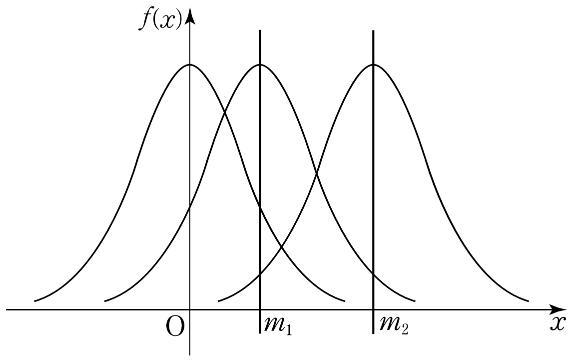
정규분포의 확률밀도함수의 그래프는 다음의 기본적인 4가지 특징이 있습니다.

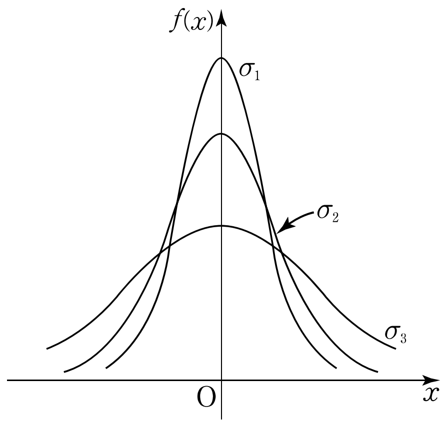
- 평균 m에 대하여 직선 $x=m$에 대칭이다.
- 종 모양의 곡선이다.
- 점근선은 x축이며 곡선과 x축 사이의 넓이는 1이다.
- 평균 m에 대하여 $x=m$일 때, 최댓값을 갖는다.

확률밀도함수의 그래프의 개형에서 배우는 2가지 특징이 더 있습니다.
평균 m과 표준편차 σ의 값에 따라 그 모양이 정해진다는 것입니다. 다시 말하면 그래프의 모양을 결정하는 변수는 2가지입니다. 이때, m과 σ 중 하나를 일치시켜 확인할 수 있습니다.

- σ가 일치할 때, $0<m_1<m_2$라 하면 세 그래프는 다음과 같다.



- m이 일치할 때, $\sigma_1<\sigma_2<\sigma_3$이라 하면 세 그래프는 다음과 같다.



위의 6가지가 전부입니다. 타 단원의 소재가 이용될 수 있지만, 신유형은 이 6가지 개념이 이용되어 출제되며, 이를 이용하여 이과 2016학년도 9월 평가원 모의고사 18번과 문과 2016학년도 9월 평가원 모의고사 29번에 쓰인 개념을 대응시켜 봅시다.

[2016학년도 9월 평가원 모의고사 18번(이과)]

확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(10,\ 4^2)$, 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 4^2)$을 따르고, 확률변수 X와 Y의 확률밀도함수는 각각 $f(x)$와 $g(x)$이다.

$f(12)=g(26)$, $\mathrm{P}(Y \geq 26) \geq 0.5$

일 때, $\mathrm{P}(Y \leq 20)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.0062　② 0.0228　③ 0.0896
④ 0.1587　⑤ 0.2255

위의 문제는 ①, ②, ⑤의 개념이 합쳐진 문항입니다. 그래프의 개형과 평균에 대한 대칭성뿐 아니라 함숫값이 같다는 것을 이용하여 두 평균에 대한 위치를 파악할 수 있는지를 물었습니다.

[2016학년도 9월 평가원 모의고사 29번(문과)]

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(4,\ 3^2)$을 따를 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{7} \mathrm{P}(X \leq n) = a$이다. $10a$의 값을 구하시오.

위의 문제는 ①, ③의 기본 개념이 합쳐진 문항입니다. 평균에 대한 대칭성뿐만 아니라 확률밀도함수의 그래프와 x축 사이의 넓이가 1이라는 것을 파악할 수 있는지를 물었습니다.

아직 ④, ⑥에 대한 직접적인 개념이 출제되지 않았습니다. ④는 EBS 연계교재에

… 확률밀도함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $\underline{f(x) \le f(a)}$를 만족시킬 때, …

와 유사한 표현으로 많이 보이곤 합니다. (평균이 a란 뜻이지요.)

⑥ 또한 아직까지 직접적으로 출제되지 않았습니다. 그 이유를 개인적으로 생각해 보면

> 1. σ의 값에 따라 개형이 바뀌긴 하지만 σ가 변할 때, 개형이 얼마나 변하는지에 대해서 자세하기 배우지 않고 대략적인 것만 배우므로 문제 출제가 까다롭다.
> 2. σ가 다른 두 확률밀도함수에 대한 확률을 표준화시켜 설명하면 되므로 출제가 되더라도 개형에 대한 단편적인 것만 물어볼 수 있다.

정도가 있겠습니다. 출제 가능성이 0%인 것은 것이 아니니 ⑥또한 자세히 알아두시면 좋습니다.

확률밀도함수에 대한 문제는 얼마든지 생소한 표현으로 여러분을 당황하게 만들 수 있습니다. 첨부 파일의 자작문제 6문항을 통해 개념 점검해보시길 바랍니다.

참고)
3번 문제는 제헌이 R 모의고사에 수록된 문항의 변형문항이며,
5번 문제는 제헌이 R 모의고사에 수록된 문항입니다. 구매 예정인 분들은 참고 바랍니다.

01

평균이 65, 표준편차가 σ인 정규분포를 따르는 확률변수 X에 대하여

$$2\mathrm{P}(X \le a) = \mathrm{P}(a \le X \le a+68) = 0.5$$

이고, $\mathrm{P}(X \le b) = 0.3$일 때, $a+b$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.25	0.1
0.39	0.15
0.52	0.2
0.68	0.25

02

정규분포 $\mathrm{N}(8,\ 3^2)$을 따르는 확률변수 X의 확률밀도함수를 $f(x)$라 하자. 부등식

$$f(1) \le f(t+4) \le f(t)$$

를 만족시키는 t의 범위는 $a \le t \le b$일 때,

$\mathrm{P}\left(X \le \dfrac{a}{2}+b\right) = k$이다. $1000k$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.341
1.5	0.433
2.0	0.477
2.5	0.494

03

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(6,\ 2^2)$을 따를 때, 정규분포 $\mathrm{N}(X,\ 2^2)$을 따르는 확률변수 Y의 확률밀도함수를 $g(x)$라 하자. $a \le x_1 < x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여

$$g(x_1) > g(x_2)$$

를 만족시킬 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은 0.159이다. 상수 a의 값을 구하시오.

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.341
1.5	0.433
2.0	0.477
2.5	0.494

04

정규분포 $\mathrm{N}(6,\ 4^2)$을 따르는 확률변수 X와 정규분포 $\mathrm{N}(4,\ 1^2)$을 따르는 확률변수 Y에 대하여 두 함수 $f(t)$, $g(t)$를

$$f(t)=\mathrm{P}(t \le X \le t+4)$$
$$g(t)=\mathrm{P}(t \le Y \le t+2)$$

라 하자. 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 부등식 $f(8)+g(n) \ge 0.71$을 만족시키는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오.

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.19
1.0	0.34
1.5	0.43
2.0	0.47

05

평균이 m_1이고 표준편차가 σ인 정규분포를 따르는 확률변수 X의 확률밀도함수를 $f(x)$, 평균이 m_2이고 표준편차가 σ인 정규분포를 따르는 확률변수 Y의 확률밀도함수를 $g(x)$라 하자.

$$m_2 < m_1,\ \ g(k) = f(6)\ \ (k = 1,\ 9)$$

일 때,

$$g(n) \ge f(7)$$

을 만족시키는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오.

06

정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 2^2)$을 따르는 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가 있다.
모든 실수 x에 대하여

$$f(x) \leq t$$

를 만족시키는 실수 t의 최솟값이 $f(5)$일 때, $\mathrm{P}(X \leq 9)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.5328 ② 0.6915 ③ 0.8413
④ 0.9772 ⑤ 0.9938