4th Technic. 정적분
최근 2년 기출로 분석하는

정적분 최근기출로 최신경향을 정리하자

-E.T-

적분 레시피

1. 여러 가지 함수와 정적분
2. 함수 추론과 정적분
3. 넓이, 부피 구하기

1. 여러 가지 함수와 정적분

1. 함수 $f(x)$가 $f(x)=e^x+\int_0^1 tf(t)\,dt$ 를 만족시킬 때,

$f(\ln 10)$의 값을 구하시오.1) [4점] [2017 7월 교육청]

2. 미분 가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이다. $f(1)=3$, $g(1)=3$일 때, $\int_{1}^{3}\left\{\frac{f(x)}{f'(g(x))}+\frac{g(x)}{g'(f(x))}\right\}dx$ 의 값은?[2)]

[4점] [2017 10월 교육청]

① -8 ② -4 ③ 0 ④ 4 ⑤ 8

3. 연속함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x \neq 0$인 실수 x에 대하여 $\{f(x)\}^2 f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$
(나) $f(0)=0$

$\{f(1)\}^3$의 값은? 3) [4점] [2017 10월 교육청]

① $2\ln 2$ ② $3\ln 2$ ③ $1+2\ln 2$

④ $4\ln 2$ ⑤ $1+3\ln 2$

4. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$x\int_0^x f(t)\,dt - \int_0^x tf(t)\,dt = ae^{2x} - 4x + b$ 를 만족시킬 때,

$f(a)f(b)$의 값을 구하시오.[4] (단, a, b는 상수이다.)

[4점] [2018 3월 교육청]

5. 함수 $f(x)=\ln x$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}f\left(1+\frac{k}{n}\right)=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.5) (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[4점] [2018 3월 교육청]

6. 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 양의 실수 x에 대하여 $g(x)=\int_1^x \frac{f(t^2+1)}{t}dt$
(나) $\int_2^5 f(x)dx=16$

$g(2)=3$일 때, $\int_1^2 xg(x)dx$의 값은?6) [4점] [2018 7월 교육청]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

2. 함수추론과 정적분

7. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여

함수 $g(x)$가 $g(x)=\int_0^x \frac{t}{f(t)}\,dt$ 일 때,

함수 $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $g'(-x)=-g'(x)$이다.
(나) 점 $(1,\ g(1))$은 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이다.

$g(1)$의 값은?[7] [4점] [2017 7월 교육청]

① $\frac{1}{5}\ln 2$ ② $\frac{1}{4}\ln 2$ ③ $\frac{1}{3}\ln 2$ ④ $\frac{1}{2}\ln 2$ ⑤ $\ln 2$

8. 연속함수 $f(x)$가

$\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 12$, $\displaystyle\int_{0}^{1} xf(x)\,dx = \int_{0}^{-1} xf(x)\,dx$ 를 만족시킨다.

$\displaystyle\int_{-1}^{x} f(t)\,dt = F(x)$라 할 때,

$\displaystyle\int_{-1}^{1} F(x)\,dx$의 값은?[8)] [4점] [2017 3월 교육청]

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

9. $ab<0$ 인 상수 a, b 에 대하여 함수 $f(x)$ 는 $f(x)=(ax+b)e^{-\frac{x}{2}}$ 이고

함수 $g(x)$ 는 $g(x)=\int_0^x f(t)dt$ 이다.

실수 $k\,(k>0)$ 에 대하여 부등식 $g(x)-k \geq xf(x)$ 를 만족시키는 양의 실수 x 가 존재할 때, 이 x 의 값 중 최솟값을 $h(k)$ 라 하자.

함수 $g(x)$ 와 $h(k)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$ 는 극댓값 α 를 갖고 $h(\alpha)=2$ 이다.
(나) $h(k)$ 의 값이 존재하는 k 의 최댓값은 $8e^{-2}$ 이다.

$100(a^2+b^2)$ 의 값을 구하시오.9) (단, $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$)

[4점] [2018 7월 교육청]

10. 구간 $[0, 1]$에서 정의된 연속함수 $f(x)$에 대하여 함수

$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt\ \ (0 \le x \le 1)$은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $F(x)=f(x)-x$

(나) $\int_0^1 F(x)\,dx = e-\frac{5}{2}$

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?[10)]

[4점] [2017 3월 교육청]

< 보 기 >

ㄱ. $F(1)=e$

ㄴ. $\int_0^1 xF(x)\,dx = \frac{1}{6}$

ㄷ. $\int_0^1 \{F(x)\}^2\,dx = \frac{1}{2}e^2-2e+\frac{11}{6}$

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

3. 넓이, 부피

11. 연속함수 $f(x)$와 그 역함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)=1,\ f(3)=3,\ f(7)=7$
(나) $x \neq 3$인 모든 실수 x에 대하여 $f''(x)<0$이다.
(다) $\int_1^7 f(x)\,dx = 27,\ \int_1^3 g(x)\,dx = 3$

$12\int_3^7 \lvert f(x)-x \rvert\,dx$의 값을 구하시오. 11)[4점] [2017 3월 교육청]

12. 그림과 같이

곡선 $y=\sqrt{x+\frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$와 x축 및

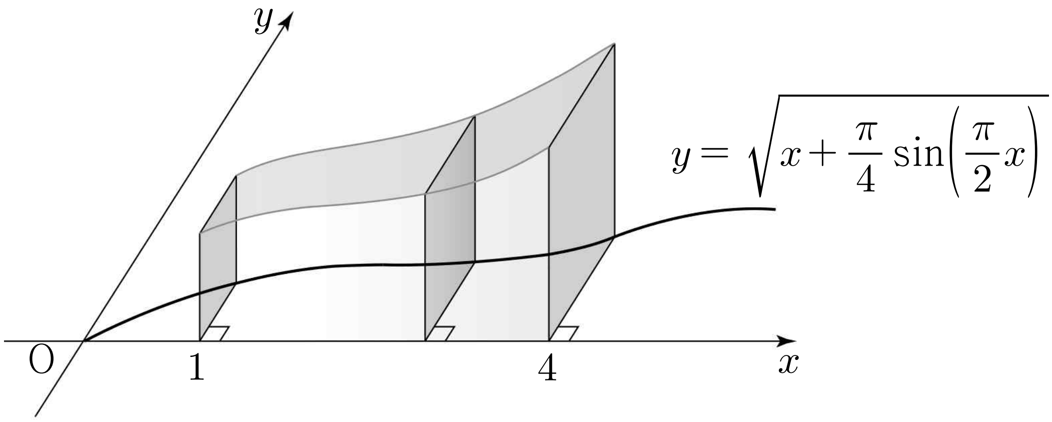
두 직선 $x=1$, $x=4$로 둘러싸인 도형을

밑면으로 하는 입체도형이 있다.

이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이

모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피를 구하시오.12)

[4점] [2017 4월 교육청]



13. 그림과 같이

곡선 $y=3x+\dfrac{2}{x}\,(x>0)$와 x축 및

직선 $x=1$, 직선 $x=2$로 둘러싸인 도형을

밑면으로 하는 입체도형이 있다.

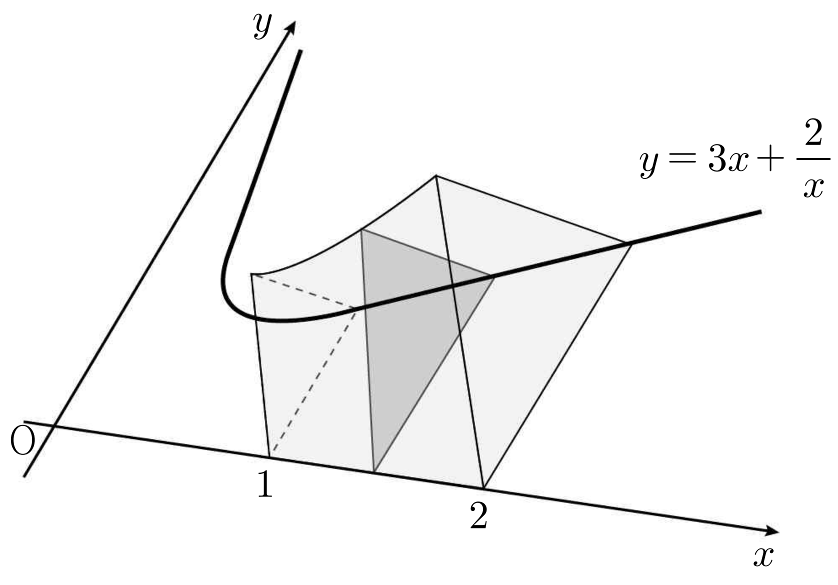
이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이

모두 정삼각형일 때, 이 입체도형의 부피는?[13]

[4점] [2017 7월 교육청]

① $\dfrac{35\sqrt{3}}{4}$ ② $\dfrac{37\sqrt{3}}{4}$ ③ $\dfrac{39\sqrt{3}}{4}$

④ $\dfrac{41\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $\dfrac{43\sqrt{3}}{4}$

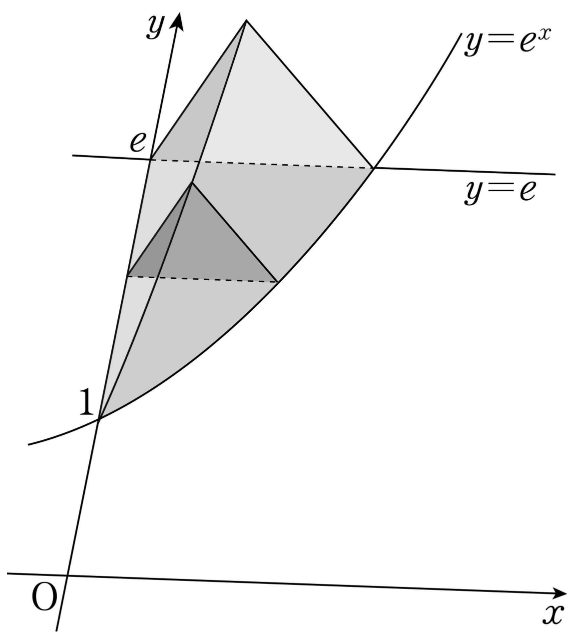


14. 곡선 $y=e^x$과 y축 및 직선 $y=e$로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다.
이 입체도형을 y축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정삼각형일 때, 이 입체도형의 부피는?[14)]

[4점] [2017 3월 교육청]

① $\dfrac{\sqrt{3}(e+1)}{4}$ ② $\dfrac{\sqrt{3}(e-1)}{2}$ ③ $\dfrac{\sqrt{3}(e-1)}{4}$

④ $\dfrac{\sqrt{3}(e-2)}{2}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{3}(e-2)}{4}$



정답과 해설

1) [출제의도] 여러 가지 함수의 정적분을 활용하여 문제해결하기

$\int_0^1 tf(t)dt = a$ 라 하면 $f(x) = e^x + a$

$a = \int_0^1 t(e^t + a)dt$ 에서

$u'(t) = e^t + a,\ v(t) = t$ 라 하면

$u(t) = e^t + at,\ v'(t) = 1$ 이므로

$$a = \int_0^1 t(e^t + a)dt = \left[t(e^t + a\,t)\right]_0^1 - \int_0^1 (e^t + a\,t)dt = e + a - \left[e^t + \frac{1}{2}at^2\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}a + 1$$

$a = 2$ 이므로 $f(x) = e^x + 2$

따라서 $f(\ln 10) = 12$

2) [출제의도] 함수와 그 함수의 역함수의 미분법을 이해하여 정적분의 값을 구한다.

$f(g(x)) = x$, $g(f(x)) = x$이므로

$f'(g(x))g'(x) = 1$, $g'(f(x))f'(x) = 1$

따라서

$$\int_1^3 \left\{ \frac{f(x)}{f'(g(x))} + \frac{g(x)}{g'(f(x))} \right\} dx$$

$$= \int_1^3 \{f(x)g'(x) + g(x)f'(x)\}dx$$

$$= \int_1^3 \{f(x)g(x)\}'\,dx$$

$$= \left[f(x)g(x)\right]_1^3$$

$$= f(3)g(3) - f(1)g(1)$$

$f(1) = 3$에서 $g(3) = 1$, $g(1) = 3$에서 $f(3) = 1$

따라서 $f(3)g(3) - f(1)g(1) = 1 \times 1 - 3 \times 3 = -8$

3)[출제의도] 치환적분법을 이해하여 함수의 값을 구한다.

조건 (가)에서 $\{f(x)\}^2 f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ 의 양변을 각각 x 에 대하여 적분하면

$$\int \{f(x)\}^2 f'(x)\,dx = \int \frac{2x}{x^2+1}dx$$

$f(x) = t$ 라 할 때 $f'(x) = \dfrac{dt}{dx}$ 이므로

$$\int \{f(x)\}^2 f'(x)\,dx = \int t^2\,dt = \frac{1}{3}t^3 + C_1$$

$$= \frac{1}{3}\{f(x)\}^3 + C_1$$ (C_1은 적분상수)

$$\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \ln(x^2+1) + C_2$$ (C_2는 적분상수)

그러므로 $\{f(x)\}^3 = 3\ln(x^2+1) + C$ (C 는 적분상수)

조건 (나)에서 $f(0) = 0$ 이므로 $C = 0$

따라서 $\{f(x)\}^3 = 3\ln(x^2+1)$ 이므로 $\{f(1)\}^3 = 3\ln 2$

4) [출제의도] 정적분의 성질을 이용하여 함숫값을 구한다.

$$x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt = ae^{2x} - 4x + b \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변에 $x = 0$ 을 대입하면

$0 = a + b$ ...... ㉡

㉠의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\int_0^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) = 2ae^{2x} - 4$$

즉 $\displaystyle\int_0^x f(t)dt = 2ae^{2x} - 4$ ...... ㉢

㉢의 양변에 $x = 0$을 대입하면

$0 = 2a - 4$, 즉 $a = 2$

이므로 ㉡에서 $b = -2$이다.

$\displaystyle\int_0^x f(t)dt = 4e^{2x} - 4$의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$f(x) = 8e^{2x}$ 이므로

$f(a)f(b) = f(2)f(-2)$

$$=\left(8e^{4}\right)\times\left(8e^{-4}\right)$$
$$=64e^{4-4}$$
$$=64$$

5) [출제의도] 정적분의 정의를 이용하여 급수의 합을 구한다.

$x_k=1+\dfrac{k}{n}$ 로 놓으면 $\Delta x=\dfrac{1}{n}$ 이므로 정적분의 정의에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}f\left(1+\frac{k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}f\left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$$
$$=\int_1^2(x-1)f(x)dx$$

이다. 따라서

$$\int_1^2(x-1)\ln x\,dx=\left[\left(\frac{1}{2}x^2-x\right)\ln x\right]_1^2-\int_1^2\frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}x^2-x\right)dx$$
$$=(0-0)-\int_1^2\left(\frac{1}{2}x-1\right)dx$$
$$=-\left[\frac{1}{4}x^2-x\right]_1^2$$
$$=-(1-2)+\left(\frac{1}{4}-1\right)$$
$$=\frac{1}{4}$$

$p=4$, $q=1$ 이므로

$p+q=5$

6) [출제의도] 여러 가지 함수의 정적분을 활용하여 문제해결하기

$u'(x)=x,\ v(x)=g(x)$ 라 하면

$u(x)=\dfrac{1}{2}x^2,\ v'(x)=g'(x)$

조건 (가)에 의하여 $g(1)=0$, $g'(x)=\dfrac{f\left(x^2+1\right)}{x}$

$$\int_1^2 xg(x)dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 g(x)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2}x^2 g'(x)dx$$

$$= 2g(2) - \frac{1}{2}g(1) - \int_1^2 \left\{\frac{1}{2}x^2 \times \frac{f(x^2+1)}{x}\right\}dx$$

$$= 2\times 3 - \frac{1}{2}\times 0 - \frac{1}{2}\int_1^2 xf(x^2+1)dx$$

$x^2+1=t$ 라 하자.

$$\int_1^2 xg(x)dx$$

$$= 6 - \frac{1}{2}\int_2^5 \frac{1}{2}f(t)dt$$

$$= 6 - \frac{1}{4}\times 16 = 2$$

7) [출제의도] 정적분으로 나타내어진 함수 추론하기

$g'(x)= \dfrac{x}{f(x)}$, $g'(-x)=-g'(x)$ 이므로

$f(-x)=f(x)$ 이다.

$f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1 인 이차함수이므로

$f(x)=x^2+k$ (단, k는 상수이다.)

점 $(1,\ g(1))$ 은 곡선 $y=g(x)$ 의 변곡점이므로

$$g''(x) = \frac{f(x)-xf'(x)}{\{f(x)\}^2}$$

$$g''(1) = \frac{f(1)-f'(1)}{\{f(1)\}^2} = \frac{1+k-2}{(1+k)^2} = 0$$

$k=1$ 이므로 $f(x)=x^2+1$

따라서 $g(1) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t}{t^2+1}dt \qquad = \frac{1}{2}\left[\ln(t^2+1)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2$

8) [출제의도] 부분적분법을 이용하여 일반적인 함수의 정적분의 값을 추론한다.

$\displaystyle\int_{-1}^x f(t)\,dt = F(x)$ 이므로 $F'(x)=f(x)$, $F(-1)=0$

$$\int_0^1 xf(x)\,dx = \int_0^{-1} xf(x)\,dx$$ 이므로

$$\int_0^1 xf(x)\,dx - \int_0^{-1} xf(x)\,dx = 0$$

$$\int_0^1 xf(x)\,dx + \int_{-1}^{0} xf(x)\,dx = 0$$

$$\int_{-1}^1 xf(x)\,dx = 0$$

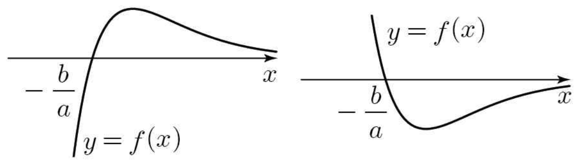
정적분의 부분적분법에 의하여,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 F(x)\,dx &= \Big[xF(x)\Big]_{-1}^{1} - \int_{-1}^1 xf(x)\,dx \\ &= F(1)+F(-1)-0 \\ &= F(1)+0 \\ &= \int_{-1}^1 f(x)\,dx = 12\end{aligned}$$

9) 30. [출제의도] 정적분으로 나타내어진 함수 추론하기

함수 $f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.

(i) $a>0$ (ii) $a<0$



$g(x)=\int_0^x f(t)dt$ 에서 $g(0)=0$, $g'(x)=f(x)$

조건 (가)에 의하여 함수 $g(x)$ 는 $x=-\dfrac{b}{a}$ 에서 극댓값 α 를 가지므로 $a<0$ 이고 $b>0$ 이다.

$g(x)-k \ge xf(x)$ 에서 $g(x)-xf(x) \ge k$ 이므로

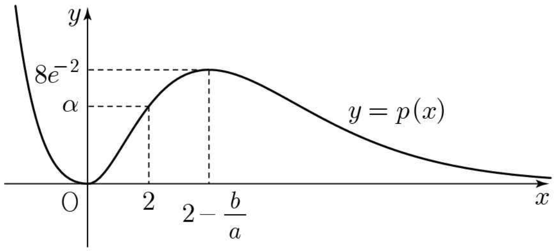
$p(x)=g(x)-xf(x)$ 라 하면

$p'(x)=g'(x)-f(x)-xf'(x)=-xf'(x)$

$$f'(x)=-\frac{1}{2}a\left(x-2+\frac{b}{a}\right)e^{-\frac{x}{2}}$$

$p'(x)=\frac{1}{2}ax\left(x-2+\frac{b}{a}\right)e^{-\frac{x}{2}}$

조건 (가), (나)를 만족시키는 함수 $p(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$g\left(-\frac{b}{a}\right)=\alpha$, $f\left(-\frac{b}{a}\right)=0$ 에 의하여 $p\left(-\frac{b}{a}\right)=g\left(-\frac{b}{a}\right)-\left(-\frac{b}{a}\right)f\left(-\frac{b}{a}\right)=\alpha$

$2=-\frac{b}{a}$

$p(x)=g(x)-xf(x)\geq k$ 에서 양수 x 의 범위에서 함수 $p(x)$ 의 최댓값은 $h(k)$ 의 값이 존재하는 k 의 최댓값이므로 $p(4)=8e^{-2}$

$g(4)=\int_0^4 a(t-2)e^{-\frac{t}{2}}dt=\left[a(t-2)\left(-2e^{-\frac{t}{2}}\right)\right]_0^4-\int_0^4\left(-2ae^{-\frac{t}{2}}\right)dt$

$=-4ae^{-2}-4a-\left[4ae^{-\frac{t}{2}}\right]_0^4=-4ae^{-2}-4a-4ae^{-2}+4a$

$=-8ae^{-2}$

$p(4)=g(4)-4f(4)$

$=-8ae^{-2}-4\times 2ae^{-2}$

$=-16ae^{-2}$

$-16ae^{-2}=8e^{-2}$ 이므로 $a=-\frac{1}{2}$, $b=1$

따라서 $100\left(a^2+b^2\right)=125$

10) [출제의도] 정적분의 적분법을 이용하여 정적분의 값을 추론한다.

ㄱ. (가)의 $F(x)=f(x)-x$ 를 (나)의 $F(x)$ 에 대입하면

$$\begin{aligned}\int_0^1 F(x)\,dx &= \int_0^1 \{f(x)-x\}\,dx \\ &= \int_0^1 f(x)\,dx-\int_0^1 x\,dx \\ &= \int_0^1 f(x)\,dx-\frac{1}{2} \\ &= F(1)-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

이므로 $F(1)=e-\dfrac{5}{2}+\dfrac{1}{2}=e-2$ (거짓)

ㄴ. (가)의 $F(x)=f(x)-x$ 를 $\int_0^1 xF(x)dx$의 $F(x)$ 에 대입하면

$$\begin{aligned}\int_0^1 xF(x)dx &= \int_0^1 x\{f(x)-x\}\,dx \\ &= \int_0^1 \left\{xf(x)-x^2\right\}dx \\ &= \int_0^1 xf(x)\,dx-\int_0^1 x^2\,dx=\Big[xF(x)\Big]_0^1-\int_0^1 F(x)\,dx-\frac{1}{3} \\ &= F(1)-\left(e-\frac{5}{2}\right)-\frac{1}{3} \\ &= e-2-e+\frac{5}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\end{aligned}$$

(참)

ㄷ. $F(0)=\int_0^0 f(t)\,dt=0$ 이고, $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$F'(x)=f(x)$

(가)에 의해서

$$\int_0^1 \{F(x)\}^2 dx = \int_0^1 F(x)\{f(x)-x\}\, dx$$

$$= \int_0^1 F(x)f(x)\, dx - \int_0^1 xF(x)\, dx$$

$$= \int_0^1 F(x)F'(x)\, dx - \int_0^1 xF(x)\, dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}\{F(x)\}^2\right]_0^1 - \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{2}\{F(1)\}^2 - \frac{1}{2}\{F(0)\}^2 - \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{2}(e-2)^2 - \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{2}e^2 - 2e + \frac{11}{6} \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

[다른 풀이]

$F(x)=\int_0^x f(t)\, dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$F'(x)=f(x)$

조건 (가)의 $F(x)=f(x)-x$ 의 양변을 x 에 대하여 두 번 미분하면 $f'(x)=f''(x)$

$\dfrac{f''(x)}{f'(x)}=1$ 이므로 양변을 x 에 대하여 적분하면

$\ln|f'(x)|=x+C_1$ (단, C_1 는 적분상수)

$f'(x)=C_2 e^x$ (단, C_2 는 상수)이므로 양변을 x 에 대하여 적분하면 $f(x)=C_2 e^x + C_3$ (단, C_3 은 적분 상수)

$0=F(0)=f(0)-0$, $f(0)=0$

$f(x)=f'(x)-1$ 이므로 $f'(0)=1$

$f'(x)=C_2 e^x$, $f(x)=C_2 e^x + C_3$ 에 $x=0$ 을 대입하면

$f'(0)=C_2=1$, $f(0)=C_2+C_3=0$, $C_3=-1$

$f(x)=e^x-1$

이를 조건 (가)에 대입하면

$$F(x)=e^x-x-1$$

$$\int_0^1 F(x)\,dx=\int_0^1 \left(e^x-x-1\right)dx$$

$$=\left[e^x-\frac{1}{2}x^2-x\right]_0^1$$

$$=(e-1)-\frac{1}{2}-1$$

$$=e-\frac{5}{2}$$

이므로 함수 $F(x)=e^x-x-1$ 은 조건 (나)를 만족시킨다.

ㄱ. $F(1)=e^1-1-1=e-2$ (거짓)

ㄴ. $\int_0^1 x\,F(x)\,dx=\int_0^1 x\left(e^x-x-1\right)dx$

$$=\int_0^1 x\,e^x\,dx-\int_0^1 x^2\,dx-\int_0^1 x\,dx$$

$$=\left[x\,e^x\right]_0^1-\int_0^1 e^x\,dx-\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1-\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$

$$=\left[x\,e^x\right]_0^1-\left[e^x\right]_0^1-\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1-\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$

$$=e-(e-1)-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$ (참)

ㄷ. $\int_0^1 \{F(x)\}^2\,dx=\int_0^1 \left(e^x-x-1\right)^2 dx$

$$=\int_0^1 \left\{e^{2x}+x^2+1-2x\,e^x+2x-2e^x\right\}dx$$

$$=\int_0^1 e^{2x}\,dx+\int_0^1 x^2\,dx+\int_0^1 1\,dx$$

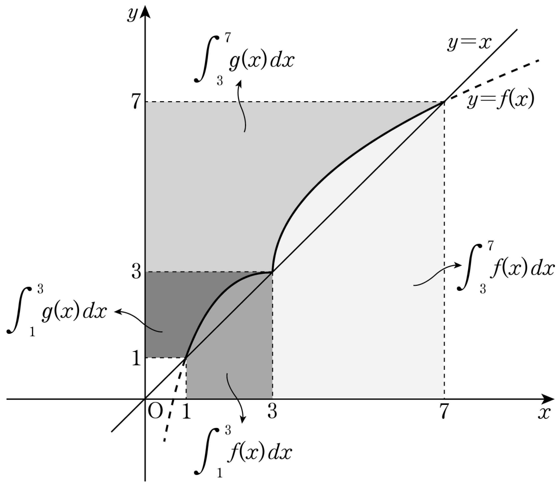
$$-2\int_0^1 x\,e^x\,dx+\int_0^1 2x\,dx-2\int_0^1 e^x\,dx=\left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1+\left[x\right]_0^1$$

$$-2\left[xe^x\right]_0^1+2\left[e^x\right]_0^1+\left[x^2\right]_0^1-2\left[e^x\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{2}(e^2-1)+\frac{1}{3}+1-2\times1+1-2(e-1)=\frac{1}{2}e^2-2e+\frac{11}{6}$$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

11) [출제의도] 이계도함수를 활용하여 주어진 정적분 문제를 해결한다.



함수 $f(x)$ 가 $f(1)<f(3)$ 이고 일대일대응이므로 함수 $f(x)$ 는 구간 $[1,\ 3]$ 에서 증가한다.

그러므로 $\int_1^3 f(x)\,dx=3\times3-1\times1-\int_1^3 g(x)\,dx$

조건 (다)에 의해서 $\int_1^3 g(x)\,dx=3$ 이므로

$$\int_1^3 f(x)\,dx=8-3=5$$

$$\int_3^7 f(x)\,dx=\int_1^7 f(x)\,dx-\int_1^3 f(x)\,dx$$

$$=27-5=22$$

조건 (나)에 의해서 함수 $f(x)$ 의 그래프는 구간 $(3,\ 7)$ 에서 위로 볼록하다. 조건 (가)에 의해서 $f(3)=3$, $f(7)=7$ 이므로 구간 $[3,\ 7]$에서 $f(x)-x\ge0$ 이다.

$$12\int_3^7|f(x)-x|\,dx=12\int_3^7\{f(x)-x\}\,dx=12\left\{\int_3^7 f(x)\,dx-\int_3^7 x\,dx\right\}$$

$$=12\times(22-20)=24$$

12) [출제의도] 정적분을 활용하여 문제해결하기

x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(x)$라

하면

$$S(x)=\left\{\sqrt{x+\frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}\right\}^2$$

입체도형의 부피 V는

$$V=\int_1^4 S(x)dx=\int_1^4\left\{x+\frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right\}dx=\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]_1^4=7$$

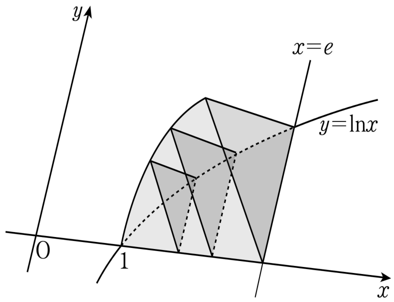
13) [출제의도] 정적분을 활용하여 문제해결하기

직선 $x=t\,(1\le t\le 2)$를 포함하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(t)$라 하면

$$S(t)=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(3t+\frac{2}{t}\right)^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(9t^2+12+\frac{4}{t^2}\right)$$ 따라서 구하는 부피 V는

$$V=\int_1^2 S(t)dt=\int_1^2\frac{\sqrt{3}}{4}\left(9t^2+12+\frac{4}{t^2}\right)dt=\frac{\sqrt{3}}{4}\left[3t^3+12t-\frac{4}{t}\right]_1^2=\frac{35\sqrt{3}}{4}$$

14) [출제의도] 정적분을 활용하여 입체도형의 부피 구하는 문제를 해결한다.



$y=e^x$의 역함수는 $y=\ln x$이므로

점 $(0,\,1)$은 점 $(1,\,0)$으로, 점 $(0,\,e)$는 점 $(e,\,0)$으로 이동한다.

그런데 $x=t\,(1\le t\le e)$일 때 정삼각형의 한 변의 길이는 $\ln t$이므로 정삼각형의 넓이를 $S(t)$라 하면

$$S(t)=\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\ln t)^2$$

따라서 구하는 부피는

$$\int_1^e S(t)\,dt=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_1^e(\ln t)^2\,dt=\frac{\sqrt{3}}{4}\left\{\left[t(\ln t)^2\right]_1^e-\int_1^e t\left(2\times\frac{1}{t}\times\ln t\right)dt\right\}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left\{\left[t(\ln t)^2\right]_1^e-2\int_1^e\ln t\,dt\right\}=\frac{\sqrt{3}}{4}\left\{\left[t(\ln t)^2\right]_1^e-2\left[t\ln t-t\right]_1^e\right\}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}(e-2)$$

[다른 풀이]

$\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C$ (단, C는 적분상수)이므로

$$\int_1^e S(t)\,dt = \frac{\sqrt{3}}{4}\int_1^e (\ln t)^2\,dt$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left\{\Big[\ln t\,(t\ln t - t)\Big]_1^e - \int_1^e (\ln t - 1)\,dt\right\}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left\{\Big[\ln t\,(t\ln t - t)\Big]_1^e - \Big[t\ln t - 2t\Big]_1^e\right\} = \frac{\sqrt{3}}{4}(e-2)$$

[다른 풀이]

함수 $f(x)=e^x$의 역함수를 $f^{-1}(x)$라 하고, 입체도형의 부피를 V라 하면

$$V = \int_1^e \frac{\sqrt{3}}{4}\left\{f^{-1}(y)\right\}^2 dy$$

이다. $y=f(x)$에서 $f^{-1}(y)=x$이고 $y=f(x)$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $\frac{dy}{dx}=f'(x)=e^x$이므로

$$V = \frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^1 x^2 f'(x)\,dx$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^1 x^2 e^x dx$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left\{\Big[x^2 e^x\Big]_0^1 - 2\int_0^1 x e^x\,dx\right\}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left\{\Big[x^2 e^x\Big]_0^1 - 2\left(\Big[xe^x\Big]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx\right)\right\}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left\{\Big[x^2 e^x\Big]_0^1 - 2\left(\Big[xe^x\Big]_0^1 - \Big[e^x\Big]_0^1\right)\right\}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}(e-2)$$