}{3}\times 9=6$

점 Q 가 선분 BH 의 중점이므로

$\triangle\mathrm{ABH}=2\times\triangle\mathrm{ABQ}=2\times 6=12$

삼각형 ABD 의 평면 α 로의 정사영이

삼각형 ABH 이므로

$\triangle\mathrm{ABD}\times\cos\theta=\triangle\mathrm{ABH}$에서 $\cos\theta=\frac{12}{35}$

따라서 $p+q=47$