E.T's Eight Technics.

Ver. 2019

Second Technic.

경우 나누기

확률과 경우의수 단원은 수학 중 유일하게

논리보다 손이 더 먼저 나가야 하는 단원이다.

－ E . T －

함수 레시피

1. 케이스 분류의 3대 원칙

2. 사건과 여사건

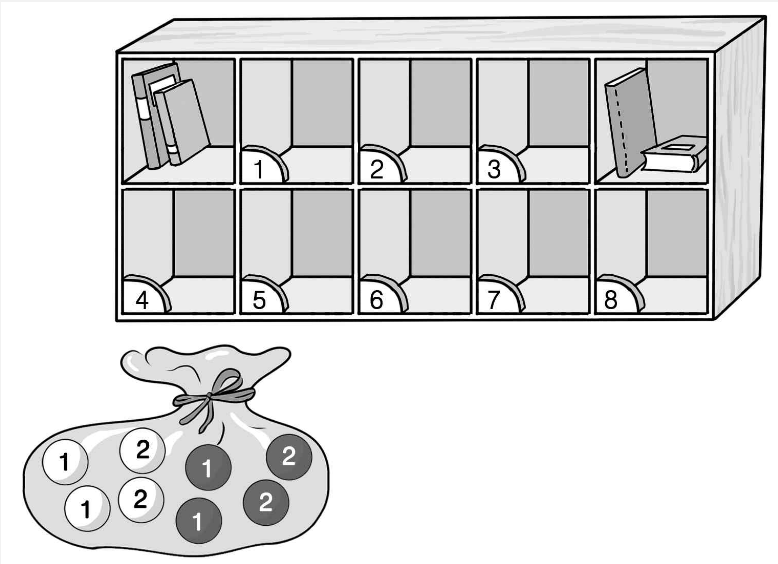
3. 확률과 경우의 수의 중대한 차이점

- E . T -

1. 케이스 분류 3대 원칙

Question. 01

그림과 같이 주머니에 숫자 1이 적힌 흰 공과 검은 공이 각각 2개, 숫자 2가 적힌 흰 공과 검은 공이 각각 2개가 들어 있고, 비어 있는 8개의 칸에 1부터 8까지의 자연수가 하나씩 적혀있는 진열장이 있다.



숫자가 적힌 8개의 칸에 주머니 안의 공을 한 칸에 한 개씩 모두 넣을 때, 숫자 4, 5, 6이 적힌 칸에 넣는 세 개의 공이 적힌 수의 합이 5이고 모두 같은 색이 되도록 하는 경우의 수를 구하시오. (단, 모든 공은 크기와 모양이 같다.)

[4점][2017년 4월 교육청]

Question. 02 (Question. 01 유제)

다음 표와 같이 3개 과목에 각각 2개의 수준으로 구성된 6개의 과제가 있다.
각 과목의 과제는 수준 Ⅰ의 과제를 제출한 후에만 수준 Ⅱ의 과제를 제출할 수 있다.
예를 들어 '국어 A → 수학 A → 국어 B → 영어 A → 영어 B →수학 B' 순서로 과제를 제출할 수 있다.

수준 \ 과목	국어	수학	영어
Ⅰ	국어 A	수학 A	영어 A
Ⅱ	국어 B	수학 B	영어 B

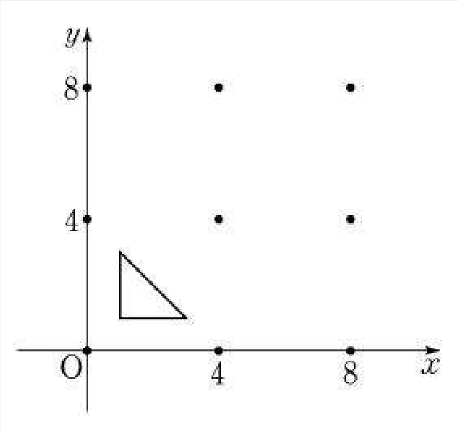
6개의 과제를 모두 제출할 때, 제출 순서를 정하는 경우의 수를 구하시오.

[4점][2009년 평가원]

Question. 03

좌표평면 위에 9개의 점 (i, j) $(i=0, 4, 8,\ j=0, 4, 8)$이 있다.
이 9개의 점 중 네 점을 꼭짓점으로 하는 사각형 중에서 내부에 세 점 $(1, 1)$, $(3, 1)$, $(1, 3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형을 포함하는 사각형의 개수는?

[4점][2010년6월 평가원]



① 13 ② 15 ③ 17 ④ 19 ⑤ 21

Question. 04 (Question. 03 유제)

좌표평면 위의 점들의 집합 $S=\{(x,y)\mid x,y$와 y는 정수$\}$가 있다. 집합 S에 속하는 한 점에서 S에 속하는 다른 점으로 이동하는 '점프'는 다음 규칙을 만족시킨다.

점 P에서 한 번의 '점프'로 점 Q로 이동할 때, 선분 PQ의 길이는 1 또는 $\sqrt{2}$ 이다.

점 $A(-2,0)$에서 점 $B(2,0)$까지 4번만 '점프'하여 이동하는 경우의 수를 구하시오.

(단, 이동하는 과정에서 지나는 점이 다르면 다른 경우이다.)

[4점][2009년 평가원]

Question. 05

그림과 같은 7개의 사물함 중 5개의 사물함을 남학생 3명과 여학생 2명에게 각각 1개씩 배정하려고 한다. 같은 층에서는 남학생의 사물함과 여학생의 사물함이 서로 이웃하지 않는다. 사물함을 배정하는 모든 경우의 수를 구하시오.

[4점][2017년 3월 교육청]

3층 →
2층 →
1층 →

2. 사건과 여사건

Question. 06

같은 종류의 구슬 다섯 개를 서로 다른 세 개의 주머니에 나누어 넣으려고 한다.
각 주머니 안의 구슬이 세 개 이하가 되도록 넣는 방법의 수는?

(단, 구슬끼리는 서로 구별하지 않고 빈 주머니가 있을 수도 있다.)

[3점][2013년 10월 교육청]

① 10　② 11　③ 12　④ 13　⑤ 14

Question. 07

여섯 개의 문자 A, B, C, D, E, F를 모두 사용하여 만든 6자리 문자열 중에서 다음 조건을 모두 만족시키는 문자열의 개수는?

(가) A의 바로 다음 자리에 B가 올 수 없다.
(나) B의 바로 다음 자리에 C가 올 수 없다.
(다) C의 바로 다음 자리에 A가 올 수 없다.

(예를 들어 CDFBAE는 조건을 만족시키지만 CDFABE는 조건을 만족시키지 않는다.)

[4점][2008년 수능]

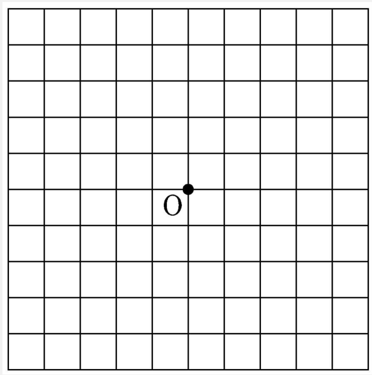
① 380 ② 432 ③ 484 ④ 536 ⑤ 598

Question. 08

그림과 같이 이웃한 두 교차로 사이의 거리가 모두 1인 바둑판 모양의 도로망이 있다. 로봇이 한 번 움직일 때마다 길을 따라 거리 1만큼씩 이동한다. 로봇은 길을 따라 어느 방향으로도 움직일 수 있지만, 한 번 통과한 지점을 다시 지나지는 않는다. 이 로봇이 지점 O에서 출발하여 4번 움직일 때, 가능한 모든 경로의 수는?

(단, 출발점과 도착점은 일치하지 않는다.)

[4점][2008년 평가원]



① 88 ② 96 ③ 100 ④ 104 ⑤ 112

3. 확률과 경우의 수의 중대한 차이점

Question. 09

한 개의 주사위를 세 번 던졌을 때, 나온 눈의 최댓값이 5가 될 확률은?

① $\frac{53}{216}$ ② $\frac{19}{72}$ ③ $\frac{61}{216}$ ④ $\frac{65}{216}$ ⑤ $\frac{23}{72}$

Question. 10

주머니에 1, 1, 2, 3, 4의 숫자가 하나씩 적혀 있는 5개의 공이 들어 있다.
이 주머니에서 임의로 4개의 공을 동시에 꺼내어 임의로 일렬로 나열하고, 나열된 순서대로 공에 적혀 있는 수를 a, b, c, d라 할 때, $a \leq b \leq c \leq d$일 확률을 기약분수로 나타내고, 그 과정을 서술하시오.

Question. 11

2018 러시아 월드컵 16강전에 한국과 일본이 올라갔다(^^). 16강 배정은 추첨을 통해 임의로 배정되고 모든 팀이 이길 확률이 같다라고 가정했을 때, 한국과 일본이 결승전에서 만날 확률을 구하여라.

Question. 12

자연수 $n(n \geq 3)$에 대하여 집합 A를

$$A = \{(x,\ y) | 1 \leq x \leq y \leq n, x\text{와 } y\text{는 자연수}\}$$

라 하자. 집합 A에서 임의로 선택된 한 개의 원소 $(a,\ b)$에 대하여 b가 3의 배수일 때, $a = b$일 확률이 $\dfrac{1}{9}$이 되도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오.

[4점][2018년 6월 평가원 기출]

[Second Technic. 경수의 수 정답 및 해설]

1) 8. [출제의도] 같은 것이 있는 순열을 활용하여 추론하기
4, 5, 6이 적힌 칸의 세 개의 공에 적힌 수의 합이
5이고 세 개의 공이 모두 같은 색인 경우는 다음과 같다.

i) 4, 5, 6이 적힌 칸에 흰 공 ①, ②, ②를 넣는

경우의 수는 $\dfrac{3!}{2!}$

나머지 5개의 칸에 흰 공 ①, 검은 공 ❶, ❶, ❷,

❷를 넣는 경우의 수는 $\dfrac{5!}{2!2!}$

$\therefore \dfrac{3!}{2!}\times\dfrac{5!}{2!2!}=90$

ii) 4, 5, 6이 적힌 칸에 검은 공 ❶, ❷, ❷를 넣는
경우도 마찬가지이므로 경우의 수는 90

i), ii)에 의하여 $2\times 90=180$

2) 정답 90

국어 A, B는 배열순서가 정해져 있으므로 같은 문자로 취급한다. 수학 영어도 마찬가지로 생각하면
$aabbcc$와 같은 문자를 배열하는 방법의 수와 같다.

$\therefore \dfrac{6!}{2!2!2!}=90$가지

3) 정답 ②

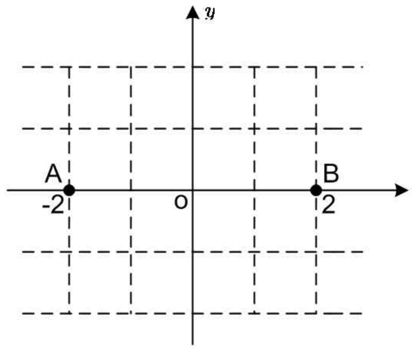
$A(0,\ 4)$, $B(0,\ 8)$라 하자.

OA를 한 변으로 하는 사각형은 $(4,\ 0)$ 또는 $(8,\ 0)$을 한 꼭짓점으로 하고 나머지 한 꼭짓점을 $(4,\ 4)$, $(4,\ 8)$, $(8,\ 4)$, $(8,\ 8)$로 하면 되므로 8가지,

OB를 한 변으로 하는 사각형은 $(4,\ 0)$ 또는 $(8,\ 0)$을 한 꼭짓점으로 하고 나머지 한 꼭짓점을 $(4,\ 4)$, $(4,\ 8)$, $(8,\ 4)$, $(8,\ 8)$로 하면 되는데, 그 중 $(8,\ 0)$, $(4,\ 4)$을 꼭짓점으로 하면 삼각형이 되므로 그 경우를 제외하면 7가지이다.

따라서 전체 경우는 $8+7=15$가지이다.

4)(유제) 정답 19



점프방법은 → ↗ ↘ 의 세가지 경우가 있다.

→ : a ↗ : b ↘ : c 로 나타내면 4번을 점프하여 A에서 B
로 이동하는 경우는

$aaaa$, $aabc$, $bbcc$를 배열하는 경우의수로 나타낼 수 있다.

i) $aaaa$: 1가지

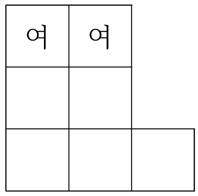
ii) $aabc$: $\dfrac{4!}{2!}=12$ 가지

iii) $bbcc$: $\dfrac{4!}{2!2!}=6$

$\therefore\ 1+12+6=19$ 가지

5) 29. [출제의도] 경우를 나누어 학생들에게 사물함을 배정하는 실생활 문제를 해결한다.

(i) 2층 또는 3층 중 한 층의 사물함만을 여학생에게 배정하는 경우

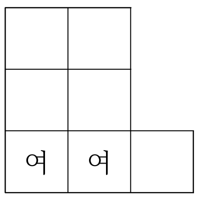


2층의 두 사물함을 두 여학생에게 배정하는 경우의 수는 $2!$이고 나머지 사물함을 남학생 3명에게 배정하는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{P}_3$이다. 3층의 두 사물함을 두 여학생에게 배정하는 경우의 수는 $2!$이고 나머지 사물함을 남학생 3명에게 배정하는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{P}_3$이다.

이와 같이 배정하는 경우의 수는

$2\times 2!\times {}_5\mathrm{P}_3=240$

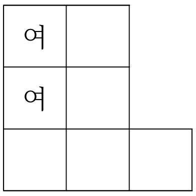
(ii) 1층의 사물함만을 여학생에게 배정하는 경우



1층의 사물함만을 여학생에게 배정하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{P}_2$이고 1층의 사물함을 남학생에게 배정할 수는 없으므로 나머지 사물함을 남학생 3명에게 배정하는 경

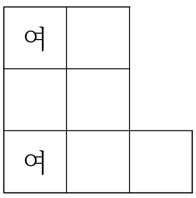
우의 수는 ${}_4P_3$ 이다.
이와 같이 배정하는 경우의 수는
${}_3P_2 \times {}_4P_3 = 144$

(iii) 2층, 3층의 사물함을 각각 1개씩 여학생에게 배정하는 경우



2층, 3층의 사물함을 각각 1개씩 선택하여 여학생에게 배정하는 경우의 수는 ${}_2C_1 \times {}_2C_1 \times 2!$이고 2층과 3층의 사물함을 남학생에게 배정할 수는 없으므로 1층의 사물함만을 남학생 3명에게 배정해야 하고 그 경우의 수는 $3!$ 이다.
이와 같이 배정하는 경우의 수는
${}_2C_1 \times {}_2C_1 \times 2! \times 3! = 48$

(iv) 1층의 사물함을 한 여학생에게 배정하고 2층 또는 3층의 사물함을 다른 여학생에게 배정하는 경우



1층의 가운데에 있는 사물함을 여학생에게 배정하면 3명의 남학생에게 사물함을 배정할 수 없다. 그러므로 1층의 사물함 중 가운데 사물함을 제외한 2개의 사물함 중 한 사물함을 여학생에게 배정한다. 1층의 사물함을 한 여학생에게 배정하고 2층 또는 3층의 사물함을 다른 여학생에게 배정하는 경우의 수는 ${}_2C_1 \times {}_4C_1 \times 2!$ 이고 남학생에게 3개의 사물함을 배정하는 경우의 수는 $3!$ 이다.
이와 같이 배정하는 경우의 수는
${}_2C_1 \times {}_4C_1 \times 2! \times 3! = 96$

따라서 (i), (ii), (iii), (iv)에 의해서 구하는 경우의 수는
$240 + 144 + 48 + 96 = 528$

6) 정답 ③

[출제의도] 중복조합을 이해하고 경우의 수를 구한다.

세 개의 주머니 A, B, C에 넣은 공의 수를 각각 a, b, c라 하면 $a+b+c=5$이므로 가능한 모든 경우의 수는 ${}_3H_5 = {}_{3+5-1}C_5 = {}_7C_5 = 21$

(i) 2개의 주머니에 다섯 개의 공을 1개와 4개로 나누어 넣는 경우의 수 ${}_3P_2 = 6$

(ii) 한 개의 주머니에 다섯 개의 공을 모두 넣는 경우의 수 ${}_3C_1 = 3$

따라서 구하는 경우의 수는 $21 - (6+3) = 12$이다.

[다른 풀이]

한 주머니에 네 개 이상의 공을 넣을 수 없으므로 세 개의 주머니에 넣는 공의 수에 따라 경우를 나누면

(i) 한 개의 주머니에 공을 세 개 넣고 다른 주머니에 공을 두 개 넣는 경우는 3, 2, 0을 일렬로 나열하는 경우와 같으므로 $3! = 6$

(ii) 한 개의 주머니에 공을 세 개 넣고 나머지 두 개의 주머니에 공을 한 개씩 넣는 경우는 3, 1, 1을 일렬로 나열하는 경우와 같으므로 $\dfrac{3!}{2!} = 3$

(iii) 한 개의 주머니에 공을 한 개 넣고 나머지 두 개의 주머니에 공을 두 개씩 넣는 경우는 1, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우와 같으므로 $\dfrac{3!}{2!} = 3$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는
$6+3+3 = 12$이다.

7) 정답 ②

A, B, C, D, E, F를 모두 사용하여 만든 6자리의 문자열의 집합을 U라 하면

$$n(U) = 6!$$

이다.

한편, U의 원소 중에서 A의 바로 다음 자리에 B가 오는 문자열의 집합을 X, B 바로 다음 자리에 C가 오는 문자열의 집합을 Y, C 바로 다음 자리에 A가 오는 문자열의 집합을 Z라 하면 주어진 조건을 모두 만족시키는 문자열의 집합은

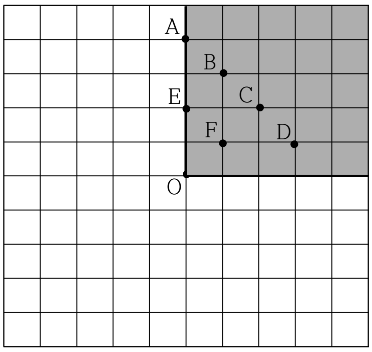
$$X^C \cap Y^C \cap Z^C$$

이다.

따라서 포함배제의 원리에 의해

$$\begin{aligned} &n(X^C \cap Y^C \cap Z^C) \\ &= n(U) - n(X) - n(Y) - n(Z) \\ &\quad + n(X \cap Y) + n(Y \cap Z) + n(Z \cap X) \\ &- n(X \cap Y \cap Z) \\ &= 6! - 3 \times 5! + 3 \times 4! - 0 \\ &= 4!(6 \times 5 - 3 \times 5 + 3) \\ &= 24 \times 18 \\ &= 432 \end{aligned}$$

8) 정답 ③



그림과 같이 로봇이 O를 출발하여 4번 움직여서 도착할 수 있는 지점은 어두운 영역에 대하여 A, B, C, D, E, F의 6가지의 경우이고 그 가짓수에 4를 곱한 값이 답이 된다.

(1) A에 도착하는 경우 : 1가지

(2) B에 도착하는 경우 : $\dfrac{4!}{3!}=4$가지

(3) C에 도착하는 경우 : $\dfrac{4!}{2!2!}=6$가지

(4) D에 도착하는 경우 : $\dfrac{4!}{3!}=4$가지

(5) E에 도착하는 경우 :
① ↑→↑← ② →↑←↑ ③ →↑↑← ④ ↑←↑→ ⑤ ←↑→↑ ⑥ ←↑↑→
의 6가지

(6) F에 도착하는 경우 :
① →→↑← ② ↓→↑↑ ③ ←↑→→ ④ ↑↑→↓
의 4가지

$\therefore\ (1+4+6+4+6+4)\times 4=100$가지

9) ③

$1\sim 5$ 까지 3번 나오는 확률에서 $1\sim 4$까지 3번 나오는 확률을 빼 경우 적어도 한 번은 5가 나온다.

$$\left(\frac{5}{6}\right)^3-\left(\frac{4}{6}\right)^3=\frac{61}{216}$$

10) $\dfrac{1}{15}$

i) 1을 두개를 뽑아 줄 세우는 경우의 수

$(1,\ 1,\ 2,\ 3),\ (1,\ 1,\ 2,\ 4), (1,\ 1,\ 3,\ 4)$

3가지 각각에 대해서 줄세우는 방법 : $3\times\dfrac{4!}{2!}=36$가지

ii) 서로 다른 4개를 뽑아 줄 세우는 경우의 수

$(1,\ 2,\ 3,\ 4)$ 한 가지로 $4!=24$

따라서 줄세우는 경우의 수는 총 60가지.

$a\leqq b\leqq c\leqq d$를 만족하는 경우의 수는 뽑기만 하면 되므로 4가지

구하는 확률은 $\dfrac{4}{60}=\dfrac{1}{15}$

11) $\dfrac{1}{{}_{16}C_2}$

모든 국가가 결승전에 올라갈 확률은 동일하므로 임의의 두 국가가 결승전에서 만날 확률은 동일하다 . 즉 근원사건을 결승전에서 두 국가가 만들 수 있는 가짓수라 보았을 때 , 총 가능한 경우의 수는 ${}_{16}C_2$ 이고 ,그중 한국과 일본이 결승에 올라갈 경우의 수는 1 가지이므로 한국과 일본이 결승전에서 만날 확률은 $\dfrac{1}{{}_{16}C_2}$

12) 정답 48

$n=3k$또는 $n=3k+1$ 또는 $n=3k+2$ (k는 자연수)일 때 b가 3의 배수인 사건의 수는

$$3+6+9+\cdots+3k=3(1+2+3+\cdots+k)=\frac{3}{2}k(k+1)$$

이 중에서 $a=b$인 사건의 수는 k 이므로

$$\frac{k}{\frac{3}{2}k(k+1)}=\frac{1}{9},\quad \frac{2}{k+1}=\frac{1}{3}\qquad ,$$

$k+1=6,\ k=5$

따라서, 모든 자연수 n의 값의 합은

$15+16+17+18=48$