

*E.T's Eight Technics.*

*Ver. 2019*

*Fifth Technic.*

# 통계 기본기로 뿌셔뿌셔☆

한번 보면 정리되는 통계로 부담감 없애기

- E . T -

**1. 정규분포와 대칭성**

**2. 통계적 추정**

**3. 증명, 빈칸 채우기**

## 1. 정규 분포와 대칭성

---

## Question. 01

확률변수  $X$ 는 평균이  $m$ , 표준편차가 8인 정규분포를 따르고, 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) P(X \leq k) + P(X \leq 100 + k) = 1$$

$$(나) P(X \geq 2k) = 0.0668$$

$m$ 의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하시오. (단,  $k$ 는 상수이다.)

[4점] [2018 7월 교육청] D

## Question. 02 (Question. 01 유제)

두 연속확률변수  $X, Y$ 는 각각 정규분포  $N(m, \sigma^2), N(am, b\sigma^2)$ 을 따르고 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) P(X \geq 0) = P(Y \geq 0)$$

$$(나) P(X \leq 1) + P(Y \geq 2) = 1$$

이때,  $a+b$ 의 값은? (단,  $a > 0, b > 0$ )

[4점][2010년 11월 대전교육청]

① 5

② 6

③ 7

④ 8

⑤ 9

## Question. 03

확률변수  $X$ 는 평균이  $m$ , 표준편차가  $\sigma$ 인 정규분포를 따르고

$F(x) = P(X \leq x)$ 라 하자.  $m$ 이 자연수이고  $0.5 \leq F\left(\frac{11}{2}\right) \leq 0.6915$ ,

$F\left(\frac{13}{2}\right) = 0.8413$  일 때,  $F(k) = 0.9772$ 를 만족시키는 상수  $k$ 의 값을

오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하시오.

$z$	$P(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

[4점] [2017 10월 교육청]

## Question. 04 (Question. 03 유제)

어느 지역 학생들의 1일 인터넷 사용시간  $X$ 는 평균이  $m$ 분, 표준편차가 30분인 정규분포를 따른다. 이 지역 학생들을 대상으로 9명을 임의추출하여 조사한 1일 인터넷 사용시간의 표본 평균을  $\bar{X}$ 라 하자. 함수  $G(k), H(k)$ 를

$$G(k) = P(X \leq m + 30k)$$

$$H(k) = P(\bar{X} \geq m - 30k)$$

라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[4점][2011년 평가원]

[ 보 기 ]

- ㄱ.  $G(0) = H(0)$       ㄴ.  $G(3) = H(1)$   
 ㄷ.  $G(1) + H(-1) = 1$

① ㄱ

② ㄷ

③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

## Question. 05

양의 실수 전체의 집합을 정의역으로 하는 함수  $H(t)$ 는 평균 20, 표준편차  $t$ 인 정규분포를 따르는 확률변수  $X$ 에 대하여

$$H(t) = P(X \leq 15)$$

이다. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

(단, 표준정규분포를 따르는 확률변수  $Z$ 에 대하여  $P(0 \leq Z \leq 1) = 0.3413$ ,  $P(0 \leq Z \leq 2) = 0.4772$ 이다.)

[4점][2009년 평가원]

[ 보 기 ]

- ㄱ.  $H(2.5) = P(Z \geq 2)$
- ㄴ.  $H(2) < H(2.5)$
- ㄷ.  $H(5) < 5H(2)$

① ㄱ

② ㄷ

③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

## Question. 06

어느 과자 공장에서 생산되는 과자의 무게는 평균이  $16g$ , 표준편차는  $0.3g$ 인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공장에서는 과자의 무게가  $15.25g$ 이하이면 불량품으로 판정한다.

표준정규분포표를 이용하여 이 공장에서 생산된 과자가 불량품일 확률을 구하면  $p$ 라 할 때,  $10000p$ 의 값을 구하시오.

[ 표준정규분포표 ]

$z$	$P(0 \leq Z \leq z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

[4점][2006년 교육청]

## Question. 07 (Question. 06 유제)

어느 회사에서는 신입사원 300 명에게 연수를 실시하고 연수 점수에 따라 상위 36 명을 뽑아 해외 연수의 기회를 제공하고자 한다. 신입사원 전체의 연수 점수가 평균 83 점, 표준편차 5 점인 정규분포를 따른다고 할 때, 해외 연수의 기회를 얻기 위한 최소 점수를 아래 표준 정규분포표를 이용하여 구하시오.

$z$	$P(0 \leq Z \leq z)$
1.0	0.34
1.1	0.36
1.2	0.38
1.3	0.40

(단, 연수 점수는 최소 0 점에서 최대 100 점 사이의 정수이다.)

[4점][2005년 평가원]

## 2. 통계적 추정

---

## Question. 08

모평균 75, 모표준편차 5인 정규분포를 따르는 모집단에서 임의추출한 크기 25인 표본의 표본평균을  $\bar{X}$  라 하자. 표준정규분포를 따르는 확률변수  $Z$ 에 대하여 양의 상수  $c$ 가

$$P(|Z| > c) = 0.06$$

을 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

[4점][2007년 수능]

[ 보 기 ]

- ㄱ.  $P(Z > a) = 0.05$ 인 상수  $a$ 에 대하여  $c > a$ 이다.
- ㄴ.  $P(\bar{X} \leq c + 75) = 0.97$
- ㄷ.  $P(\bar{X} > b) = 0.01$ 인 상수  $b$ 에 대하여  $c < b - 75$ 이다.

① ㄱ

② ㄷ

③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

# Question. 09

어느 회사에서 생산되는 비누의 무게는 정규분포를 따르며, 무게가 100g미만인 것은 불량품으로 판정한다. 회사에서는 판매 촉진을 위해 비누를 4개씩 포장하여 만든 세트 상품을 판매하기로 하였다. 각 세트 상품은 그 안에 들어 있는 비누 무게의 평균이 100g미만인 경우에 불량품으로 판정된다고 할 때, 상품 1000세트 중 1세트의 비율로 불량품이 생긴다고 한다. 회사에서 생산된 비누 1개를 검사할 때, 불량품으로 판정될 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, 포장지의 무게는 무시한다.)

<표준정규분포표>

$z$	$P(0 \leq Z \leq z)$
1.0	0.341
1.5	0.433
2.0	0.477
2.5	0.494
3.0	0.499

[4점][2009년 교육청]

- ① 0.001
- ② 0.006
- ③ 0.023
- ④ 0.067
- ⑤ 0.159

## Question. 10 (Question. 09 유제)

어느 학교 학생들의 통학 시간은 평균이 50 분, 표준편차가  $\sigma$  분인 정규분포를 따른다. 이 학교 학생들을 대상으로 16 명을 임의추출하여 조사한 통학 시간의 표본평균을  $\bar{X}$ 라 하자.  $P(50 \leq \bar{X} \leq 56) = 0.4332$ 일 때,  $\sigma$ 의 값을 표준정규분포표를 이용하여 구하시오.

$z$	$P(0 \leq Z \leq z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

4점][2013년 평가원]

# Question. 11

다음은 어느 회사의 직원 중 임의로 선택한 100 명의 출근 소요 시간을 조사한 표이다.

소요 시간	인원수(명)
30분 미만	4
30분 이상 60분 미만	16
60분 이상 90분 미만	50
90분 이상 120분 미만	30
합계	100

이 결과를 이용하여 얻은 이 회사의 전체 직원 중 출근 소요 시간이 60분 이상 120분 미만인 직원의 비율  $p$ 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이  $a \leq p \leq b$ 일 때,  $5000(b-a)$ 의 값은?  
 (단,  $Z$ 가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때,  $P(|Z| \leq 1.96) = 0.95$ 로 계산한다.)

[4점] [2016 10월 교육청]

- ① 392
- ② 784
- ③ 1176
- ④ 1568
- ⑤ 1960

## Question. 12 (Question. 11 유제)

어느 농장에서 출하되는 수박의 무게는 표준편차가  $\sigma$ 인 정규분포를 따른다고 한다. 이 수박 중 169 개를 임의 추출하여 얻은 모평균에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간이  $[a, b]$ 이고,  $n$  개를 임의 추출하여 얻은 모평균에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이  $[c, d]$ 이다.  $b - a = d - c$ 일 때,  $n$ 의 값을 구하시오.

(단,  $Z$ 가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때,  $P(|Z| \leq 2) = 0.95$ ,  $P(|Z| \leq 2.6) = 0.99$ 로 계산한다.)

[4점][2014년 8월 영남권]

## Question. 13

어느 도시의 중앙공원을 이용한 경험이 있는 주민의 비율을 알아보기 위하여 이 도시의 주민 중  $n$ 명을 임의추출하여 조사한 결과 80%가 이 중앙공원을 이용한 경험이 있다고 답하였다.

이 결과를 이용하여 구한 이 도시 주민 전체의 중앙공원을 이용한 경험이 있는 주민의 비율에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이  $[a, b]$ 이다.  $b - a = 0.098$ 일 때,  $n$ 의 값을 구하시오.

(단,  $Z$ 가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때,  $P(|Z| \leq 1.96) = 0.95$ 로 계산한다.)

[4점][2014학년도 수능]

## Question. 14 (Question. 13 유제)

A 여론 조사 기관에서 어떤 드라마의 시청률을 조사하기 위해 임의로 추출한 1000 명을 대상으로 조사한 결과 100 명이 시청하였다고 한다. 이 결과를 이용하여 전체 시청자의 시청률을 신뢰도 95%로 신뢰구간을 구하였더니  $[a, b]$  이었다.  $b - a \leq 0.002$  를 만족시키려면 최소한  $p$  명을 임의 추출하여 조사해야 한다. 이때,  $\sqrt{p}$  의 값을 구하시오. (단,  $P(0 \leq Z \leq 1.96) = 0.95$ )

### 3. 증명, 빈칸 채우기

---

## Question. 15

서로 같은 흰 공 4개와 서로 같은 검은 공 3개가 들어 있는 주머니에서 임의로 공을 한 개씩 모두 꺼낼 때, 꺼낸 순서대로 1부터 7까지의 번호를 부여한다. 4개의 흰 공에 부여된 번호 중 두 번째로 작은 번호를 확률변수  $X$ 라 할 때, 다음은  $E(X)$ 를 구하는 과정이다.

공에 번호를 부여하는 모든 경우의 수를  $N$ 이라 하면  $N$ 은 서로 같은 흰 공 4개와 서로 같은 검은 공 3개를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로  $N = \boxed{\text{가}}$  이고, 확률변수  $X$ 가 가질 수 있는 값은 2, 3, 4, 5이다.

(i)  $X=2$ 일 때,

번호 2가 부여된 흰 공 앞에 흰 공 1개,  
 번호 2가 부여된 흰 공 뒤에 흰 공 2개와 검은 공 3개를  
 나열하는 경우의 수는  $1 \times \frac{5!}{2! \times 3!}$  이므로

$$P(X=2) = \frac{10}{N}$$

(ii)  $X=3$ 일 때,

번호 3이 부여된 흰 공 앞에 흰 공 1개와 검은 공 1개,  
 번호 3이 부여된 흰 공 뒤에 흰 공 2개와 검은 공 2개를  
 나열하는 경우의 수는  $2! \times \frac{4!}{2! \times 2!}$  이므로

$$P(X=3) = \frac{12}{N}$$

(iii)  $X=4$ 일 때,

번호 4가 부여된 흰 공 앞에 흰 공 1개와 검은 공 2개,  
 번호 4가 부여된 흰 공 뒤에 흰 공 2개와 검은 공 1개를  
 나열하는 경우의 수는  $\boxed{\text{나}}$  이므로

$$P(X=4) = \frac{\boxed{\text{나}}}{N}$$

(iv)  $X=5$ 일 때,

확률질량함수의 성질에 의하여

$$P(X=5) = 1 - \{P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)\}$$

$$\text{따라서 } E(X) = \sum_{k=2}^5 \{k \times P(X=k)\} = \boxed{\text{다}}$$

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각  $a$ ,  $b$ ,  $c$ 라 할 때,  $a+b+5c$ 의 값은?

[4점] [2018 7월 교육청]



## Question. 16

2이상의 자연수  $n$ 에 대하여  $1 \leq a < b \leq n$ ,  $1 \leq c < d \leq n$ 을 만족하고, 좌표평면 위의 네 직선  $x=a$ ,  $x=b$ ,  $y=c$ ,  $y=d$ 로 둘러싸인 직사각형의 둘레의 길이가  $2n$ 이 되도록 자연수  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ 를 택한다. 다음은  $b-a$ 의 값을 확률변수  $X$ 라 할 때  $E(X) = \frac{n}{2}$ 임을 보이는 과정이다.

확률변수  $X$ 가 가질 수 있는 가장 작은 값은 1, 가장 큰 값은  $\boxed{\text{(가)}}$ 이다.

$X=k$ 일 때,  $b-a=k$ 이므로  $1 \leq a \leq n-k$ 이고,

$d-c=n-k$ 이므로  $1 \leq c \leq \boxed{\text{(나)}}$ 이다.

그러므로  $P(X=k) = \frac{(n-k) \times \boxed{\text{(나)}}}{\sum_{i=1}^{\boxed{\text{(가)}}} (n-i) \times i}$ 이다.

따라서

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{\boxed{\text{(가)}}} \{k \times P(X=k)\} \\ &= \frac{6}{\boxed{\text{(다)}}} \sum_{k=1}^{\boxed{\text{(가)}}} \{k \times (n-k) \times \boxed{\text{(나)}}\} \\ &= \frac{n}{2} \end{aligned}$$

이다.

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각  $f(n)$ ,  $g(k)$ ,  $h(n)$ 이라 할 때,

$\frac{h(7)}{f(8) \times g(6)}$ 의 값은?

[4점] [2017 10월 교육청]

- ① 4                      ② 5                      ③ 6                      ④ 7                      ⑤ 8

# Question. 17

1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 6개의 공이 주머니에 들어 있다.  
 이 주머니에서 임의로 1개의 공을 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 넣는다.  
 이와 같은 시행을 3번 반복할 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 수를 차례로  $x_1, x_2, x_3$  이라 하고,  
 이 세 수  $x_1, x_2, x_3$  중에서 최댓값과 최솟값의 차를 확률변수  $X$ 라 하자.  
 예를 들어  $P(X=1) = \frac{5}{36}$  이다. 다음은 확률변수  $X$ 의 평균  $E(X)$ 를 구하는 과정의 일부이다.

세 수  $x_1, x_2, x_3$ 을 순서쌍  $(x_1, x_2, x_3)$ 과 같이 나타내자.  
 세 수  $x_1, x_2, x_3$  중에서 최댓값을  $p$ , 최솟값을  $q$ 라 하고  
 $p - q = k$ 라 하자.

(1)  $k=0$ 일 때  
 순서쌍  $(x_1, x_2, x_3)$ 의 개수는  $\boxed{\text{(가)}}$ 이고,  

$$P(X=0) = \frac{1}{6^3} \times \boxed{\text{(가)}}$$

(2)  $k \neq 0$ 일 때  
 i)  $k=1$ 을 만족시키는 순서쌍  $(x_1, x_2, x_3)$ 의 개수는  

$$5 \times \left( \frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!} \right)$$
 이다.  
 ii)  $k=2$ 를 만족시키는 순서쌍  $(x_1, x_2, x_3)$ 의 개수는  

$$4 \times \left( \frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!} + 3! \right)$$
 이다.  

$$\vdots$$
 그러므로  $1 \leq k \leq 5$ 일 때, 순서쌍  $(x_1, x_2, x_3)$ 의 개수는  

$$(6-k) \times \left\{ \frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!} + (\boxed{\text{(나)}}) \times 3! \right\}$$
 이고  

$$P(X=k) = \frac{1}{6^3} \times (6-k) \times \left\{ \frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!} + (\boxed{\text{(나)}}) \times 3! \right\} \quad (1), \quad (2)$$
 에 의하여 확률변수  $X$ 의 평균  $E(X)$ 는 다음과 같다.  

$$E(X) = \sum_{k=0}^5 \{k \times P(X=k)\} = \frac{1}{6^2} \sum_{k=1}^5 (\boxed{\text{(다)}}) = \frac{35}{12}$$

위의 (가)에 알맞은 수를  $a$ 라 하고, (나), (다)에 알맞은 식을 각각  $f(k), g(k)$ 라 할 때,

$\frac{f(5) \times g(3)}{a}$ 의 값은?

[4점] [2017 7월 교육청]

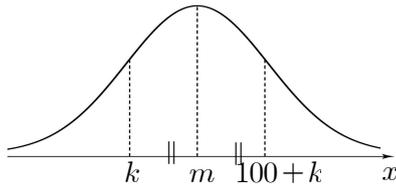
- ① 15                      ② 18                      ③ 21                      ④ 24                      ⑤ 27



[5th Technic. 통계 정답 및 해설]

1) [출제의도] 표준정규분포를 활용하여 문제 해결하기

확률변수  $X$ 는 정규분포  $N(m, 8^2)$ 을 따른다.  
조건 (가)를 만족시키는 정규분포의 확률밀도함수의 그래프는 그림과 같다.



$$m - k = (100 + k) - m, \quad k = m - 50$$

$$P(X \geq 2k) = P\left(Z \geq \frac{m - 100}{8}\right) = 0.0668$$

$$0.5 - P\left(Z \geq \frac{m - 100}{8}\right)$$

$$= P\left(0 \leq Z \leq \frac{m - 100}{8}\right) = 0.4332$$

$$\frac{m - 100}{8} = 1.5$$

따라서  $m = 112$

2) 정답 ②

$$P(X \geq x) = P\left(\frac{X - m}{\sigma} \geq \frac{x - m}{\sigma}\right) = P\left(Z \geq \frac{x - m}{\sigma}\right)$$

$$P(Y \geq y) = P\left(\frac{Y - am}{\sqrt{b}\sigma} \geq \frac{y - am}{\sqrt{b}\sigma}\right) = P\left(Z \geq \frac{y - am}{\sqrt{b}\sigma}\right)$$

이므로

$$(가)에서 \quad -\frac{m}{\sigma} = -\frac{am}{\sqrt{b}\sigma} \quad \therefore a = \sqrt{b} \dots\dots\dots ①$$

$$(나)에서 \quad 1 = P(X \leq 1) + P(Y \geq 2)$$

$$= P\left(\frac{X - m}{\sigma} \leq \frac{1 - m}{\sigma}\right) + P\left(\frac{Y - am}{\sqrt{b}\sigma} \geq \frac{2 - am}{\sqrt{b}\sigma}\right)$$

$$= P\left(Z \leq \frac{1 - m}{\sigma}\right) + P\left(Z \geq \frac{2 - am}{\sqrt{b}\sigma}\right)$$

$$\text{이므로} \quad \frac{1 - m}{\sigma} = \frac{2 - am}{\sqrt{b}\sigma} \dots\dots\dots ②$$

①, ②를 연립하여 풀면  $a = 2, b = 4$  이다

3) 27. [출제의도] 표준정규분포표를 이용하여 주어진 문제를 해결한다.

$$F(x) = P(X \leq x) = P\left(Z \leq \frac{x - m}{\sigma}\right)$$

$$F\left(\frac{13}{2}\right) = 0.8413, \quad P(0 \leq Z \leq 1) = 0.3413 \text{ 이므로}$$

$$\frac{\frac{13}{2} - m}{\sigma} = 1, \quad \sigma = \frac{13}{2} - m \dots\dots\dots ①$$

$$0.5 \leq F\left(\frac{11}{2}\right) \leq 0.6915 \text{ 이므로}$$

$$0 \leq \frac{\frac{11}{2} - m}{\sigma} \leq 0.5 \dots\dots\dots ②$$

②에 ①을 대입하여 정리하면

$$\frac{9}{2} \leq m \leq \frac{11}{2} \text{ 이고 } m \text{ 이 자연수이므로}$$

$$m = 5, \quad \sigma = \frac{3}{2}$$

$$F(k) = 0.9772 \text{ 이므로}$$

$$\frac{k - 5}{\frac{3}{2}} = 2, \quad k = 8$$

4) 정답 ③

[출제의도] 표본평균의 분포를 이용하여 확률을 계산할 수 있는가?

$X$ 는 정규분포  $N(m, 30^2)$ 을 따르므로

크기가 9인 표본평균  $\bar{X}$ 에 대하여

$$E(\bar{X}) = m, \quad \sigma(\bar{X}) = \frac{30}{\sqrt{9}} = 10$$

따라서,  $\bar{X}$ 는 정규분포  $N(m, 10^2)$ 을 따른다.

$$G(k) = P(X \leq m + 30k) = P\left(Z \leq \frac{m + 30k - m}{30}\right) = P(Z \leq k)$$

$$H(k) = P(\bar{X} \geq m - 30k) = P\left(Z \geq \frac{m - 30k - m}{10}\right) = P(Z \geq -3k)$$

$$\therefore G(0) = P(Z \leq 0) = 0.5$$

$$H(0) = P(Z \geq 0) = 0.5$$

$$\therefore G(0) = H(0) \text{ (참)}$$

$$\therefore G(3) = P(Z \leq 3) = 0.5 + P(0 \leq Z \leq 3)$$

$$H(1) = P(Z \geq -3) = P(-3 \leq Z \leq 0) + 0.5 = P(0 \leq Z \leq 3) + 0.5$$

$$\therefore G(3) = H(1) \text{ (참)}$$

$$\therefore G(1) = P(Z \leq 1), \quad H(-1) = P(Z \geq 3) \text{ 이므로}$$

$$G(1) + H(-1) = P(Z \leq 1) + P(Z \geq 3)$$

$$= 1 - P(1 \leq Z \leq 3)$$

$$P(1 \leq Z \leq 3) > 0 \text{ 이므로}$$

$$G(1) + H(-1) < 1 \text{ (거짓)}$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

5) 정답 ③

$$H(t) = P\left(\frac{X - 20}{t} \leq \frac{15 - 20}{t}\right) = P\left(z \leq \frac{-5}{t}\right)$$

ㄱ.  $H(2.5) = P(z \leq \frac{-5}{2.5}) = P(z \leq -2) = P(z \geq 2)$

이므로  
참이다.

ㄴ.  $H(2) = P(z \leq -2.5)$  이므로  $\therefore H(2) < H(2.5)$  참  
ㄷ

$H(5) = P(z \leq -1) = 0.5 - P(0 \leq z \leq 1) = 0.1587$   
 $5H(2) < 5H(2.5) = 5 \times P(z \leq -2)$   
 $= 5 \times (0.5 - P(0 \leq z \leq 2)) = 5 \times 0.0228 = 0.1140$   
 거짓

6) 정답 62

과자의 무게를 확률변수  $X$ 라 하면

$P(X \leq 15.25) = P\left(\frac{X-16}{0.3} \leq \frac{15.25-16}{0.3}\right)$   
 $= P(Z \leq -2.5)$   
 $= 0.5 - 0.4938 = 0.0062$   
 $\therefore 10000 \times 0.0062 = 62$

7) 정답 89

신입사원 전체의 연수점수는 정규분포  $N(83, 5^2)$  을 따르고 300 명의 상위 36 명은  $\frac{36}{300} \times 100 = 12\%$  이므로 전체에서 상위 12% 안에 드는 최소점수를  $a$  라 하면

$P(X \geq a) = P\left(Z \geq \frac{a-83}{5}\right) = 0.12$

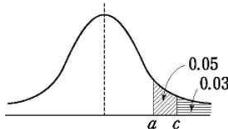
따라서  $P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-83}{5}\right) = 0.38$  이므로 주어진

표에서  
 $\frac{a-83}{5} = 1.2$

$\therefore a = 83 + 5 \times 1.2 = 89$

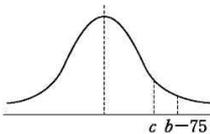
8) 정답 ㉟

ㄱ.



$P(Z > c) = 0.03 < 0.05 = P(Z > a)$  이므로  
 $c > a \therefore$  참

ㄴ.  $P(\bar{X} \leq c + 75) = P(Z \leq c) = 0.97 \therefore$  참  
 ㄷ.



$P(\bar{X} > b) = P(Z > b - 75)$   
 $= 0.01 < 0.03 = P(Z > c)$  이므로

$b - 75 > c \therefore$  참  
 따라서, ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

9) 정답 ㉠

비누 1개의 무게에 대한 확률변수  $X$ 가 정규분포  $N(m, \sigma^2)$ 을 따른다고 하면 비누를 4개씩 묶은 제품의 무게의 평균  $\bar{X}$ 는 정규분포  $N\left(m, \left(\frac{\sigma}{2}\right)^2\right)$ 을 따른다. 따라서  $P(\bar{X} < 100) = 0.001$ 이므로

$P(\bar{X} < 100) = P\left(Z < \frac{100-m}{\frac{\sigma}{2}}\right) = P\left(Z < \frac{2(100-m)}{\sigma}\right)$

$= 0.5 - P\left(0 < Z \leq \frac{2(100-m)}{\sigma}\right) = 0.001$  이다.

따라서  $P\left(0 < Z < -\frac{2(100-m)}{\sigma}\right) = 0.499$ 이므로

$-\frac{2(100-m)}{\sigma} = 3$ 이다. 즉,  $\frac{100-m}{\sigma} = -1.5$ 이다.

그러므로 비누 1개를 검사했을 때 불량품으로 판정될 확률은 다음과 같다.

$P(X < 100) = P\left(Z \leq \frac{100-m}{\sigma}\right) = P(Z < -1.5)$

$= 0.5 - P(0 < Z < 1.5) = 0.5 - 0.433 = 0.067$

따라서 구하는 확률은 0.067이다.

10) 정답 16

모집단의 통학시간  $X \sim N(50, \sigma^2)$

표본의 크기  $n = 16$  이므로 표본평균

$\bar{X} \sim N\left(50, \left(\frac{\sigma}{4}\right)^2\right)$

$P(50 \leq \bar{X} \leq 56) = P\left(0 \leq Z \leq \frac{24}{\sigma}\right) = 0.4332$

$\frac{24}{\sigma} = 1.5 \therefore \sigma = 16$

11) 17. [출제의도] 모비율의 신뢰구간을 이해하여 실생활과 관련된 문제를 해결한다.

표본비율  $\hat{p} = \frac{80}{100} = \frac{4}{5}$  이고 표본의 크기는 100 이므로

출근 소요 시간이 60분 이상 120분 미만인 직원의 비율  $p$ 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$\frac{4}{5} - 1.96 \times \sqrt{\frac{\frac{4}{5} \times \frac{1}{5}}{100}} \leq p \leq \frac{4}{5} + 1.96 \times \sqrt{\frac{\frac{4}{5} \times \frac{1}{5}}{100}}$

$$5000(b-a) = 5000 \times 2 \times 1.96 \times \sqrt{\frac{\frac{4}{5} \times \frac{1}{5}}{100}}$$

$$= 5000 \times 2 \times 1.96 \times \frac{4}{100}$$

$$= 784$$

12) 정답 100

[출제의도] 모평균의 추정을 이용하여 수학적문제 해결하기

각각의 신뢰구간의 길이는

$$2 \times 2.6 \times \frac{\sigma}{\sqrt{169}}, 2 \times 2 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

이고

$$9 \times 2.6 \times \frac{\sigma}{\sqrt{169}} = 2 \times 2 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \sqrt{n} = 10$$

$$\therefore n = 100$$

13) 정답 256

표본의 크기가  $n$ 일 때, 중앙공원을 이용한 경험이 있는

주민의 표본비율은  $\hat{p} = 0.8$ 이므로

중앙공원을 이용한 경험이 있는 주민의 모비율  $p$ 를 신뢰도 95%로 추정한 신뢰구간은

$$\left[ 0.8 - 1.96 \times \sqrt{\frac{0.8 \times 0.2}{n}}, 0.8 + 1.96 \times \sqrt{\frac{0.8 \times 0.2}{n}} \right]$$

따라서  $b-a = 2 \times 1.96 \times \sqrt{\frac{0.8 \times 0.2}{n}} = 0.098$ 에서

$$\sqrt{n} = \frac{2 \times 1.96 \times 0.4}{0.098} = 16$$

$$\therefore n = 256$$

14) 정답 588

표본비율은  $\hat{p} = \frac{100}{1000} = 0.1$ 이고, 표본비율  $\hat{p}$ 는 근사적으로 정규분포  $N\left(p, \frac{0.1 \times 0.9}{1000}\right)$ 을 따른다. 따라서, 표본

의 크기가  $n$ 일 때, 모비율  $p$ 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\left[ \hat{p} - 1.96 \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}, \hat{p} + 1.96 \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \right] \text{에서}$$

$$b-a = 2 \times 1.96 \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \text{이다. 따라서}$$

$$2 \times 1.96 \sqrt{\frac{0.1 \times 0.9}{n}} \leq 0.002 \text{에서}$$

$$\sqrt{n} \geq 588 \text{이므로 } \sqrt{p} = 588 \text{이다.}$$

15) [출제의도] 확률변수의 평균을 구하는 과정 추론하기

공에 번호를 부여하는 모든 경우의 수를  $N$ 이라 하면  $N$ 은 서로 같은 흰 공 4개와 서로 같은 검은 공 3개를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$N = \boxed{35} \text{이고, 확률변수 } X \text{가 가질 수 있는}$$

값은 2, 3, 4, 5이다.

(i)  $X=2$ 일 때,

번호 2가 부여된 흰 공 앞에 흰 공 1개, 번호 2가 부여된 흰 공 뒤에 흰 공 2개와 검은 공 3개를 나열하는 경우의 수는

$$1 \times \frac{5!}{2! \times 3!} \text{이므로}$$

$$P(X=2) = \frac{10}{N}$$

(ii)  $X=3$ 일 때,

번호 3이 부여된 흰 공 앞에 흰 공 1개와 검은 공 1개, 번호 3이 부여된 흰 공 뒤에 흰 공 2개와 검은 공 2개를 나열하는

경우의 수는  $2! \times \frac{4!}{2! \times 2!}$ 이므로

$$P(X=3) = \frac{12}{N}$$

(iii)  $X=4$ 일 때,

번호 4가 부여된 흰 공 앞에 흰 공 1개와 검은 공 2개, 번호 4가 부여된 흰 공 뒤에 흰 공 2개와 검은 공 1개를

나열하는 경우의 수는  $\boxed{9}$ 이므로

$$P(X=4) = \frac{\boxed{9}}{N}$$

(iv)  $X=5$ 일 때,

확률질량함수의 성질에 의하여

$$P(X=5) = 1 - \{P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)\}$$

$$\text{따라서 } E(X) = \sum_{k=2}^5 \{k \times P(X=k)\} = \boxed{\frac{16}{5}}$$

$$a = \frac{7!}{4! \times 3!} = 35, \quad b = \frac{3!}{2!} \times \frac{3!}{2!} = 9$$

확률변수  $X$ 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

$X$	2	3	4	5	합계
$P(X=x)$	$\frac{10}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{4}{35}$	1

$$c = 2 \times \frac{10}{35} + 3 \times \frac{12}{35} + 4 \times \frac{9}{35} + 5 \times \frac{4}{35} = \frac{16}{5}$$

따라서  $a + b + 5c = 60$

16) 19. [출제의도] 이산확률변수의 평균을 구하는 과정을 추론한다.

$a$ 와  $b$ 는  $1 \leq a < b \leq n$ 을 만족하는 자연수이고

$b-a$ 의 값이 확률변수  $X$ 이므로  $X$ 가 가질 수 있는 가장 작은 값은 1, 가장 큰 값은  $\boxed{n-1}$ 이다.

$X=k$ 일 때,  $b-a=k$ 에서

$a=b-k$ 이므로  $1 \leq a \leq n-k$ 이고,

$d-c=n-k$ 에서  $c=d-n+k$ 인데

$c$ 는 자연수이고  $d \leq n$ 이므로  $1 \leq c \leq \boxed{k}$ 이다.

$1 \leq a \leq n-k, 1 \leq c \leq k$ 에서

$$P(X=k) = \frac{(n-k) \times \boxed{k}}{\sum_{i=1}^{n-1} (n-i) \times i}$$

$P(X=k)$ 의 분모를 계산하면

$$\sum_{i=1}^{n-1} (n-i) \times i = \sum_{i=1}^{n-1} (ni - i^2) = \frac{n(n-1)(n+1)}{6}$$

따라서

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{n-1} \{k \times P(X=k)\} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ k \times \frac{6(n-k) \times \boxed{k}}{n(n-1)(n+1)} \right\} \\ &= \frac{6}{n(n-1)(n+1)} \sum_{k=1}^{n-1} \{k \times (n-k) \times \boxed{k}\} \\ &= \frac{n}{2} \end{aligned}$$

$f(n) = n-1, g(k) = k, h(n) = n(n-1)(n+1)$ 에서

$$\frac{h(7)}{f(8) \times g(6)} = \frac{7 \times 6 \times 8}{7 \times 6} = 8$$

17) [출제의도] 확률변수의 평균을 구하는 과정 추론하기

세 수  $x_1, x_2, x_3$ 을 순서쌍  $(x_1, x_2, x_3)$ 과 같이 나타내자.

$x_1, x_2, x_3$  중에서 최댓값을  $p$ , 최솟값을  $q$ , 나머지 수를  $r, p-q=k (k=0, 1, \dots, 5)$ 라 하면 순서쌍  $(x_1, x_2, x_3)$ 의 개수는  $p, q, r$ 를 일렬로 나열하는 방법의 수와 같다.

(1)  $k=0$ 일 때

세 수가 모두 같으므로

순서쌍  $(x_1, x_2, x_3)$ 의 개수는  $\boxed{6}$ 이고,

$$P(X=0) = \frac{1}{6^3} \times \boxed{6}$$

(2)  $k \neq 0$ 일 때 ( $1 \leq k \leq 5$ )

순서쌍  $(p, q)$ 의 개수는 각각의  $k$ 에 대하여  $6-k$ 이고

i)  $k=1$ 일 때

순서쌍  $(x_1, x_2, x_3)$ 의 개수는

$$5 \times \left( \frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!} \right)$$

ii)  $2 \leq k \leq 5$ 일 때

①  $r=p$  또는  $r=q$ 인 경우

$p, p, q$ 와  $p, q, q$ 를 일렬로 나열하는 방법의 수는  $\frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!}$

②  $r \neq p$ 이고  $r \neq q$ 인 경우

$r$ 의 개수는 각각의  $k$ 에 대하여  $k-1$ 이고  $p, r, q$ 를 일렬로 나열하는 방법의 수는  ${}_3P_3 = 3!$ 이므로  $(k-1) \times 3!$

①, ②에 의하여

순서쌍  $(x_1, x_2, x_3)$ 의 개수는

$$(6-k) \times \left\{ \frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!} + (k-1) \times 3! \right\}$$

그러므로  $1 \leq k \leq 5$ 일 때,

순서쌍  $(x_1, x_2, x_3)$ 의 개수는

$$(6-k) \times \left\{ \frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!} + (\boxed{k-1}) \times 3! \right\}$$

(예를 들어)

$k=3$ 인 경우

$(p, r, q)$ 는  $(4, r, 1), (5, r, 2), (6, r, 3)$

이므로 개수는 3

$(p, r, q)$ 가  $(4, r, 1)$ 일 때

①  $r=4$  또는  $r=1$ 인 경우

4, 4, 1과 4, 1, 1을 일렬로 나열하는

방법의 수는  $\frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!}$

②  $r \neq 4$ 이고  $r \neq 1$ 인 경우

$r$ 는 3 또는 2이므로  $r$ 의 개수는 2

$p, r, q$ 를 일렬로 나열하는 방법의 수는  ${}_3P_3 = 3!$ 이므로  $2 \times 3!$

①, ②에 의하여

4,  $r, 1$ 을 일렬로 나열하는 방법의 수는

$$\frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!} + 2 \times 3!$$

$(5, r, 2), (6, r, 3)$ 일 때에도 같은 방법으로

구하면 각각  $\frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!} + 2 \times 3!$

그러므로  $k=3$ 인 경우

순서쌍  $(x_1, x_2, x_3)$ 의 개수는

$$3 \times \left( \frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!} + 2 \times 3! \right)$$

그러므로

$$P(X=k)$$

$$= \frac{1}{6^3} \times (6-k) \times \left\{ \frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!} + (k-1) \times 3! \right\}$$

(1), (2)에 의하여 확률변수  $X$ 의 평균  $E(X)$ 는 다음과 같다.

$$E(X) = \sum_{k=0}^5 \{k \times P(X=k)\}$$

$$= \frac{1}{6^2} \sum_{k=1}^5 (6k^2 - k^3) = \frac{35}{12}$$

$a=6, f(k)=k-1, g(k)=6k^2-k^3$

따라서  $\frac{f(5) \times g(3)}{a} = \frac{4 \times 27}{6} = 18$