

E.T's Eight Technics.

Ver. 2019

Seventh Technic.

삼각함수

삼각함수와 도형의 콜라보레이션

$\sin x$ 를 0으로 보내면 x 로 바뀌는 마법 ~ ♫

- E . T -

삼각함수

레시피

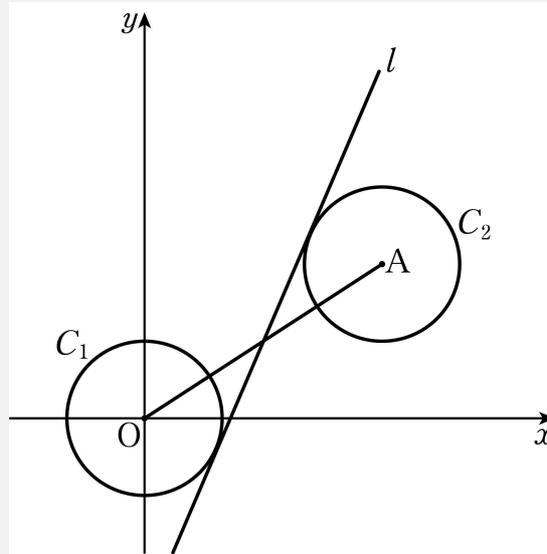
1. 삼각함수의 덧셈정리

2. 삼각함수의 극한

1. 삼각함수의 덧셈정리

Question. 01

좌표평면에 중심이 원점 O 이고 반지름의 길이가 3인 원 C_1 과 중심이 점 $A(t, 6)$ 이고 반지름의 길이가 3인 원 C_2 가 있다. 그림과 같이 기울기가 양수인 직선 l 이 선분 OA 와 만나고, 두 원 C_1, C_2 에 각각 접할 때, 다음은 직선 l 의 기울기를 t 에 대한 식으로 나타내는 과정이다. (단, $t > 6$)



직선 OA 가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 α , 점 O 를 지나고 직선 l 에 평행한 직선 m 이 직선 OA 와 이루는 예각의 크기를 β 라 하면

$$\tan \alpha = \frac{6}{t}$$

$$\tan \beta = \boxed{\text{(가)}}$$

이다.

직선 l 이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\theta = \alpha + \beta$$

이므로

$$\tan \theta = \boxed{\text{(나)}}$$

이다.

따라서 직선 l 의 기울기는 $\boxed{\text{(나)}}$ 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(t)$, $g(t)$ 라 할 때, $\frac{g(8)}{f(7)}$ 의 값은? ¹⁾

[4점] [2016년 3월 교육청]

① 2

② $\frac{5}{2}$

③ 3

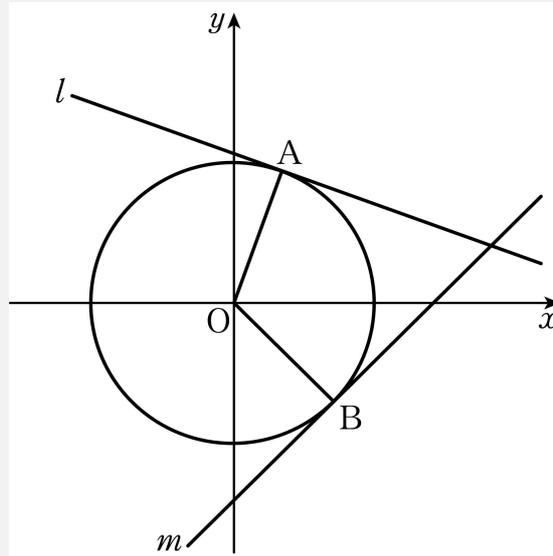
④ $\frac{7}{2}$

⑤ 4

Question. 02

그림과 같이 기울기가 $-\frac{1}{3}$ 인 직선 l 이 원 $x^2+y^2=1$ 과 점 A에서 접하고, 기울기가 1인 직선 m 이 원 $x^2+y^2=1$ 과 점 B에서 접한다. $100\cos^2(\angle AOB)$ 의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)

[4점] [2016년 3월 교육청]



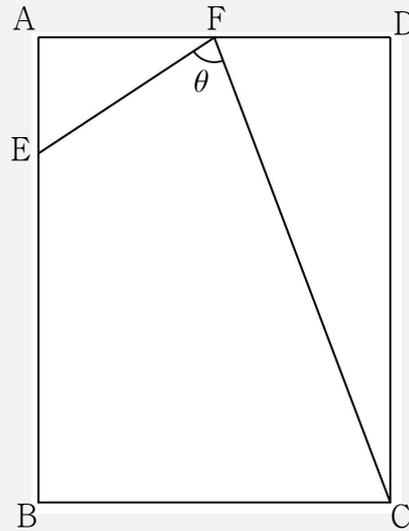
Question. 03

그림과 같이 선분 AB의 길이가 8, 선분 AD의 길이가 6인 직사각형 ABCD가 있다.

선분 AB를 1:3으로 내분하는 점을 E, 선분 AD의 중점을 F라 하자.

$\angle EFC = \theta$ 라 할 때, $\tan \theta$ 의 값은?

[4점] [2017년 4월 교육청]



① $\frac{22}{7}$

② $\frac{26}{7}$

③ $\frac{30}{7}$

④ $\frac{34}{7}$

⑤ $\frac{38}{7}$

2. 삼각함수와 극한의 활용

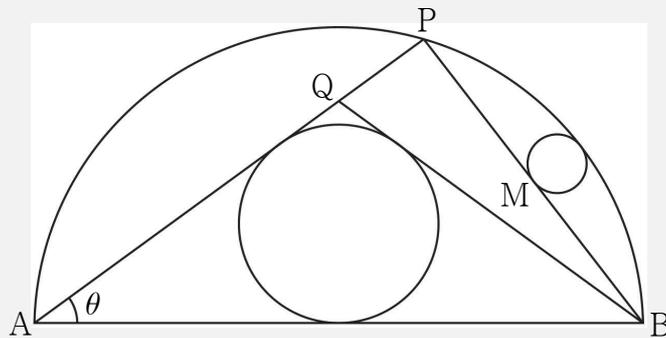
Question. 04

그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다.

호 AB 위의 한 점 P에 대하여 $\angle PAB = \theta$ 라 하자. 선분 PB의 중점 M에서 선분 PB에 접하고 호 PB에 접하는 원의 넓이를 $S(\theta)$, 선분 AP 위에 $\overline{AQ} = \overline{BQ}$ 가 되도록 점 Q를 잡고 삼각형 ABQ에 내접하는 원의 넓이를 $T(\theta)$ 라 하자.

$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\theta^2 \times T(\theta)}{S(\theta)}$ 의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$)

[4점] [2016년 4월 교육청]



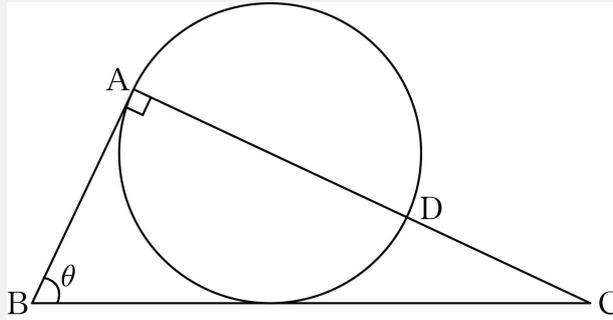
Question. 05

그림과 같이 $\overline{BC}=1$, $\angle A = \frac{\pi}{2}$, $\angle B = \theta$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위의 점

D에 대하여 선분 AD를 지름으로 하는 원이 선분 BC와 접할 때, $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\overline{CD}}{\theta^3} = k$ 라 하자.

$100k$ 의 값을 구하시오.

[4점] [2016년 10월 교육청]



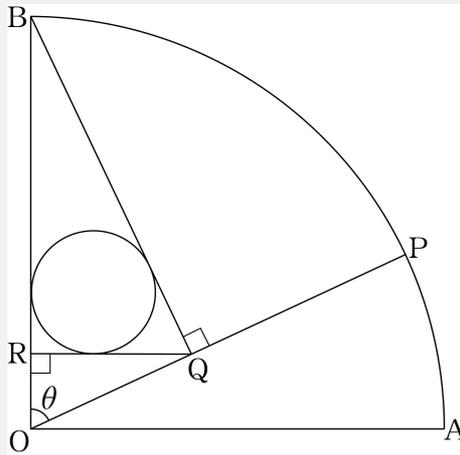
Question. 06

그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$ 인 부채꼴 OAB가 있다.

호 AB 위의 점 P에 대하여 점 B에서 선분 OP에 내린 수선의 발을 Q, 점 Q에서 선분 OB에 내린 수선의 발을 R라 하자. $\angle BOP = \theta$ 일 때, 삼각형 RQB에 내접하는 원의 반지름의 길이를

$r(\theta)$ 라 하자. $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{r(\theta)}{\theta^2}$ 의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)

[4점] [2017년 3월 교육청]



① $\frac{1}{2}$

② 1

③ $\frac{3}{2}$

④ 2

⑤ $\frac{5}{2}$

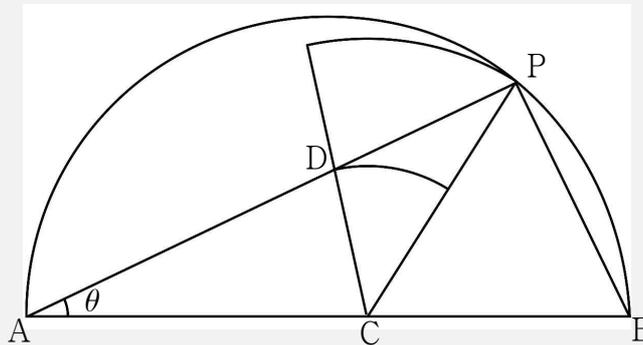
Question. 07

그림과 같이 길이가 1인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다.

호 AB 위의 점 P에 대하여 $\overline{BP} = \overline{BC}$ 가 되도록 선분 AB 위의 점 C를 잡고, $\overline{AC} = \overline{AD}$ 가 되도록 선분 AP 위의 점 D를 잡는다. $\angle PAB = \theta$ 에 대하여 선분 CD를 반지름으로 하고 중심각의 크기가 $\angle PCD$ 인 부채꼴의 넓이를 $S(\theta)$, 선분 CP를 반지름으로 하고 중심각의 크기가 $\angle PCD$ 인 부채꼴의 넓이를 $T(\theta)$ 라 할 때, $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{T(\theta) - S(\theta)}{\theta^2}$ 의 값은?

(단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 이고 $\angle PCD$ 는 예각이다.)

[4점] [2017년 4월 교육청]



① $\frac{\pi}{16}$

② $\frac{\pi}{8}$

③ $\frac{3}{16}\pi$

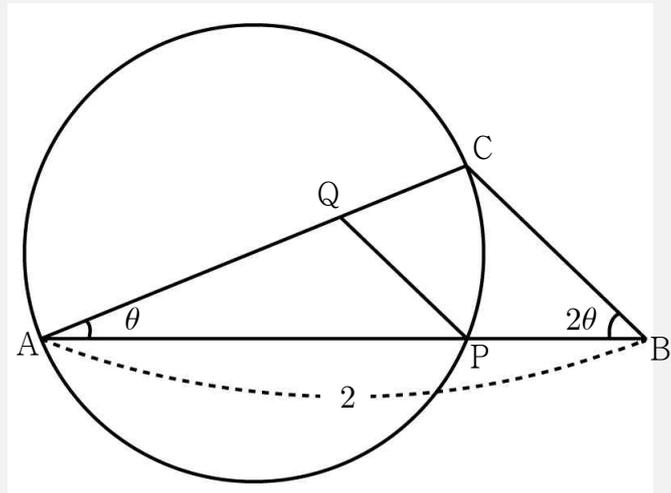
④ $\frac{\pi}{4}$

⑤ $\frac{5}{16}\pi$

Question. 08

그림과 같이 $\overline{AB}=2$ 이고 $\angle ABC = 2\angle BAC$ 를 만족하는 삼각형 ABC가 있다.
 선분 AC를 지름으로 하는 원과 직선 AB가 만나는 점 중 A가 아닌 점을 P, 점 P를 지나고
 선분 BC에 평행한 직선이 선분 AC와 만나는 점을 Q라 하자. $\angle BAC = \theta$ 라 할 때,
 삼각형 APQ의 넓이를 $S(\theta)$ 라 하자. $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{\theta}$ 의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$)

[4점] [2017년 7월 교육청]

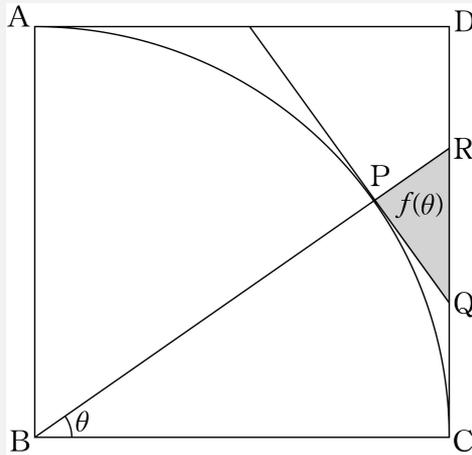


- ① $\frac{16}{27}$
- ② $\frac{17}{27}$
- ③ $\frac{2}{3}$
- ④ $\frac{19}{27}$
- ⑤ $\frac{20}{27}$

Question. 09

그림과 같이 한 변의 길이가 3인 정사각형 ABCD 안에 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$ 이고 반지름의 길이가 3인 부채꼴 BCA가 있다. 호 AC 위의 점 P에서의 접선이 선분 CD와 만나는 점을 Q, 선분 BP의 연장선이 선분 CD와 만나는 점을 R라 하자. $\angle PBC = \theta$ 일 때, 삼각형 PQR의 넓이를 $f(\theta)$ 라 하자. $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{8f(\theta)}{\theta^3}$ 의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$)

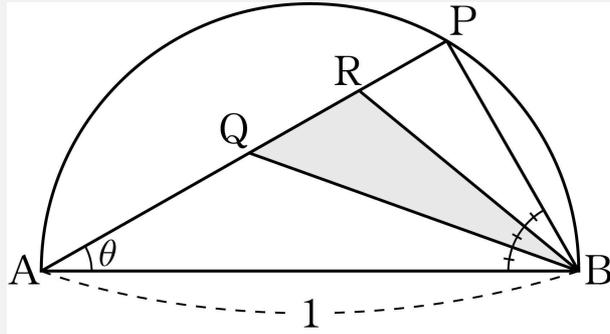
[4점] [2017년 10월 교육청]



Question. 10

그림과 같이 길이가 1인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위의 점 P에 대하여 $\angle ABP$ 를 삼등분하는 두 직선이 선분 AP와 만나는 점을 각각 Q, R라 하자. $\angle PAB = \theta$ 일 때, 삼각형 BRQ의 넓이를 $S(\theta)$ 라 하자. $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{\theta^2}$ 의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)

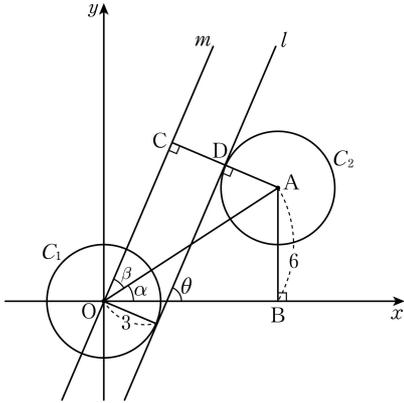
[4점] [2018년 3월 교육청]



- ① $\frac{1}{3}$
- ② $\frac{\sqrt{3}}{3}$
- ③ 1
- ④ $\sqrt{3}$
- ⑤ 3

[7th Technic. 삼각함수 정답 및 해설]

1) [출제의도] 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 직선의 기울기를 구하는 과정을 추론한다.
 직선 OA가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 α , 점 O를 지나고 직선 l에 평행한 직선 m이 직선 OA와 이루는 각의 크기를 β 라 하자. 점 A에서 x축과 직선 m에 내린 수선의 발을 각각 B, C라 하고, 선분 AC가 원 C_2 와 만나는 점을 D라 하자.



직각삼각형 OAC에서
 $\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{DC} = 3 + 3 = 6$ 이므로
 직각삼각형 AOB와 직각삼각형 OAC에서
 $\angle OBA = \angle OCA = 90^\circ$, $\overline{AB} = \overline{AC} = 6$,
 선분 OA는 공통이므로 $\triangle AOB \cong \triangle AOC$ 이다.
 $\angle AOB = \angle AOC$ 이므로 $\alpha = \beta$ 이다.

따라서 $\tan \alpha = \tan \beta = \frac{6}{t}$ 이다.

직선 l이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ 라 할 때, 두 직선 l, m이 평행하므로
 $\theta = \alpha + \beta$

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \tan(\alpha + \beta) \\ &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \\ &= \frac{\frac{6}{t} + \frac{6}{t}}{1 - \frac{6}{t} \times \frac{6}{t}} \\ &= \frac{12t}{t^2 - 36} \end{aligned}$$

따라서 $f(t) = \frac{6}{t}$, $g(t) = \frac{12t}{t^2 - 36}$ 이므로

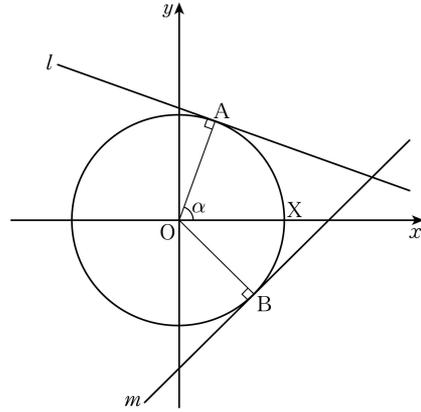
$$\frac{g(8)}{f(7)} = \frac{\frac{12 \times 8}{64 - 36}}{\frac{6}{7}} = \frac{\frac{96}{28}}{\frac{6}{7}} = 4$$

2) [출제의도] 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 문제를 해결한다.

두 직선 l과 m이 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 접하는 점이 각각 A, B이므로

$$\overline{OA} \perp l, \overline{OB} \perp m$$

원 $x^2 + y^2 = 1$ 이 x축의 양의 방향과 만나는 점을 X라 하고, $\angle AOX = \alpha$ 라 하자.



i) 점 A가 제1사분면에 있고, 점 B가 제4사분면에 있을 때

직선 OA가 직선 l과 수직이므로 직선 OA의 기울기는 3이다.

따라서

$$\tan \alpha = 3, \cos \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}, \sin \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

직선 OB가 직선 m과 수직이므로 직선 OB의 기울기는 -1이다.

따라서 $\angle XOB = \frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned} \cos(\angle AOB) &= \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \cos \alpha \cos \frac{\pi}{4} - \sin \alpha \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \alpha - \sin \alpha) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{10}}{10} - \frac{3\sqrt{10}}{10} \right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \left(-\frac{\sqrt{10}}{5} \right) = -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

ii) 점 A가 제1사분면에 있고, 점 B가 제2사분면에 있을 때

$$\tan \alpha = 3, \cos \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}, \sin \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

직선 OB가 직선 m과 수직이므로 직선 OB의 기울기는 -1이다.

따라서 $\angle XOB = \frac{3}{4}\pi$

$$\begin{aligned} \cos(\angle AOB) &= \cos\left(\frac{3}{4}\pi - \alpha\right) \\ &= \cos\frac{3}{4}\pi \cos\alpha + \sin\frac{3}{4}\pi \sin\alpha \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}(-\cos\alpha + \sin\alpha) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\sqrt{10}}{10} + \frac{3\sqrt{10}}{10}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{10}}{5} = \frac{\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

iii) 점 A가 제3사분면에 있고, 점 B가 제2사분면에 있을 때

$$\cos(\angle AOB) = -\frac{\sqrt{5}}{5} \text{ 이다.}$$

iv) 점 A가 제3사분면에 있고, 점 B가 제4사분면에 있을 때

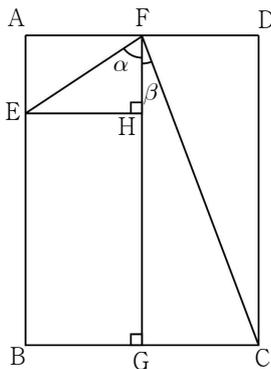
$$\cos(\angle AOB) = \frac{\sqrt{5}}{5} \text{ 이다.}$$

i), ii), iii), iv)로부터

$$\cos(\angle AOB) = -\frac{\sqrt{5}}{5} \text{ 또는 } \cos(\angle AOB) = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$100\cos^2(\angle AOB) = 100 \times \frac{1}{5} = 20$$

3) [출제의도] 삼각함수의 덧셈정리를 활용하여 문제해결하기
그림과 같이 점 F에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 G, 점 E에서 선분 FG에 내린 수선의 발을 H라 하자.



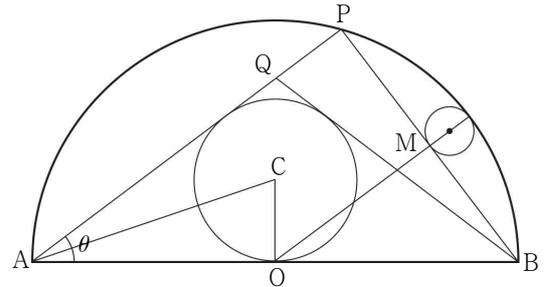
$\angle EFH = \alpha$, $\angle CFG = \beta$ 라 하면

$$\tan\alpha = \frac{3}{2}, \tan\beta = \frac{3}{8}$$

$\theta = \alpha + \beta$ 이므로

$$\tan\theta = \tan(\alpha + \beta) = \frac{\frac{3}{2} + \frac{3}{8}}{1 - \frac{3}{2} \times \frac{3}{8}} = \frac{30}{7}$$

4) [출제의도] 삼각함수의 극한을 활용하여 문제해결하기
그림과 같이 선분 AB의 중점을 O,
선분 PB와 호 PB에 접하는 원의 반지름의 길이를 r_1 ,
삼각형 ABQ에 내접하는 원의 중심을 C,
반지름의 길이를 r_2 라 하자.



$\angle MOB = \theta$ 이고 $\overline{OB} = 1$ 이므로 $\overline{OM} = \cos\theta$

$$\therefore r_1 = \frac{1 - \cos\theta}{2}, S(\theta) = \pi\left(\frac{1 - \cos\theta}{2}\right)^2$$

삼각형 CAO는 $\angle AOC = 90^\circ$ 인 직각삼각형이고

$$\angle CAO = \frac{\theta}{2}, \overline{OA} = 1$$

$$\therefore r_2 = \tan\frac{\theta}{2}, T(\theta) = \pi \tan^2\frac{\theta}{2}$$

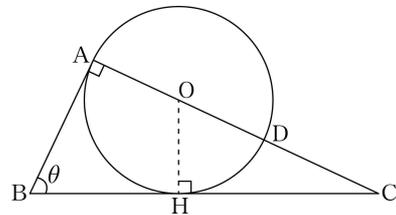
$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\theta^2 \times T(\theta)}{S(\theta)} = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\theta^2 \times \pi \tan^2\frac{\theta}{2}}{\pi\left(\frac{1 - \cos\theta}{2}\right)^2}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{4\theta^2 \times \tan^2\frac{\theta}{2}}{(1 - \cos\theta)^2}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left\{ 4 \times \frac{\theta^4}{\sin^4\theta} \times \frac{1}{4} \times \frac{\tan^2\frac{\theta}{2}}{\left(\frac{\theta}{2}\right)^2} \times (1 + \cos\theta)^2 \right\}$$

$$= 4 \times \frac{1}{4} \times 4 = 4$$

5) [출제의도] 도형의 성질을 이용하여 함수의 극한값을 추론한다.



선분 AD의 중점 O는 원의 중심이고, 점 O에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{AB} = \overline{BH} = \cos\theta \text{ 이므로 } \overline{CH} = 1 - \cos\theta$$

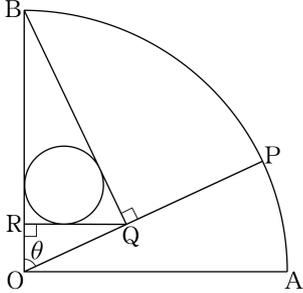
$$\overline{CA} = \sin\theta \text{ 이고 } \overline{CH}^2 = \overline{CA} \times \overline{CD} \text{ 이므로}$$

$$(1 - \cos\theta)^2 = \sin\theta \times \overline{CD}, \overline{CD} = \frac{(1 - \cos\theta)^2}{\sin\theta}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\overline{CD}}{\theta^3} &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{(1-\cos\theta)^2}{\sin\theta} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{(1-\cos\theta)^2(1+\cos\theta)^2}{\theta^3 \sin\theta (1+\cos\theta)^2} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{(1-\cos^2\theta)^2}{\theta^3 \sin\theta (1+\cos\theta)^2} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin^3\theta}{\theta^3} \times \frac{1}{(1+\cos\theta)^2} \right) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

따라서 $k = \frac{1}{4}$ 이므로 $100k = 25$

6) [출제의도] 도형의 성질과 삼각함수의 극한을 이용하여 문제를 해결한다.



$\angle BOQ = \theta$, $\overline{OB} = 1$ 이고 $\angle OQB = \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\overline{BQ} = \sin\theta$

또, $\angle RQB = \frac{\pi}{2} - \angle QBR = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \theta$, $\overline{BQ} = \sin\theta$ 이고

$\angle BRQ = \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\overline{BR} = \sin^2\theta, \quad \overline{RQ} = \sin\theta \cos\theta$$

삼각형 BRQ의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{BR} \times \overline{RQ} = \frac{1}{2} \times \sin^2\theta \times \sin\theta \cos\theta \quad \text{..... ㉠}$$

삼각형 BRQ에 내접하는 원의 성질을 이용하여 삼각형의 넓이를 구하면

$$\frac{1}{2} \times r(\theta) \times (\sin\theta + \sin\theta \cos\theta + \sin^2\theta) \quad \text{..... ㉡}$$

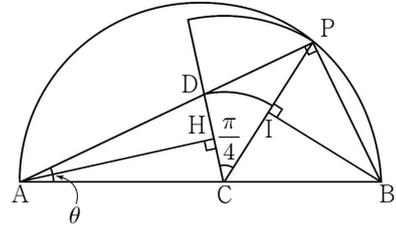
㉠, ㉡에 의해서

$$r(\theta) = \frac{\sin^2\theta \cos\theta}{1 + \sin\theta + \cos\theta}$$

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{r(\theta)}{\theta^2} &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2\theta \cos\theta}{\theta^2 (1 + \sin\theta + \cos\theta)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2\theta}{\theta^2} \times \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\cos\theta}{1 + \sin\theta + \cos\theta} \\ &= 1 \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

7) [출제의도] 삼각함수의 극한을 활용하여 문제해결하기



$\overline{AB} = 1$ 이고 $\angle APB = \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\overline{BP} = \sin\theta = \overline{BC}, \quad \overline{AC} = 1 - \sin\theta$$

삼각형 ACD에서 $\angle ACD = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$ 이고

삼각형 BPC에서 $\angle BCP = \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}$ 이므로

$$\angle PCD = \frac{\pi}{4}$$

점 A에서 \overline{CD} 에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{CD} = 2\overline{CH} = 2\overline{AC} \sin \frac{\theta}{2} = 2(1 - \sin\theta) \sin \frac{\theta}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore S(\theta) &= \frac{1}{2} \times 4(1 - \sin\theta)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \times \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\pi}{2} \times (1 - \sin\theta)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

점 B에서 \overline{CP} 에 내린 수선의 발을 I라 하면

$$\overline{CP} = 2\overline{CI} = 2\overline{BC} \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) = 2\sin\theta \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right)$$

$$\begin{aligned} \therefore T(\theta) &= \frac{1}{2} \times 4\sin^2\theta \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) \times \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\pi}{2} \sin^2\theta \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) \end{aligned}$$

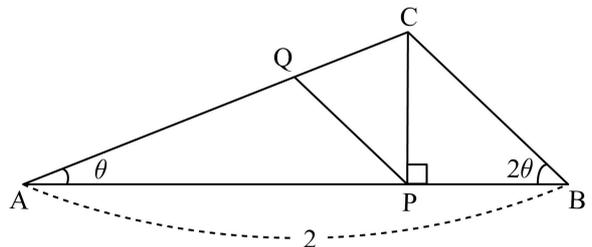
$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{T(\theta) - S(\theta)}{\theta^2}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{\sin^2\theta \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) - (1 - \sin\theta)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\theta^2} \right\}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{\sin^2\theta \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right)}{\theta^2} - \frac{(1 - \sin\theta)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{4 \times \frac{\theta^2}{4}} \right\}$$

$$= \frac{\pi}{2} \left(1 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \times 1 \right) = \frac{\pi}{8}$$

8) [출제의도] 함수의 극한을 활용하여 문제해결하기



선분 AC가 원의 지름이므로 $\angle APC = \frac{\pi}{2}$ 이다.

$\overline{AP} = a$, $\overline{AQ} = b$ 라 하자.

두 삼각형 APC와 CPB는 직각삼각형이므로

$$a \tan \theta = \overline{CP} = (2 - a) \tan 2\theta$$

$$a = \frac{2 \tan 2\theta}{\tan \theta + \tan 2\theta}$$

삼각형 ABC와 삼각형 APQ는 닮음이므로

$$\overline{AP} : \overline{AB} = \overline{AQ} : \overline{AC}$$

$$a : 2 = b : a \sec \theta$$

$$b = \frac{1}{2} a^2 \sec \theta$$

삼각형 APQ의 넓이를 $S(\theta)$ 라 할 때,

$$\begin{aligned} S(\theta) &= \frac{1}{2} \times a \times \frac{1}{2} a^2 \sec \theta \times \sin \theta = \frac{1}{4} \times a^3 \times \tan \theta \\ &= \frac{1}{4} \times \left(\frac{2 \tan 2\theta}{\tan \theta + \tan 2\theta} \right)^3 \times \tan \theta \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{\theta} &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{1}{4} \times \left(\frac{\frac{2 \tan 2\theta}{2\theta} \times 2}{\frac{\tan \theta}{\theta} + \frac{\tan 2\theta}{2\theta} \times 2} \right)^3 \times \frac{\tan \theta}{\theta} \right\} = \frac{16}{27} \end{aligned}$$

9) [출제의도] 도형의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

삼각형 BPQ와 삼각형 BCQ는 서로 합동이므로

$$\angle QBC = \frac{\theta}{2} \text{ 이고 } \overline{PQ} = \overline{QC} = 3 \tan \frac{\theta}{2}$$

직각삼각형 RPQ에서 $\angle RQP = \theta$ 이므로

$$\overline{PR} = \overline{PQ} \tan \theta = 3 \tan \frac{\theta}{2} \tan \theta$$

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \frac{1}{2} \times \overline{PQ} \times \overline{PR} \\ &= \frac{1}{2} \times 3 \tan \frac{\theta}{2} \times 3 \tan \frac{\theta}{2} \tan \theta = \frac{9}{2} \tan^2 \frac{\theta}{2} \tan \theta \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{8f(\theta)}{\theta^3} = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{36 \tan^2 \frac{\theta}{2} \tan \theta}{\theta^3} = 9$$

10) [출제의도] 삼각함수의 성질을 이용하여 삼각함수의 극한값을 구한다.

$\angle BPA = \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\angle QBR = \alpha$ 라 하면

$$3\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta$$

$$\alpha = \frac{\pi}{6} - \frac{\theta}{3}$$

$\overline{BP} = \sin \theta$ 이므로

$$\overline{PQ} = \sin \theta \tan 2\alpha$$

$$\overline{PR} = \sin \theta \tan \alpha$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned} S(\theta) &= \frac{1}{2} \times \overline{BP} \times \overline{PQ} - \frac{1}{2} \times \overline{BP} \times \overline{PR} \\ &= \frac{1}{2} \sin^2 \theta (\tan 2\alpha - \tan \alpha) \\ &= \frac{1}{2} \sin^2 \theta \left\{ \tan \left(\frac{\pi}{3} - \frac{2}{3} \theta \right) - \tan \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\theta}{3} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 \theta}{\theta^2} &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \right)^2 \\ &= 1 \text{ 이므로} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{\theta^2} &= \frac{1}{2} \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 \theta}{\theta^2} \left\{ \tan \left(\frac{\pi}{3} - \frac{2}{3} \theta \right) - \tan \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\theta}{3} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(\tan \frac{\pi}{3} - \tan \frac{\pi}{6} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$