

E.T's Eight Technics.

Ver. 2019

Sixth Technic.

이 차 곡 선

첫째는 정의 , 둘째는 도형의 성질

이차곡선은 어디든 화도 정의로워 보인다.

- E . T -

이차곡선

레시피

1. 포물선

2. 쌍곡선

3. 타원

1. 포물선

Question. 01

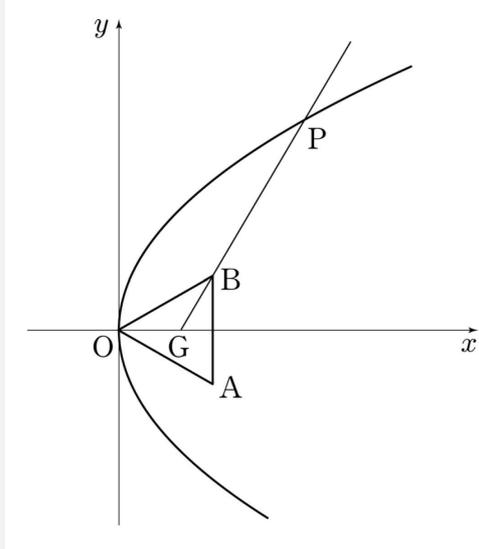
두 양수 m, p 에 대하여 포물선 $y^2 = 4px$ 와 직선 $y = m(x-4)$ 가 만나는 두 점 중 제1사분면 위의 점을 A, 포물선의 준선과 x 축이 만나는 점을 B, 직선 $y = m(x-4)$ 와 y 축이 만나는 점을 C라 하자. 삼각형 ABC의 무게중심이 포물선의 초점 F와 일치할 때, $\overline{AF} + \overline{BF}$ 의 값을 구하시오.

[4점] [2016년 7월 교육청]

Question. 02 (Question. 01 유제)

그림과 같이 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$ 인 정삼각형 OAB의 무게중심 G가 x 축 위에 있다.
 꼭짓점이 O이고 초점이 G인 포물선과 직선 GB가 제 1사분면에서 만나는 점을 P라 할 때,
 선분 GP의 길이를 구하시오. (단, O는 원점이다.)

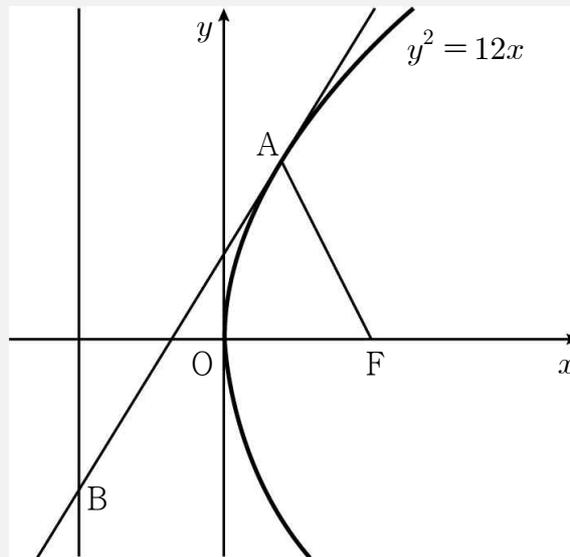
[4점][2011년 6월 평가원]



Question. 03

그림과 같이 초점이 F인 포물선 $y^2 = 12x$ 가 있다. 포물선 위에 있고 제1사분면에 있는 점 A에서의 접선과 포물선의 준선이 만나는 점을 B라 하자. $\overline{AB} = 2\overline{AF}$ 일 때, $\overline{AB} \times \overline{AF}$ 의 값을 구하시오.

[4점] [2017년 7월 교육청]



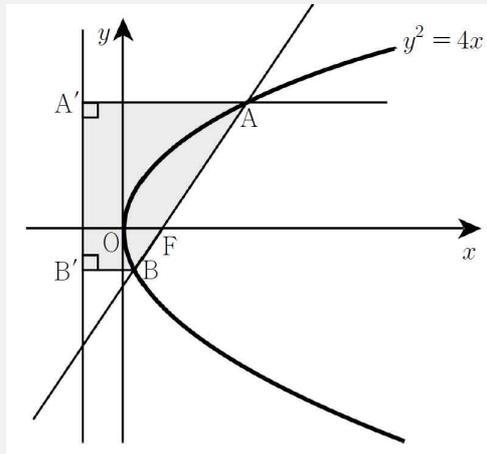
Question. 04 (Question. 03 유제)

그림과 같이 좌표평면에서 포물선 $y^2 = 4x$ 의 초점 F를 지나는 직선이 포물선과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하고, 두 점 A, B에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 A', B'이라 하자.

$\overline{AF} : \overline{BF} = 3 : 1$ 일 때 사각형 AA'B'B의 넓이가 $\frac{q}{p}\sqrt{3}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

[4점][2014년 8월 교육청]



Question. 05

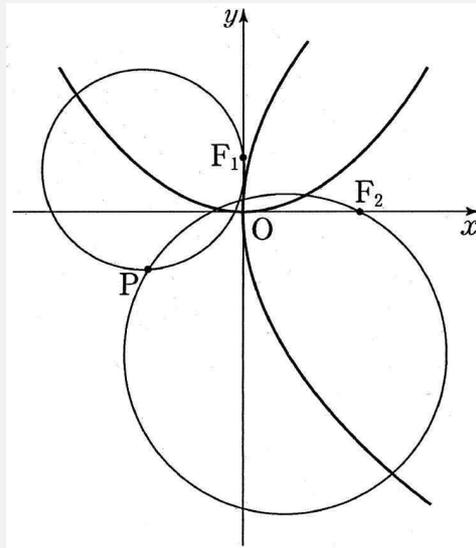
좌표평면에서 포물선 $C_1 : x^2 = 4y$ 의 초점을 F_1 , 포물선 $C_2 : y^2 = 8x$ 의 초점을 F_2 라 하자.

점 P 는 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 중심이 C_1 위에 있고 점 F_1 을 지나는 원과 중심이 C_2 위에 있고 점 F_2 를 지나는 원의 교점이다.
 (나) 제 3 사분면에 있는 점이다.

원점 O 에 대하여 \overline{OP}^2 의 최댓값을 구하시오.

[4점][2014년 6월 평가원]



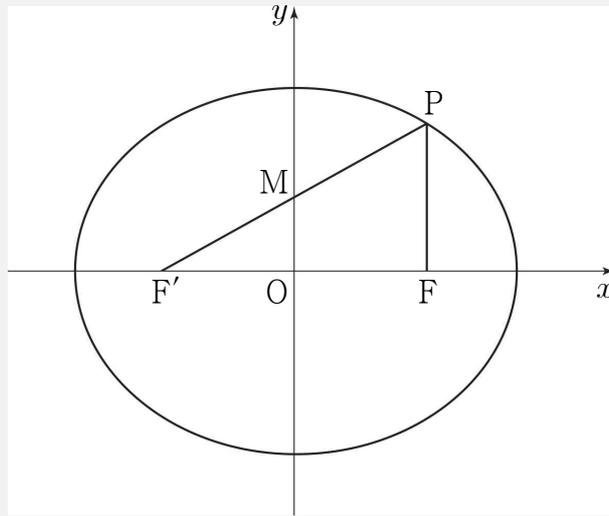
2. 타원

Question. 06

그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 두 초점 중 x 좌표가 양수인 점을 F , 음수인 점을 F' 이라 하자.

타원 위의 점 P 에 대하여 선분 PF' 의 중점 M 의 좌표가 $(0, 1)$ 이고 $\overline{PM} = \overline{PF}$ 일 때, $a^2 + b^2$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.)

[4점] [2017년 4월 교육청]



① 14

② 15

③ 16

④ 17

⑤ 18

Question. 07

닫힌 구간 $[-2, 2]$ 에서 정의된 함수 $f(x)$ 는

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & (-2 \leq x \leq 0) \\ -x+2 & (0 < x \leq 2) \end{cases}$$

이다. 좌표평면에서 $k > 1$ 인 실수 k 에 대하여 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 타원 $\frac{x^2}{k^2} + y^2 = 1$ 이 만나는

서로 다른 점의 개수를 $g(k)$ 라 하자. 함수 $g(k)$ 가 불연속이 되는 모든 k 의 값들의 제곱의 합은?

[4점] [2016년 4월 교육청]

- ① 6 ② $\frac{25}{4}$ ③ $\frac{13}{2}$ ④ $\frac{27}{4}$ ⑤ 7

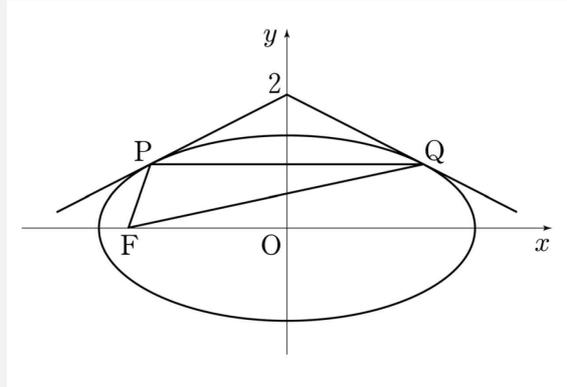
Question. 08 (Question. 07 유제)

점 $(0, 2)$ 에서 타원 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$ 에 그은 두 접선의 접점을 각각 P, Q라 하고, 타원의 두 초점

중 하나를 F라 할 때, 삼각형 PFQ의 둘레의 길이는 $a\sqrt{2} + b$ 이다. $a^2 + b^2$ 의 값을 구하시오.

(단, a, b 는 유리수이다.)

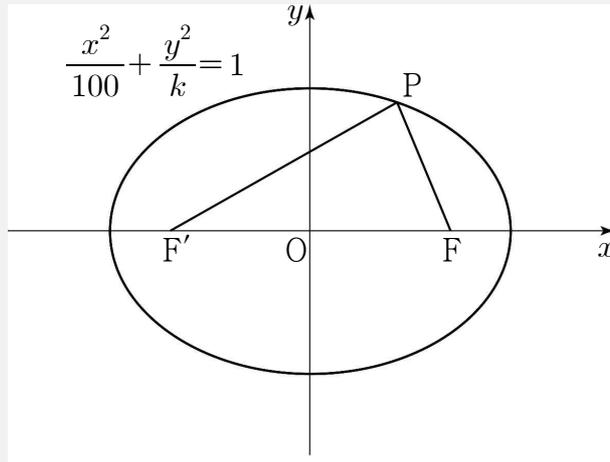
[4점][2011년 6월 평가원]



Question. 09

그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{k} = 1$ 위의 제1사분면에 있는 점 P와 두 초점 F, F'에 대하여 삼각형 PF'F의 둘레의 길이가 34일 때, 상수 k의 값은? (단, $0 < k < 100$)

[4점] [2017년 4월 교육청]



① 36

② 41

③ 46

④ 51

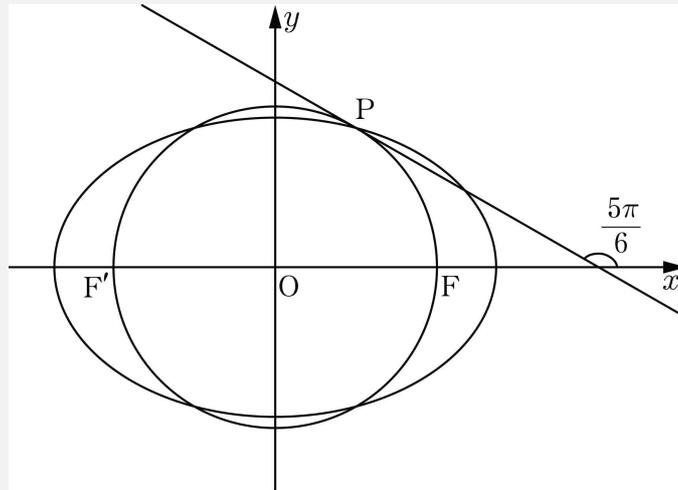
⑤ 56

Question. 10

타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 두 초점 $F(6, 0)$, $F'(-6, 0)$ 에 대하여 선분 $F'F$ 를 지름으로 하는 원이 있다.

타원과 원의 교점 중 제1사분면에 있는 점을 P 라 하자. 원 위의 점 P 에서의 접선이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $\frac{5\pi}{6}$ 일 때, 타원의 장축의 길이는? (단, a, b 는 $0 < \sqrt{2}b < a$ 인 상수이다.)

[4점] [2016년 10월 교육청]



① $5+6\sqrt{3}$

② $6+6\sqrt{3}$

③ $7+6\sqrt{3}$

④ $6+7\sqrt{3}$

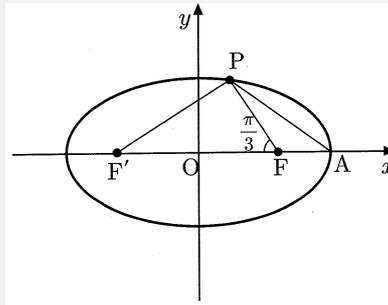
⑤ $7+7\sqrt{3}$

Question. 11 (Question. 10 유제)

타원 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$ 의 두 초점을 F와 F'이라 하고, 초점 F에 가장 가까운 꼭짓점을 A라 하자.

이 타원 위의 한 점 P에 대하여 $\angle PFF' = \frac{\pi}{3}$ 일 때, \overline{PA}^2 의 값을 구하시오.

[4점][2005년 수능]



3. 쌍곡선

Question. 12

좌표평면에서 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 점근선의 방정식이 $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$ 이고 한 초점이 $F(4\sqrt{3}, 0)$

이다. 점 F를 지나고 x 축에 수직인 직선이 이 쌍곡선과 제1사분면에서 만나는 점을 P라 하자.
 쌍곡선 위의 점 P에서의 접선의 기울기는? (단, a, b 는 상수이다.)

[4점] [2017년 4월 교육청]

① $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

② $\sqrt{3}$

③ $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

④ $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

⑤ $2\sqrt{3}$

Question. 13 (Question. 12 유제)

쌍곡선 $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{8} = 1$ 위의 점 (a, b) 에서의 접선이 타원 $\frac{(x-2)^2}{4} + y^2 = 1$ 의 넓이를 이등분할 때,

$a^2 + b^2$ 의 값을 구하시오.

[4점][2011년 9월 평가원]

Question. 14

쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{3} = 1$ 의 두 초점 $(2\sqrt{3}, 0)$, $(-2\sqrt{3}, 0)$ 을 각각 F, F' 이라 하자.

이 쌍곡선 위를 움직이는 점 $P(x, y)$ ($x > 0$)에 대하여 선분 $F'P$ 위의 점 Q 가 $\overline{FP} = \overline{PQ}$ 를 만족시킬 때, 점 Q 가 나타내는 도형 전체의 길이는?

[4점][2006년 평가원]

① π

② $\sqrt{3}\pi$

③ 2π

④ 3π

⑤ $2\sqrt{3}\pi$

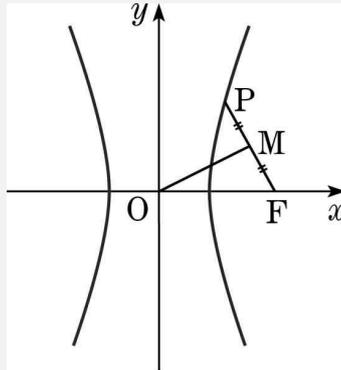
Question. 15 (Question. 14 유제)

그림과 같이 한 초점이 F이고 점근선의 방정식이 $y=2x$, $y=-2x$ 인 쌍곡선이 있다.

제1사분면에 있는 쌍곡선 위의 점 P에 대하여 선분 PF의 중점을 M이라 하자.

$\overline{OM}=6$, $\overline{MF}=3$ 일 때, 선분 OF의 길이는? (단, O는 원점이다.)

[4점] [2013년 10월 교육청]



① $2\sqrt{10}$

② $3\sqrt{5}$

③ $5\sqrt{2}$

④ $\sqrt{55}$

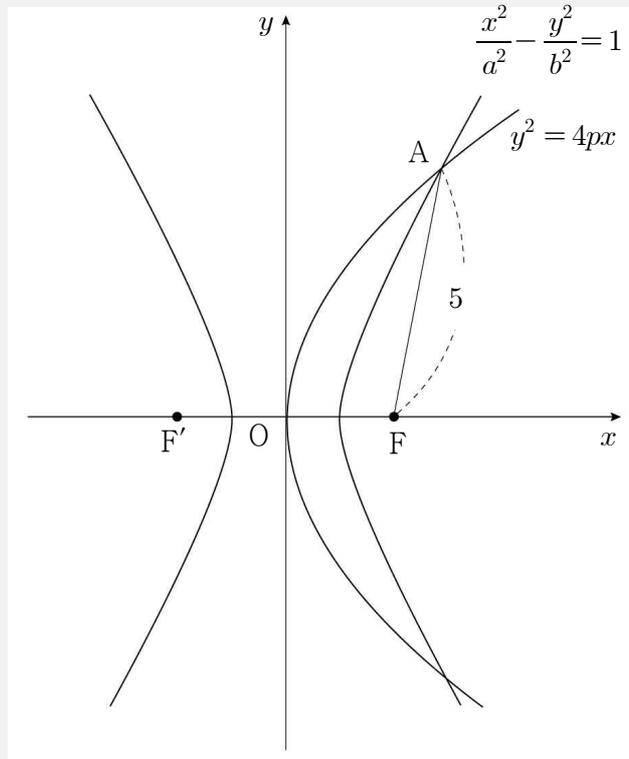
⑤ $2\sqrt{15}$

Question. 16

그림과 같이 $F(p, 0)$ 을 초점으로 하는 포물선 $y^2 = 4px$ 와 $F(p, 0)$ 과 $F'(-p, 0)$ 을 초점으로 하는 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$)이 제1사분면에서 만나는 점을 A라 하자.

$\overline{AF} = 5, \cos(\angle AFF') = -\frac{1}{5}$ 일 때, ab 의 값은?

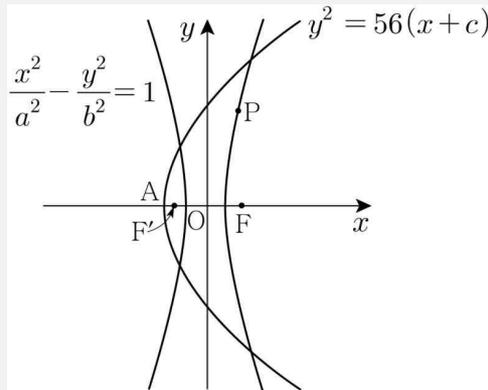
[4점] [2012년 7월 인천교육청]



- ① 1
- ② $\sqrt{3}$
- ③ $\sqrt{5}$
- ④ $\sqrt{7}$
- ⑤ 3

Question. 17 (Question. 16 유제)

그림과 같이 두 점 $F(k, 0)$, $F'(-k, 0)$ 을 초점으로 하는 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 과 점 F 를 초점으로 하는 포물선 $y^2 = 56(x+c)$ 가 있다.



쌍곡선 위의 임의의 점 P 에 대하여 $|\overline{PF} - \overline{PF'}| = 10$ 이 성립하고, 포물선의 꼭짓점 A 에 대하여 $\overline{AF'} : \overline{FF'} = 1 : 6$ 이 성립한다. 이때, $\frac{c^2}{a^2 - b^2}$ 의 값은? (단, $0 < k < c$ 이다.)

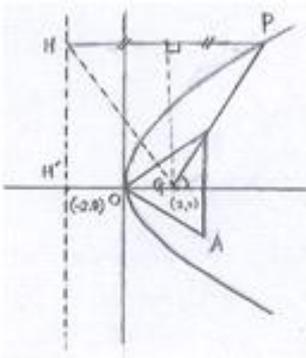
[4점][2009년 교육청]

- ① $\frac{53}{14}$ ② $\frac{55}{14}$ ③ $\frac{30}{7}$ ④ $\frac{32}{7}$ ⑤ $\frac{34}{7}$

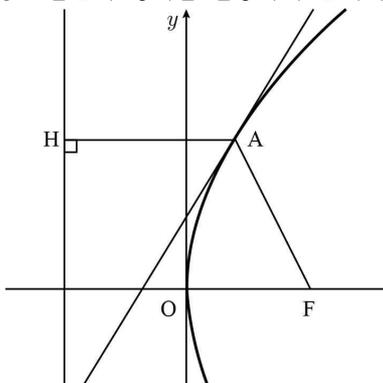
[6th Technic. 이차곡선 정답 및 해설]

1) [출제의도] 포물선의 성질 이해하기
 포물선의 초점을 $F(p, 0)$, 점 $A(\alpha, m(\alpha - 4))$
 $(\alpha > 0)$ 라 하면, 점 $B(-p, 0)$,
 점 $C(0, -4m)$ 이다.
 삼각형 ABC 의 무게중심이 점 F 이므로
 $(\frac{\alpha - p}{3}, \frac{m\alpha - 4m - 4m}{3})$ 에서
 $\frac{\alpha - p}{3} = p, \frac{m\alpha - 4m - 4m}{3} = 0$
 $\alpha = 4p, (\alpha - 8)m = 0$
 $m > 0$ 이므로 $\alpha = 8, p = 2$
 점 A 에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 A' 라
 하면, 포물선의 정의에 의하여
 $\overline{AF} = \overline{AA'} = 10$
 따라서 $\overline{AF} + \overline{BF} = 14$

2) 정답 8
 삼각형의 높이는 3이므로
 $\overline{OG} = 2$ 준선의 방정식은 $x = -2$
 P 에서 준선에 내린 수선의 발을 H 라 하면 \overline{GP} 와 x 축
 이 이루는 각이 60° 이므로 $\angle HPG = 60^\circ$
 $\overline{PH} = \overline{PG}$ 이므로 삼각형 APH 는 정삼각형이다
 준선과 x 축이 만나는 점을 H' 이라 하면 초점과 준선
 간의 거리 $\overline{GH'} = 4$
 $\overline{GP} = \overline{PH} = 2 \times \overline{GH'} = 2 \times 4 = 8$



3) [출제의도] 포물선의 정의를 활용하여 문제해결하기



점 A 의 좌표를 (x_1, y_1) , 점 A 에서 준선에 내린
 수선의 발을 H 라 하자.

$\overline{AB} = 2\overline{AF}, \overline{AF} = \overline{AH}$ 이므로 $\overline{AH} : \overline{AB} = 1 : 2$

점 A 에서의 접선의 기울기는 $\frac{\overline{BH}}{\overline{AH}} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

$y^2 = 12x$ 에서 $2y \frac{dy}{dx} = 12$

$\frac{dy}{dx} = \frac{6}{y}$ 이므로 $\frac{6}{y_1} = \sqrt{3}$

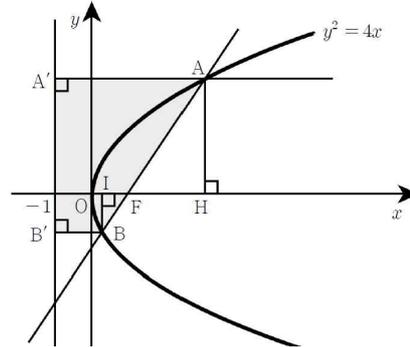
그러므로 $A(1, 2\sqrt{3})$ 이다.

$\overline{AF} = x_1 + 3 = 4, \overline{AB} = 2\overline{AF} = 8$

따라서 $\overline{AB} \times \overline{AF} = 32$

4) 정답 73

[출제의도] 포물선의 성질을 활용하여 문제해결하기
 두 점 A, B 에서 x 축에 내린 수선의 발을 각각 H, I 라
 하고, 그 x 좌표를 각각 α, β 라 하자.



포물선 $y^2 = 4x$ 의 초점은 $F(1, 0)$ 이고, 준선의 방정식은
 $x = -1$ 이다.

$\overline{AF} : \overline{BF} = \overline{AA'} : \overline{BB'}, 3 : 1 = \alpha + 1 : \beta + 1$

$\alpha + 1 = 3\beta + 3, \alpha - 3\beta = 2 \dots \textcircled{1}$

$\overline{AF} : \overline{BF} = 3 : 1$ 이므로 $\overline{FH} : \overline{FI} = 3 : 1$

$\alpha - 1 : 1 - \beta = 3 : 1, \alpha - 1 = 3 - 3\beta$

$\alpha + 3\beta = 4 \dots \textcircled{2}$

①, ②에서 $\alpha = 3, \beta = \frac{1}{3}$

$A(3, 2\sqrt{3}), B(\frac{1}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{3})$ 이므로

사각형 $AA'B'B$ 의 넓이는

$\frac{1}{2} (4 \times \frac{4}{3}) \times \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \times \frac{16}{3} \times \frac{8}{3} \sqrt{3} = \frac{64}{9} \sqrt{3}$

$\therefore p + q = 73$

5) 정답 5

중심이 C_1 위에 있고 점 F_1 을 지나는 원을 k_1 이라 하고

포물선 $x^2 = 4y$ 위의 원 k_1 의 중심을 Q_1 이라 하면

포물선의 정의에 의하여

$\overline{Q_1F_1} = k_1$ 의 반지름 = (Q_1 으로부터 준선 $y = -1$ 에 이
 르는 거리)

이므로 원 k_1 은 준선 $y=-1$ 에 접한다.

따라서 원 k_1 위의 점 P의 y 좌표 ≥ -1 이다.

같은 방법으로

중심이 C_2 위에 있고 점 F_2 를 지나는 원을 k_2 라 하고

포물선 $y^2=8x$ 위의 원 k_2 의 중심을 Q_2 라 하면 포물선의 정의에 의하여

$\overline{Q_2F_2}=k_2$ 의 반지름=(Q_2 로부터 준선 $x=-2$ 까지의 거리)

이므로 원 k_2 는 준선 $x=-2$ 에 접한다.

따라서 원 k_2 위의 점 P의 x 좌표 ≥ -2 이다.

따라서 두 원 k_1, k_2 의 교점 P는

$$x \text{좌표} \geq -2, y \text{좌표} \geq -1 \text{ 이므로}$$

(나) 조건에 의하여 3사분면에서 \overline{OP} 가 최대일 때는 P가

$(-2, -1)$ 에 있을 때이다.

$P(-2, -1)$ 을 지나고 준선에 접하는 두 원이

$$(x+2)^2+(y-1)^2=4 \text{과}$$

$$\left(x-\frac{1}{8}\right)^2+(y+1)^2=\left(\frac{17}{8}\right)^2 \text{로 존재하므로}$$

$P(-2, -1)$ 은 조건을 만족한다.

따라서 \overline{OP} 의 최댓값은 $\sqrt{5}$ 이고 \overline{OP}^2 의 최댓값은 5이다.

6) [출제의도] 타원의 정의 이해하기

타원의 정의에 의하여 $\overline{PF}+\overline{PF'}=20$

$F(c, 0) (c>0)$ 이라 하면 $c^2=100-k^2$ 이므로

$$\overline{F'F}=2\sqrt{100-k^2}$$

삼각형 $PF'F$ 의 둘레의 길이는

$$\overline{PF}+\overline{PF'}+\overline{F'F}=20+2\sqrt{100-k^2}=34$$

$$\sqrt{100-k^2}=7$$

따라서 $k=51$

7) [출제의도] 평면곡선의 접선의 성질 추론하기

타원 $\frac{x^2}{k^2}+y^2=1$ 은 네 점 $(k, 0), (-k, 0), (0, 1), (0, -1)$ 을 네 꼭짓점으로 하는 타원이다.

타원 $\frac{x^2}{k^2}+y^2=1$ 과 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가

접할 때 k 의 값을 구하자.

$\frac{x^2}{k^2}+y^2=1$ 위의 점 $(x_1, y_1) (x_1>0)$ 에서의 접선의

방정식을 구하면

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{k^2y} \text{이므로 접선의 기울기는 } -\frac{x_1}{k^2y_1} \text{ 이고}$$

$$\text{접선의 방정식은 } y-y_1=-\frac{x_1}{k^2y_1}(x-x_1) (y_1 \neq 0)$$

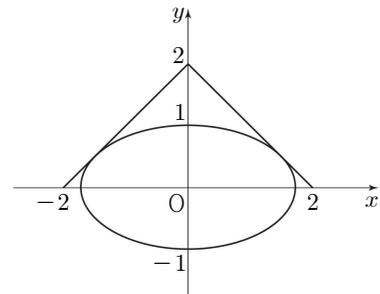
$$\therefore y=-\frac{x_1}{k^2y_1}x+\frac{1}{y_1}$$

타원이 직선 $y=-x+2$ 에 접하므로

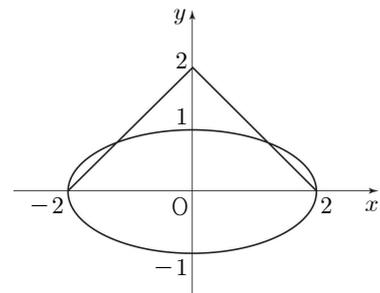
$$\frac{x_1}{k^2y_1}=1, \frac{1}{y_1}=2 \therefore x_1=\frac{k^2}{2}, y_1=\frac{1}{2}$$

점 (x_1, y_1) 은 $y=-x+2$ 위의 점이므로

$$k^2=3 \therefore k=\sqrt{3}$$



타원 $\frac{x^2}{k^2}+y^2=1$ 이 점 $(2, 0)$ 을 지날 때, $k=2$



$$\therefore g(k)=\begin{cases} 0 & (1 < k < \sqrt{3}) \\ 2 & (k = \sqrt{3}) \\ 4 & (\sqrt{3} < k \leq 2) \\ 2 & (k > 2) \end{cases}$$

따라서 함수 $g(k)$ 는 $k=\sqrt{3}, k=2$ 에서 불연속이고, 불연속이 되는 모든 k 의 값들의 제곱의 합은

$$(\sqrt{3})^2+2^2=7$$

8) 정답 32

접점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{8}+\frac{y_1y}{2}=1 \text{ 이고}$$

이 직선이 점 $(0, 2)$ 를 지나므로

$$\frac{2y_1}{2}=1 \text{에서 } y_1=1$$

타원과 $y=1$ 을 연립시키면

$x = \pm 2$

$P(-2, 1), Q(2, 1)$

$\therefore \overline{PQ}$ 의 길이는 4

타원의 다른 초점을 F' 이라 하면

$\overline{FQ} = \overline{PF'}$ 에서

$\overline{PF} + \overline{FQ} = \overline{PF} + \overline{PF'} = 4\sqrt{2}$

구하는 길이는 $4\sqrt{2} + 4$

$a^2 + b^2 = 32$

9) [출제의도] 타원의 정의 이해하기

타원의 정의에 의하여 $\overline{PF} + \overline{PF'} = 20$

$F(c, 0) (c > 0)$ 이라 하면 $c^2 = 100 - k$ 이므로

$\overline{F'F} = 2\sqrt{100 - k}$

삼각형 $PF'F$ 의 둘레의 길이는

$\overline{PF} + \overline{PF'} + \overline{F'F} = 20 + 2\sqrt{100 - k} = 34$

$\sqrt{100 - k} = 7$

따라서 $k = 51$

10) [출제의도] 타원의 성질을 이용하여 타원의 장축의 길이를 구하는 문제를 해결한다.

접선이 x 축과 만나는 점을 A 라 하면 $\angle OAP = \frac{\pi}{6}$

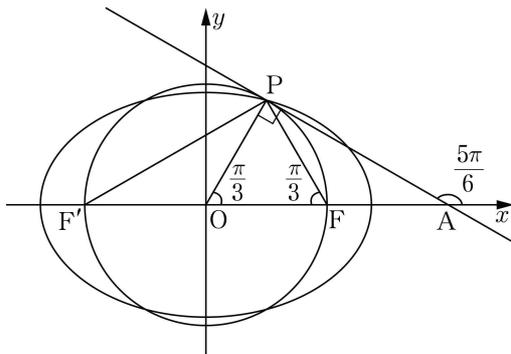
이고, 직선 OP 는 접선과 수직이므로 $\angle POF = \frac{\pi}{3}$

삼각형 POF 는 정삼각형이므로

$\angle PFO = \frac{\pi}{3}, \overline{PF} = 6$

선분 $F'F$ 는 지름이므로 직각삼각형 FPF' 에서

$\overline{PF'} = \overline{PF} \times \tan \frac{\pi}{3} = 6\sqrt{3}$



따라서 두 점 F, F' 은 타원의 초점이므로 타원의 정의에 의해 장축의 길이는 $\overline{PF} + \overline{PF'} = 6 + 6\sqrt{3}$

11) 정답 39

P 의 좌표를 (x, y) 라 하면

$\overline{PF} + \overline{PF'} = 12$

$\overline{PF} = x$ 라 하면 $\overline{PF'} = 12 - x$ 이다.

$\triangle PFF'$ 에서 제이코사인법칙을 이용하면

$x^2 + 8^2 - 2 \cdot x \cdot 8 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = (12 - x)^2$

$\therefore x = 5$

$\triangle PAF$ 에서 제이코사인법칙을 이용하면

$\overline{PA}^2 = 5^2 + 2^2 - 2 \cdot 5 \cdot 2 \cos \frac{2}{3}\pi = 39$

12) [출제의도] 평면곡선을 활용하여 문제해결하기

점근선의 방정식이 $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$ 이므로 $a^2 = 3b^2$

초점 F 의 x 좌표가 $4\sqrt{3}$ 이므로

$a^2 + b^2 = 4b^2 = (4\sqrt{3})^2$

$\therefore a^2 = 36, b^2 = 12$

점 P 는 쌍곡선 $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{12} = 1$ 위의 점이므로

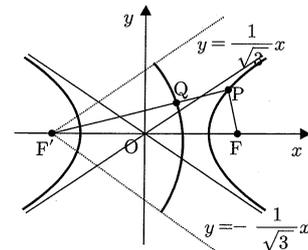
$P(4\sqrt{3}, 2)$

$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{12} = 1$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$\frac{2x}{36} - \frac{2y}{12} \times \frac{dy}{dx} = 0$

$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{3y} (y \neq 0)$

따라서 점 P 에서의 접선의 기울기는 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$



13) 정답 52

[출제의도] 쌍곡선의 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

쌍곡선 $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{8} = 1$ 위의 점 (a, b) 에서의 접선의 방정식

은 $\frac{ax}{12} - \frac{by}{8} = 1$

이고, 접선이 타원 $\frac{(x-2)^2}{4} + y^2 = 1$ 의 넓이를 이등분하

므로 접선은 타원의 중심 $(2, 0)$ 을 지난다.

따라서, $\frac{2a}{12} - 0 = 1$ 에서 $a = 6$

또한, $\frac{a^2}{12} - \frac{b^2}{8} = 1$ 이므로

$\frac{36}{12} - \frac{b^2}{8} = 1$ 에서 $\frac{b^2}{8} = 2, b^2 = 16$

$\therefore a^2 + b^2 = 36 + 16 = 52$

14) 정답 ③

쌍곡선의 정의에 의해 $PF' - PF = 2 \times 3$

조건에서 $PF = PQ$ 이므로

$PF' - PQ = 6$ 즉 $F'Q = 6$

따라서, 점 Q의 자취는 반지름 6, 중심각은 점근선의 방정

식이 $y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}x$ 이므로 점근선이 이루는 각은

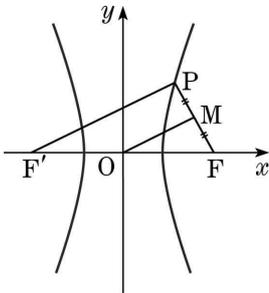
$2 \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ 이므로 점 Q의 자취는 반지름 6인 부채꼴

의 호 위를 움직이므로 자취의 길이는 호의 길이

$6 \times \frac{\pi}{3} = 2\pi$

15) 정답 ②

[출제의도] 쌍곡선의 정의를 이해하고 선분의 길이를 구한다.



쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 이라 하면

점근선의 방정식이 $y = 2x, y = -2x$ 이므로

$\frac{b}{a} = 2, b = 2a$

쌍곡선의 또 다른 초점을 점 F' 이라 하면 삼각형 $PF'F$ 에서 점 O는 변 $F'F$ 의 중점이고 점 M은 변 PF 의 중점이므로

$\overline{PF'} = 2\overline{OM} = 12$

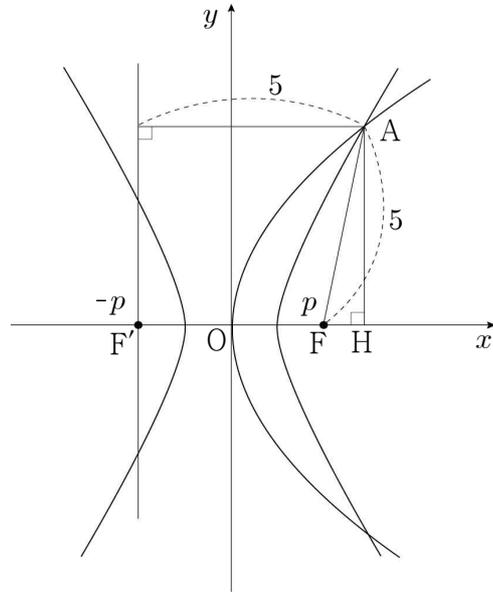
$\overline{PF} = 2\overline{MF} = 6$

$|\overline{PF'} - \overline{PF}| = 12 - 6 = 6 = 2a$

$\therefore a = 3, b = 2a = 6$

$\therefore \overline{OF} = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 36} = 3\sqrt{5}$

16) 정답 ②



점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면,

$\cos(\angle AFH) = \frac{1}{5}$ 이므로 $\overline{FH} = 1$

포물선의 정의에 의하여

$2p + 1 = 5 \therefore p = 2$

$A(3, 2\sqrt{6})$ 이므로

$\overline{AF'} = 7$

쌍곡선의 정의에 의하여 $|\overline{AF'} - \overline{AF}| = 2a = 2$

$a = 1, b = \sqrt{3}$

$\therefore ab = \sqrt{3}$

17) 정답 ④

[출제의도] 이차곡선의 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$|\overline{PF} - \overline{PF'}| = 10$ 이므로 $a = 5$ 이다.

$y^2 = 4 \times 14(x + c)$ 이므로 $\overline{AF} = 14$ 이다.

$\overline{AF'} : \overline{FF'} = 1 : 6$ 이므로 $\overline{AF'} = 2, \overline{FF'} = 12$ 이다.

$\frac{c^2}{a^2 - b^2} = \frac{64}{25 - 11} = \frac{32}{7}$