Third Technic. 벡터사용법

벡터는 공간을 지배할 수 있는 핵심 아이템이다.
-E.T-

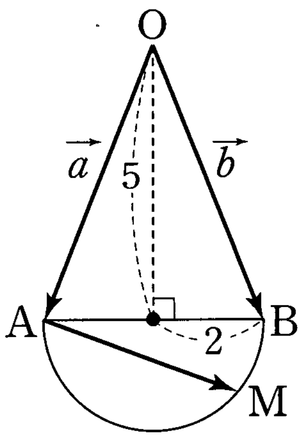
벡터 레시피

1. 벡터의 연산과 벡터의 해석
2. 내적의 활용법
3. 공간벡터와 공간도형

1. 벡터의 연산과 벡터의 해석

<< 연습 >>

1. 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 2이고, $\overline{AB}$를 지름으로 하는 반원 위에 높이가 5인 삼각형 OAB를 붙이자. 호 AB의 둘레의 $\frac{3}{4}$인 지점을 M이라 하고, $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$라 할 때, $\overrightarrow{AM}=s\vec{a}+t\vec{b}$로 나타낼 수 있다.
이때, 두 실수 s, t의 합 $s+t$의 값을 구하여라.



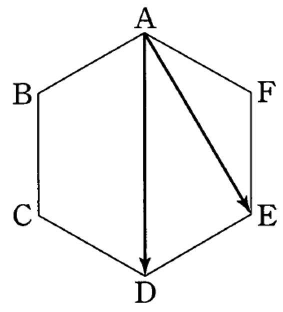
2. 평면 위에 삼각형 OAB가 있다.
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ $(s \ge 0,\ t \ge 0)$를 만족하는 점 P가 그리는 도형에 대한 옳은 설명을 다음에서 모두 고른 것은?

ㄱ. $s+t=1$일 때, 점 P가 그리는 도형은 선분 AB이다.
ㄴ. $s+2t=1$일 때, 점 P가 그리는 도형의 길이는 선분 AB의 길이보다 크다.
ㄷ. $s+2t \le 1$일 때, 점 P가 그리는 영역은 삼각형 OAB를 포함한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

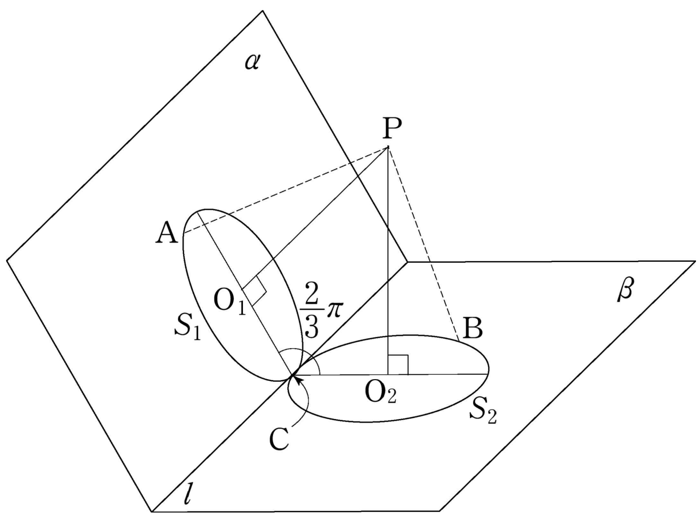
3. 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정육각형 $ABCDEF$에서 $|(1-x)\overrightarrow{AD}+x\overrightarrow{AE}|=4\sqrt{3}$을 만족시키는 양수 x의 값은?

① 3 ② 4
③ 5 ④ 6
⑤ 7



4. 두 평면 α, β의 교선을 l이라 하자. 평면 α 위에 있는 원 S_1과 평면 β 위에 있는 원 S_2는 반지름의 길이가 모두 2이다. 그림과 같이 원 S_1과 원 S_2는 점 C에서 직선 l과 접한다. S_1의 중심 O_1을 지나고 평면 α에 수직인 직선과 S_2의 중심 O_2를 지나고 평면 β에 수직인 직선이 만나는 점을 P라 하자. $\angle \mathrm{O}_1\mathrm{C}\mathrm{O}_2=\dfrac{2}{3}$ 일 때, S_1 위에 있는 임의의 점 A와 S_2 위에 있는 임의의 점 B에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}|$의 최대값을 M, 최소값을 m이라 하자. $M+m$의 값을 구하시오.

[4점][2005년 9월]



2. 내적의 활용법

<< 연습 >>

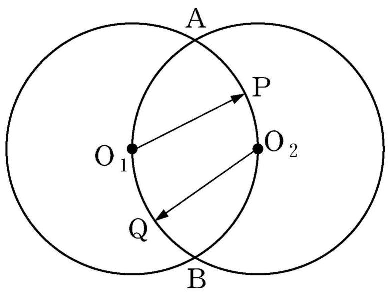
6. 좌표공간의 점 $\mathrm{A}(3,6,0)$에서 평면 $\sqrt{3}y-z=0$에 내린 수선의 발을 B라 할 때, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$의 값을 구하시오.

(단, O는 원점이다.)

[4점][2007년 수능]

7. 평면 위의 두 점 $\mathrm{O_1}$, $\mathrm{O_2}$ 사이의 거리가 1일 때, $\mathrm{O_1}$, $\mathrm{O_2}$를 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 두 원의 교점을 A, B라 하자. 호 $\mathrm{AO_2B}$ 위의 점 P와 호 $\mathrm{AO_1B}$ 위의 점 Q에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{O_1P}}$, $\overrightarrow{\mathrm{O_2Q}}$의 내적 $\overrightarrow{\mathrm{O_1P}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{O_2Q}}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값은?

[3점][2008년 9월]

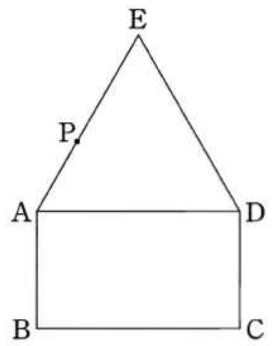


① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ 1

8.

평면에서 그림과 같이 $\overline{AB}=1$이고 $\overline{BC}=\sqrt{3}$인 직사각형 $ABCD$와 정삼각형 EAD 가 있다. 점 P가 선분 AE 위를 움직일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[4점][2010년 9월]



[보 기]

ㄱ. $|\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CP}|$의 최솟값은 1이다.

ㄴ. $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CP}$의 값은 일정하다.

ㄷ. $|\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CP}|$의 최솟값은 $\frac{7}{2}$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

9. 좌표공간에서 네 점 $\mathrm{A_0}$, $\mathrm{A_1}$, $\mathrm{A_2}$, $\mathrm{A_3}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $|\overrightarrow{\mathrm{A_0A_2}}| = |\overrightarrow{\mathrm{A_1A_3}}| = 2$

(나) $\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{A_0A_3}} \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{A_0A_k}} - \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{A_0A_3}}\right) = \cos\frac{3-k}{3}\pi \quad (k = 1, 2, 3)$

$|\overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}}|$의 최댓값을 M이라 할 때, M^2의 값을 구하시오.

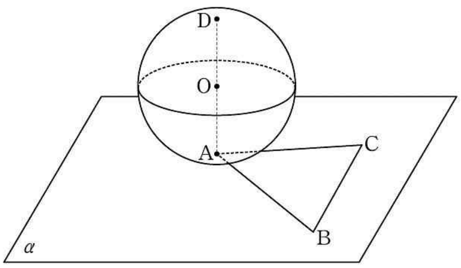
[4점][2012년 9월]

3. 공간벡터와 공간도형

<< 연습 >>

10. 그림과 같이 평면 α 위에 한 변의 길이가 3인 정삼각형 ABC가 있고, 반지름의 길이가 2인 구 S는 점 A에서 평면 α에 접한다. 구 S 위의 점 D에 대하여 선분 AD가 구 S의 중심 O를 지날 때, $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}|^2$의 값을 구하시오.

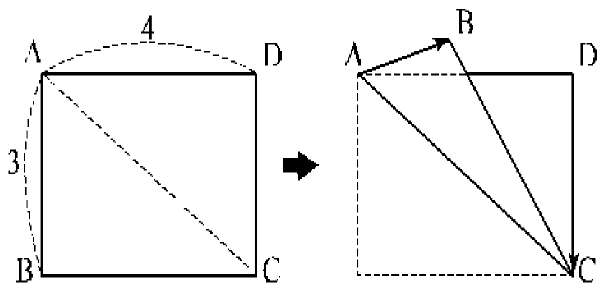
[4점][2006년 수능]



11. $\overline{AD}=4$, $\overline{AB}=3$인 직사각형 모양의 종이 ABCD가 있다. 대각선AC를 접는 선으로 하여 평면ABC가 평면 ACD와 수직이 되게 접는다.

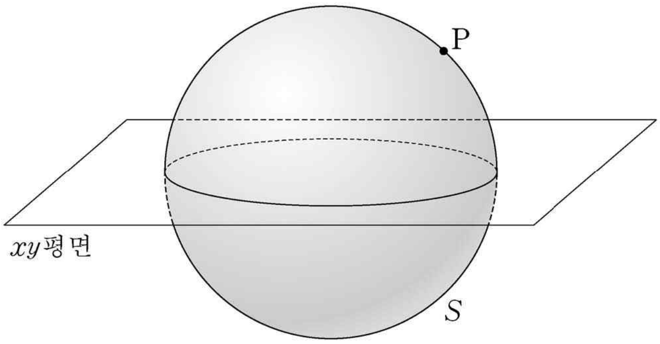
접은 도형에서 내적 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}=\dfrac{b}{a}$ (a, b는 서로소인 자연수)일 때,

$a+b$의 값을 구하시오. [4점][2004년 교육청]



12. 좌표공간에 구 $S: x^2+y^2+z^2=50$과 점 $\mathrm{P}(0,5,5)$가 있다.
다음 조건을 만족시키는 모든 원 C에 대하여 C의 xy평면 위로의 정사영의 넓이의 최댓값을 $\frac{q}{p}\pi$라 하자. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

(가) 원 C는 점 P를 지나는 평면과 구 S가 만나서 생긴다. (나) 원 C의 반지름의 길이는 1이다.



정답과 해설

1) 12

두 직각삼각형 PCO_1, PCO_2는 합동이므로

$\angle PCO_1 = \angle PCO_2 = 60^\circ$ 이다.

따라서 두 원 위의 임의의 두 점 A, B에 대하여

$|\overrightarrow{PA}| = |\overrightarrow{PB}| = 4$이다.

이 때, 두 벡터 $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|^2 = |\overrightarrow{PA}|^2 + |\overrightarrow{PB}|^2 + 2\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 32 + 2|\overrightarrow{PA}|\,|\overrightarrow{PB}|\cos\theta = 32 + 32\cos\theta$

$\therefore\ |\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}| = 4\sqrt{2+2\cos\theta}$

이 때, $\cos\theta$의 값은 두 점 A, B가 점 C와 일치할 때

$\cos\theta = \cos 0 = 1$로 최대이고,

$|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|$의 최대값은 $M=8$이다.

또, $\cos\theta$의 값은 두 점 A, B가 각각 두 반직선 CO_1, CO_2와 두 원 S_1, S_2와 점 C가 아닌 점에서 만나는 점일 때,

$\cos\theta = \cos(\angle APB) = \cos(\angle APC + \angle BPC)$

$= \cos(2\cdot\angle CPO_1 + \angle CPO_2) =$

$\cos(4\cdot\angle CPO_1) = \cos\dfrac{2}{3}\pi = -\dfrac{1}{2}$로 최소이고,

$|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|$의 최소값은 $m=4$이다.

$\therefore\ M+m=12$

(다른 풀이)

두 점 A, B가 점 C와 모두 일치할 때

$|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|$는 최대이고$\overline{PC}=4$이므로

최대값은 $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}| = |\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PC}| = |2\overrightarrow{PC}| = 8$이다.

또, 두 점 A, B가 각각 두 반직선 $\overrightarrow{CO_1}$, $\overrightarrow{CO_2}$ 와

두 원 S_1, S_2와 점 C가 아닌 점에서 만나는 점일 때

$|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|$는 최소이다.

이 때, 이 두 교점을 각각 M,N이라 하면$\overline{PM}=\overline{PN}=4$이고

$\angle MPN = \dfrac{2}{3}\pi$이므로 평행사변형법에 의해 최소값은 $2\times4\times\cos\dfrac{1}{3}\pi = 4$이다.

2) 정답 18

점 $A(3,6,0)$을 지나고 평면 $\sqrt{3}y - z = 0$의 법선벡터

$\vec{h} = (0, \sqrt{3}, -1)$과 평행한 직선의 방정식은

$\frac{y-6}{\sqrt{3}}=\frac{z}{-1}$, $x=3$

이 때, $\frac{y-6}{\sqrt{3}}=\frac{z}{-1}=t$라 하면 점 B의 좌표는 $(3, \sqrt{3}t+6, -t)$로

나타낼 수 있다. 점 B는 평면 $\sqrt{3}y-z=0$ 위의 점이어야 하므로

$3t+6\sqrt{3}+t=0$ $\therefore$ $t=-\frac{3}{2}\sqrt{3}$

따라서 점 A에서 평면에 내린 수선의 발 B의 좌표는 $\mathrm{B}\left(3, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$이다.

$\therefore$ $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}=(3,6,0) \cdot \left(3,\frac{3}{2},\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$

$=9+9=18$

[별해] 원점 O는 평면 $\sqrt{3}y-z=0$ 위의 점이므로

두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$는 서로 수직이다.

점 $\mathrm{A}(3,6,0)$과 평면 $\sqrt{3}y-z=0$ 사이의 거리는

$\frac{|\sqrt{3} \cdot 6-0|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}=\frac{6\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$

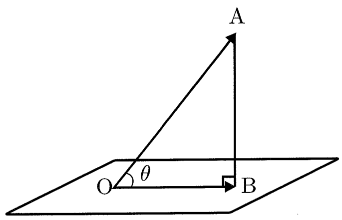
$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{3^2+6^2+0^2}=3\sqrt{5}$

이므로 직각삼각형 OAB에서

$\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{45-27}=3\sqrt{2}$

그런데, $\angle\mathrm{AOB}=\theta$라 하면

$\cos\theta=\frac{\overline{\mathrm{OB}}}{\overline{\mathrm{OA}}}$ 이므로



$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{OA}} \cdot \overline{\mathrm{OB}} \cdot \cos\theta=\overline{\mathrm{OB}}^2=(3\sqrt{2})^2=18$

3) ②

오른쪽 그림과 같이 선분 $\mathrm{O_1O_2}$의 연장선 위에 $\mathrm{O_3}$를 잡고 반지름의 길이가 1인 그려 원 $\mathrm{O_1}$과 만나는 점을 각각 $\mathrm{A_1}$, $\mathrm{B_1}$이라 하자.

이때, $\overrightarrow{\mathrm{O_2Q}}=\overrightarrow{\mathrm{O_1Q_1}}$인 점 $\mathrm{Q_1}$을 잡고 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{O_1P}}$, $\overrightarrow{\mathrm{O_1Q_1}}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{O_1P}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{O_2Q}}=\overrightarrow{\mathrm{O_1P}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{O_1Q_1}}$

$=\left|\overrightarrow{\mathrm{O_1P}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{O_1Q_1}}\right|\cos\theta$

$=\cos\theta$ -----㉠

이 때, 오른쪽 그림에서 네 삼각형 $\mathrm{O_1O_2A}$, $\mathrm{O_1BO_2}$, $\mathrm{O_1A_1O_3}$, $\mathrm{O_1O_3B_1}$가 정삼각형이므로

$\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{5}{3}\pi$

따라서, ㉠은 $\theta=\frac{\pi}{3}$일 때, 최대값 $\frac{1}{2}$, $\theta=\pi$일 때, 최소값 -1을 가지므로

$M+m=\frac{1}{2}+(-1)=-\frac{1}{2}$

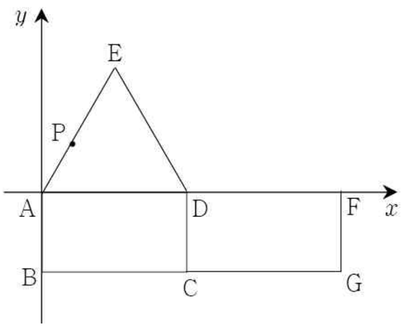
4) [정답] ⑤

ㄱ. $|\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CP}|=|\overrightarrow{PB}|=\overline{PB}$ 이므로

선분 PB의 길이는 점 P가 점 A와 일치할 때 최소이다.

따라서, 최솟값은 $\overline{AB}=1$ 이다. (참)

ㄴ.



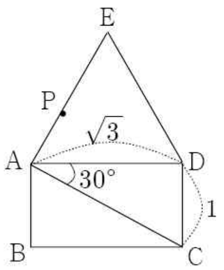
△ACD에서 $\overline{AD}=\sqrt{3}$, $\overline{DC}=1$ 이므로

$\angle CAD=30°$

△EAD가 정삼각형이므로

$\angle EAD=60°$

$\therefore\ \angle EAC=\angle PAC=90°$



$\therefore\ \overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{AP}$

$\therefore\ \overrightarrow{CA}\bullet\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CA}\bullet(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AP})$

$=\overrightarrow{CA}\bullet\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\bullet\overrightarrow{AP}$

$=|\overrightarrow{CA}|^2+0$

$=2^2=4$ (참)

ㄷ. 점 A를 원점, 직선 AD를 x축으로 하는 좌표평면에 주어진 도형을 나타내면 그림과 같다.

$\overline{AD}=\overline{DF}$ 인 x축 위의 점을 F라 하고

직사각형 DCGF를 그리면

$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{GP}$

이므로 $|\overrightarrow{GP}|$의 최솟값은

점 $G(2\sqrt{3},-1)$에서 직선 AE에 이르는 거리와 같다.

직선 AE의 방정식은

$y=\sqrt{3}x$ 즉, $\sqrt{3}x-y=0$이므로

구하는 최솟값은

$$\frac{|\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}-(-1)|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}=\frac{7}{2}$$ (참)

따라서, 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

5) 8

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0A_3}\cdot\left(\overrightarrow{A_0A_1}-\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0A_3}\right)=\cos\frac{2}{3}\pi$$

$$\overrightarrow{A_0A_3}\cdot\overrightarrow{A_0A_1}-\frac{1}{2}|\overrightarrow{A_0A_3}|^2=-1\cdots ㉠$$

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0A_3}\cdot\left(\overrightarrow{A_0A_2}-\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0A_3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}$$

$$\overrightarrow{A_0A_3}\cdot\overrightarrow{A_0A_2}-\frac{1}{2}|\overrightarrow{A_0A_3}|^2=1\cdots ㉡$$

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0A_3}\cdot\left(\overrightarrow{A_0A_3}-\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0A_3}\right)=1$$

$\therefore\ |\overrightarrow{A_0A_3}|=2$

이때, ㉠, ㉡에 대입하면

$\overrightarrow{A_0A_3}\cdot\overrightarrow{A_0A_1}=1,\ \overrightarrow{A_0A_3}\cdot\overrightarrow{A_0A_2}=3$

이고 $\overrightarrow{A_0A_3}$과 $\overrightarrow{A_0A_1}$이 이루는 각의 크기를 θ_1, $\overrightarrow{A_0A_3}$과 $\overrightarrow{A_0A_2}$가 이루는 각의 크기를 θ_2라 하면

$$\overrightarrow{A_0A_3}\cdot\overrightarrow{A_0A_1}=2|\overrightarrow{A_0A_1}|\cos\theta_1=1$$

$$\therefore\ |\overrightarrow{A_0A_1}|\cos\theta_1=\frac{1}{2}$$

$$\overrightarrow{A_0A_3}\cdot\overrightarrow{A_0A_2}=4\cos theta_2=3$$

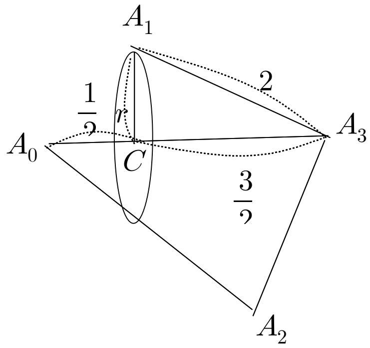
$$\therefore\ \cos\theta_2=\frac{3}{4}$$

이때,

$$|\overrightarrow{A_2A_3}|^2=2^2+2^2-2\times2\times2\times\frac{3}{4}=2$$

$$\therefore\ |\overrightarrow{A_2A_3}|=\sqrt{2}$$

따라서, $|\overrightarrow{A_1A_3}|=2$ 이고 $|\overrightarrow{A_0A_1}|\cos\theta=\frac{1}{2}$ 이므로 점 A_1이 나타내는 도형은 선분 A_0A_3을 1 : 3 으로 내분하는 점을 C라 할 때, 점 C를 중심으로 하는 원이다.

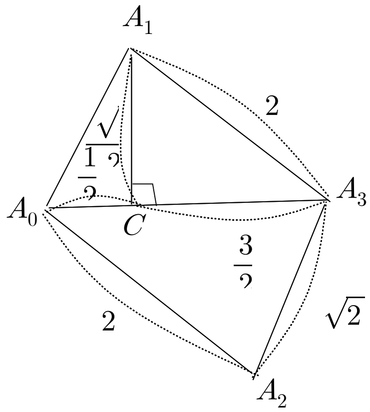


따라서, 반지름의 길이를 r라 하면

$r^2 = 2^2 - (\frac{3}{2})^2 = \frac{7}{4}$

$\therefore\ r = \frac{\sqrt{7}}{2}$

이때, $|\overrightarrow{A_1A_2}|$가 최대가 되려면 즉, 선분 $\overline{A_1A_2}$가 가장 긴 경우는 점 A_1이 평면 $A_0A_2A_3$과 같은 평면에 있을 때이다.



그런데, $\overline{A_0A_1} = \sqrt{(\frac{\sqrt{7}}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2} = \sqrt{2}$이므로 두 삼각형 $A_0A_1A_3$, $A_0A_2A_3$은 합동이므로 $\angle A_1A_0A_3 = \theta_3$이라 하면

$M^2 = 2^2 + (\sqrt{2})^2 - 2\times 2\times \sqrt{2}\cos(\theta_2 + \theta_3)$

$= 6 - 4\sqrt{2}(\cos\theta_2\cos\theta_3 - \sin\theta_2\sin\theta_3)$

$= 6 - 4\sqrt{2}(\frac{3}{4}\times\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{7}}{4}\times\frac{\sqrt{14}}{4})$

$= 6 - (\frac{3}{2} - \frac{7}{2}) = 8$

6) 정답 43

A를 원점, $\overline{\mathrm{AB}}$ 가 x 축, α를 xy평면, $\overline{\mathrm{AD}}$ 를 z축으로 하는 좌표축을 도입하면

$A(0,0,0)$, $B(3,0,0)$, $C\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\sqrt{3}, 0\right)$, $D(0,0,4)$

$\therefore |\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}|^2 = \left|(3,0,0)+\left(\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{3}, -4\right)\right|^2$

$= \left|\left(-\frac{9}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}, -4\right)\right|^2$

$= \frac{81}{4}+\frac{27}{4}+16 = 27+16 = 43$

7) 정답 106

$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB'}$ 인 점 B' 에 대하여

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB'}$

점B에서 평면 ACD에 내린 수선의 발을E, 점 E에서 선분 AB'에 내린 수선의 발을F라 하면 삼수선의 정리에 의해 $\overline{BF} \perp \overline{AB'}$ 이다.

$\cos(\angle BAE) = \frac{3}{5}$ 이므로 $\overline{BE} = \frac{9}{5}$, $\overline{AF} = \frac{27}{25}$

$\cos(\angle BAB') = \frac{\overline{AF}}{\overline{AB}} = \frac{9}{25}$

$\therefore\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB'}$

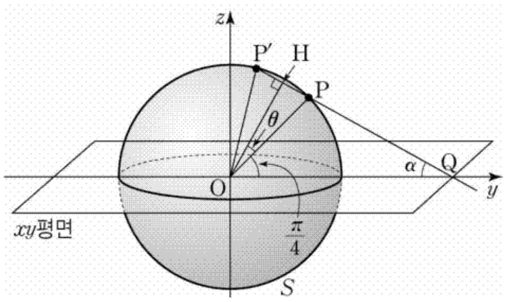
$= \overline{AB} \cdot \overline{AB'} \cdot \cos(\angle BAB') = \frac{81}{25}$

$\therefore\ a+b = 25+81 = 106$

8) 정답 9

[출제의도] [공간도형과 공간벡터]

구를 xy 평면에 수직이고 OP를 지나는 평면으로 잘라서 단면화해 보자. 이 때 아래와 같은 그림을 얻을 수 있다.



P를 xy평면에 정사영시킨 점을 H

이 때, $\overline{OH} = \overline{OP} = 5$이다.

$\overline{PQ} = 2$를 만족하도록 평면 α를 잡고 xy평면과

이루는 각을 θ라 하자. C의 넓이를 S라 하면,

$S = \pi\cos theta$

$\cos theta$가 최대인 순간은 위의 그림과 같이 P가 α와 xy 평면의 교선에 최대한 가까이 있는 경우이다.

이 때 θ를 구하면 $\theta = \frac{\pi}{4} - \theta_1$

$\cos theta = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta_1\right)$, $\cos theta_1 = \frac{7}{5\sqrt{2}}$

$\cos theta = \frac{4}{5}$

따라서 원 C의 넓이의 최댓값은 $\frac{4}{5}\pi$

$\therefore p+q=9$