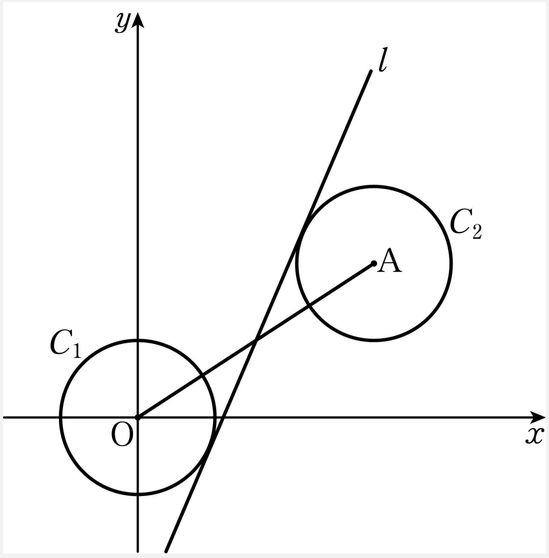
1. 삼각함수의 덧셈정리

Question. 01

좌표평면에 중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 3인 원 C_1과 중심이 점 $\mathrm{A}(t, 6)$이고 반지름의 길이가 3인 원 C_2가 있다. 그림과 같이 기울기가 양수인 직선 l이 선분 OA와 만나고, 두 원 C_1, C_2에 각각 접할 때, 다음은 직선 l의 기울기를 t에 대한 식으로 나타내는 과정이다. (단, $t > 6$)



직선 OA가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 α, 점 O를 지나고 직선 l에 평행한 직선 m이 직선 OA와 이루는 예각의 크기를 β라 하면

$$\tan\alpha = \frac{6}{t}$$

$$\tan\beta = \boxed{\text{(가)}}$$

이다.

직선 l이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$$\theta = \alpha + \beta$$

이므로

$$\tan\theta = \boxed{\text{(나)}}$$

이다.

따라서 직선 l의 기울기는 $\boxed{\text{(나)}}$이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(t)$, $g(t)$라 할 때, $\dfrac{g(8)}{f(7)}$의 값은?[1)]

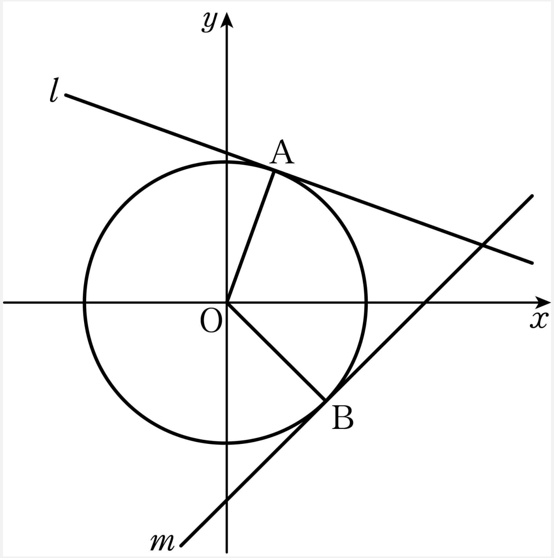
[4점] [2016년 3월 교육청]

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

Question. 02

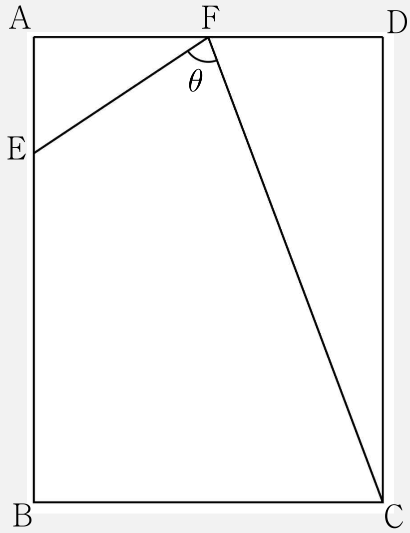
그림과 같이 기울기가 $-\frac{1}{3}$ 인 직선 l이 원 $x^2+y^2=1$과 점 A에서 접하고, 기울기가 1인 직선 m이 원 $x^2+y^2=1$과 점 B에서 접한다. $100\cos^2(\angle \mathrm{AOB})$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)

[4점] [2016년 3월 교육청]



Question. 03

그림과 같이 선분 AB의 길이가 8, 선분 AD의 길이가 6인 직사각형 ABCD가 있다.
선분 AB를 1:3으로 내분하는 점을 E, 선분 AD의 중점을 F라 하자.
$\angle EFC = \theta$라 할 때, $\tan\theta$의 값은? [4점] [2017년 4월 교육청]



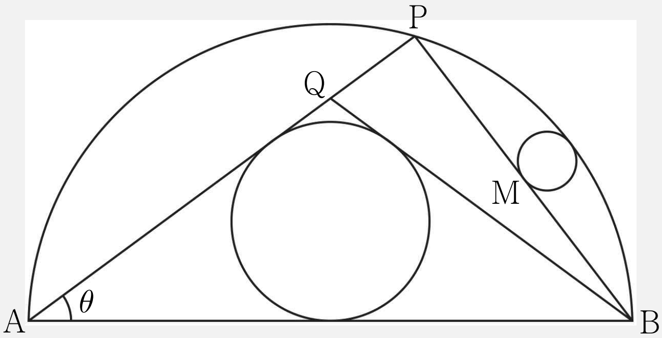
① $\frac{22}{7}$ ② $\frac{26}{7}$ ③ $\frac{30}{7}$ ④ $\frac{34}{7}$ ⑤ $\frac{38}{7}$

2. 삼각함수와 극한의 활용

Question. 04

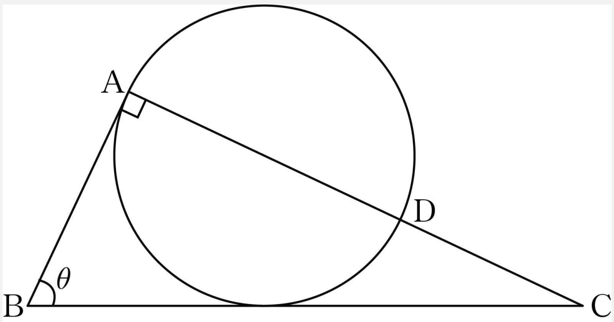
그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다.
호 AB 위의 한 점 P에 대하여 $\angle \mathrm{PAB} = \theta$라 하자. 선분 PB의 중점 M에서 선분 PB에 접하고 호 PB에 접하는 원의 넓이를 $S(\theta)$, 선분 AP 위에 $\overline{\mathrm{AQ}} = \overline{\mathrm{BQ}}$가 되도록 점 Q를 잡고 삼각형 ABQ에 내접하는 원의 넓이를 $T(\theta)$라 하자.

$\lim\limits_{\theta \to 0+} \dfrac{\theta^2 \times T(\theta)}{S(\theta)}$의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$) [4점] [2016년 4월 교육청]



Question. 05

그림과 같이 $\overline{\mathrm{BC}}=1$, $\angle \mathrm{A}=\frac{\pi}{2}$, $\angle \mathrm{B}=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위의 점 D에 대하여 선분 AD를 지름으로 하는 원이 선분 BC와 접할 때, $\lim_{\theta\to 0+}\frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\theta^3}=k$라 하자. $100k$의 값을 구하시오. [4점] [2016년 10월 교육청]

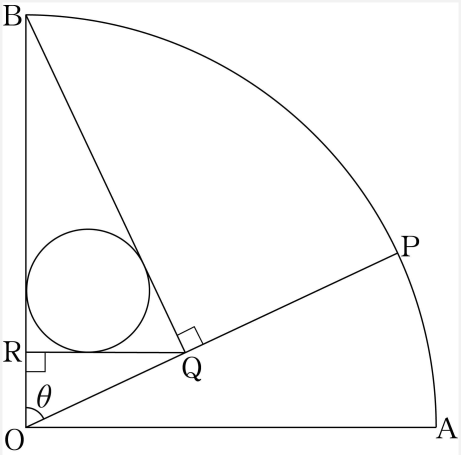


Question. 06

그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다.

호 AB 위의 점 P에 대하여 점 B에서 선분 OP에 내린 수선의 발을 Q, 점 Q에서 선분 OB에 내린 수선의 발을 R라 하자. $\angle\text{BOP}=\theta$일 때, 삼각형 RQB에 내접하는 원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{r(\theta)}{\theta^2}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$)

[4점] [2017년 3월 교육청]



① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

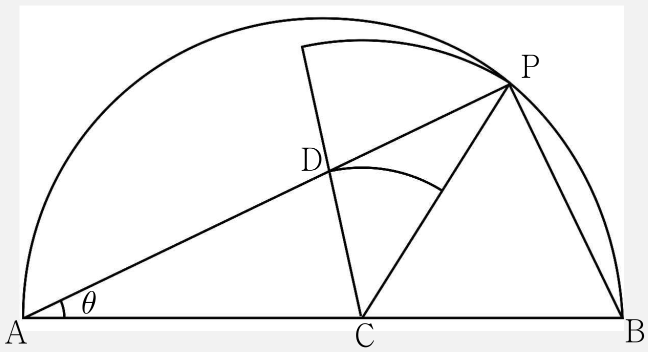
Question. 07

그림과 같이 길이가 1인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다.

호 AB 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{BC}}$가 되도록 선분 AB 위의점 C를 잡고, $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{AD}}$가 되도록 선분 AP 위의 점 D를 잡는다. $\angle \mathrm{PAB}=\theta$에 대하여 선분 CD를 반지름으로 하고 중심각의 크기가 $\angle \mathrm{PCD}$인 부채꼴의 넓이를 $S(\theta)$, 선분 CP를 반지름으로 하고 중심각의 크기가 $\angle \mathrm{PCD}$인 부채꼴의 넓이를 $T(\theta)$라 할 때, $\lim\limits_{\theta \to 0+} \dfrac{T(\theta)-S(\theta)}{\theta^2}$의 값은?

(단, $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$이고 $\angle \mathrm{PCD}$는 예각이다.)

[4점] [2017년 4월 교육청]

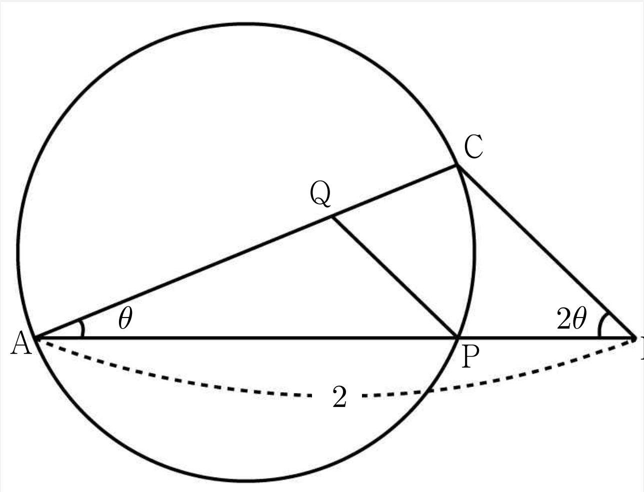


① $\dfrac{\pi}{16}$ ② $\dfrac{\pi}{8}$ ③ $\dfrac{3}{16}\pi$ ④ $\dfrac{\pi}{4}$ ⑤ $\dfrac{5}{16}\pi$

Question. 08

그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=2$이고 $\angle \mathrm{ABC}=2\angle \mathrm{BAC}$를 만족하는 삼각형 ABC가 있다.
선분 AC를 지름으로 하는 원과 직선 AB가 만나는 점 중 A가 아닌 점을 P, 점 P를 지나고 선분 BC에 평행한 직선이 선분 AC와 만나는 점을 Q라 하자. $\angle \mathrm{BAC}=\theta$라 할 때, 삼각형 APQ의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$)

[4점] [2017년 7월 교육청]

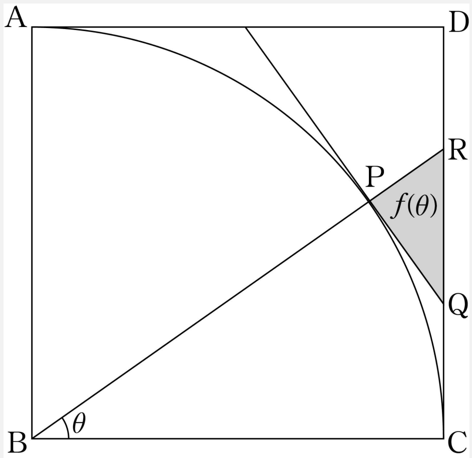


① $\frac{16}{27}$ ② $\frac{17}{27}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{19}{27}$ ⑤ $\frac{20}{27}$

Question. 09

그림과 같이 한 변의 길이가 3인 정사각형 ABCD 안에 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$이고 반지름의 길이가 3인 부채꼴 BCA가 있다. 호 AC 위의 점 P에서의 접선이 선분 CD와 만나는 점을 Q, 선분 BP의 연장선이 선분 CD와 만나는 점을 R라 하자. $\angle PBC = \theta$일 때, 삼각형 PQR의 넓이를 $f(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{8f(\theta)}{\theta^3}$의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$)

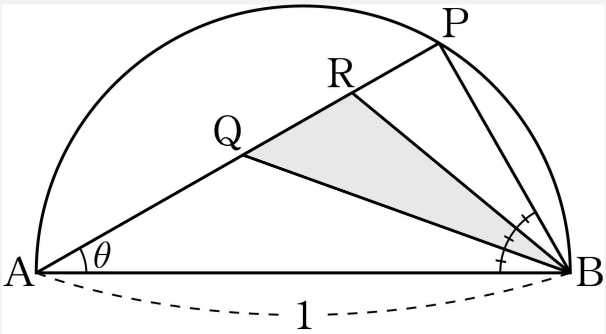
[4점] [2017년 10월 교육청]



Question. 10

그림과 같이 길이가 1인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위의 점 P에 대하여 $\angle$ABP를 삼등분하는 두 직선이 선분 AP와 만나는 점을 각각 Q, R라 하자. $\angle \mathrm{PAB} = \theta$일 때, 삼각형 BRQ의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^2}$의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)

[4점] [2018년 3월 교육청]

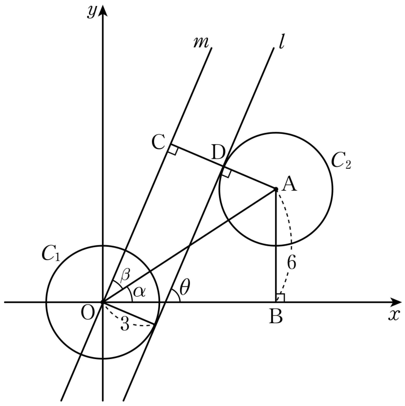


① $\frac{1}{3}$　② $\frac{\sqrt{3}}{3}$　③ 1　④ $\sqrt{3}$　⑤ 3

[7th Technic. 삼각함수 정답 및 해설]

1) [출제의도] 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 직선의 기울기를 구하는 과정을 추론한다.

직선 OA가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 α, 점 O를 지나고 직선 l에 평행한 직선 m이 직선 OA와 이루는 각의 크기를 β라 하자. 점 A에서 x축과 직선 m에 내린 수선의 발을 각각 B, C라 하고, 선분 AC가 원 C_2와 만나는 점을 D라 하자.



직각삼각형 OAC에서

$\overline{AC}=\overline{AD}+\overline{DC}=3+3=6$ 이므로

직각삼각형 AOB와 직각삼각형 OAC에서

$\angle OBA=\angle OCA=90^\circ$, $\overline{AB}=\overline{AC}=6$,

선분 OA는 공통이므로 $\triangle AOB \equiv \triangle AOC$이다.

$\angle AOB=\angle AOC$이므로 $\alpha=\beta$이다.

따라서 $\tan\alpha=\tan\beta=\dfrac{6}{t}$ 이다.

직선 l이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, 두 직선 l, m이 평행하므로

$\theta=\alpha+\beta$

$$\tan\theta=\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{6}{t}+\frac{6}{t}}{1-\frac{6}{t}\times\frac{6}{t}}=\frac{12t}{t^2-36}$$

따라서 $f(t)=\dfrac{6}{t}$, $g(t)=\dfrac{12t}{t^2-36}$ 이므로

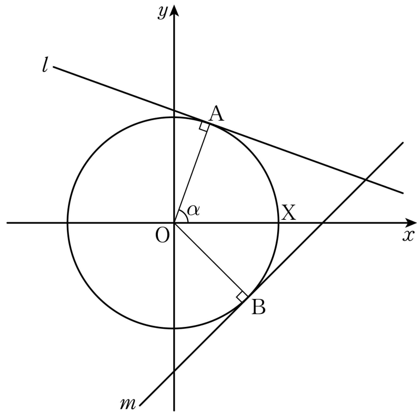
$$\frac{g(8)}{f(7)}=\frac{\frac{12\times 8}{64-36}}{\frac{6}{7}}=\frac{\frac{96}{28}}{\frac{6}{7}}=4$$

2) [출제의도] 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 문제를 해결한다.

두 직선 l과 m이 원 $x^2+y^2=1$과 접하는 점이 각각 A, B이므로

$\overleftrightarrow{OA}\perp l$, $\overleftrightarrow{OB}\perp m$

원 $x^2+y^2=1$이 x축의 양의 방향과 만나는 점을 X라 하고, $\angle AOX=\alpha$라 하자.



i) 점 A가 제1사분면에 있고, 점 B가 제4사분면에 있을 때

직선 OA가 직선 l과 수직이므로 직선 OA의 기울기는 3이다.

따라서

$\tan\alpha=3$, $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$, $\sin\alpha=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

직선 OB가 직선 m과 수직이므로 직선 OB의 기울기는 -1이다.

따라서 $\angle XOB=\dfrac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned}\cos(\angle AOB)&=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\\&=\cos\alpha\cos\frac{\pi}{4}-\sin\alpha\sin\frac{\pi}{4}\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha-\sin\alpha)\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{10}}{10}-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(-\frac{\sqrt{10}}{5}\right)=-\frac{\sqrt{5}}{5}\end{aligned}$$

ii) 점 A가 제1사분면에 있고, 점 B가 제2사분면에 있을 때

$\tan\alpha=3$, $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$, $\sin\alpha=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

직선 OB가 직선 m과 수직이므로 직선 OB의 기울기는 -1이다.

따라서 $\angle XOB=\dfrac{3}{4}\pi$

$$\cos(\angle \mathrm{AOB}) = \cos\left(\frac{3}{4}\pi - \alpha\right)$$
$$= \cos\frac{3}{4}\pi\cos\alpha + \sin\frac{3}{4}\pi\sin\alpha$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(-\cos\alpha + \sin\alpha)$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\sqrt{10}}{10} + \frac{3\sqrt{10}}{10}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{10}}{5} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

iii) 점 A가 제3사분면에 있고, 점 B가 제2사분면에 있을 때

$\cos(\angle \mathrm{AOB}) = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ 이다.

iv) 점 A가 제3사분면에 있고, 점 B가 제4사분면에 있을 때

$\cos(\angle \mathrm{AOB}) = \frac{\sqrt{5}}{5}$ 이다.

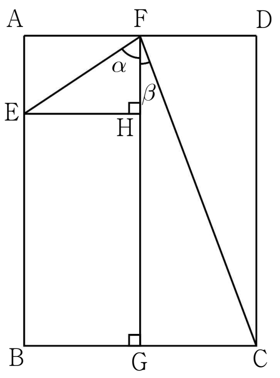
i), ii), iii), iv)로부터

$\cos(\angle \mathrm{AOB}) = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ 또는 $\cos(\angle \mathrm{AOB}) = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$100\cos^2(\angle \mathrm{AOB}) = 100 \times \frac{1}{5} = 20$

3) [출제의도] 삼각함수의 덧셈정리를 활용하여 문제해결하기

그림과 같이 점 F에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 G, 점 E에서 선분 FG에 내린 수선의 발을 H라 하자.



$\angle \mathrm{EFH} = \alpha$, $\angle \mathrm{CFG} = \beta$라 하면

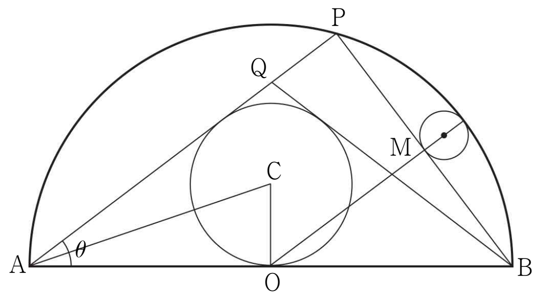
$\tan\alpha = \frac{3}{2}$, $\tan\beta = \frac{3}{8}$

$\theta = \alpha + \beta$이므로

$$\tan\theta = \tan(\alpha+\beta) = \frac{\frac{3}{2} + \frac{3}{8}}{1 - \frac{3}{2} \times \frac{3}{8}} = \frac{30}{7}$$

4) [출제의도] 삼각함수의 극한을 활용하여 문제해결하기

그림과 같이 선분 AB의 중점을 O, 선분 PB와 호 PB에 접하는 원의 반지름의 길이를 r_1, 삼각형 ABQ에 내접하는 원의 중심을 C, 반지름의 길이를 r_2라 하자.



$\angle \mathrm{MOB} = \theta$이고 $\overline{\mathrm{OB}} = 1$이므로 $\overline{\mathrm{OM}} = \cos\theta$

$\therefore\ r_1 = \frac{1-\cos\theta}{2}$, $S(\theta) = \pi\left(\frac{1-\cos\theta}{2}\right)^2$

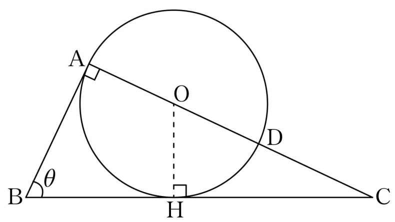
삼각형 CAO는 $\angle \mathrm{AOC} = 90°$인 직각삼각형이고

$\angle \mathrm{CAO} = \frac{\theta}{2}$, $\overline{\mathrm{OA}} = 1$

$\therefore\ r_2 = \tan\frac{\theta}{2}$, $T(\theta) = \pi\tan^2\frac{\theta}{2}$

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{\theta^2 \times T(\theta)}{S(\theta)} = \lim_{\theta\to 0+}\frac{\theta^2 \times \pi\tan^2\frac{\theta}{2}}{\pi\left(\frac{1-\cos\theta}{2}\right)^2}$$
$$= \lim_{\theta\to 0+}\frac{4\theta^2 \times \tan^2\frac{\theta}{2}}{(1-\cos\theta)^2}$$
$$= \lim_{\theta\to 0+}\left\{4 \times \frac{\theta^4}{\sin^4\theta} \times \frac{1}{4} \times \frac{\tan^2\frac{\theta}{2}}{\left(\frac{\theta}{2}\right)^2} \times (1+\cos\theta)^2\right\}$$
$$= 4 \times \frac{1}{4} \times 4 = 4]$$

5) [출제의도] 도형의 성질을 이용하여 함수의 극한값을 추론한다.



선분 AD의 중점 O는 원의 중심이고, 점 O에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{BH}} = \cos\theta$이므로 $\overline{\mathrm{CH}} = 1 - \cos\theta$

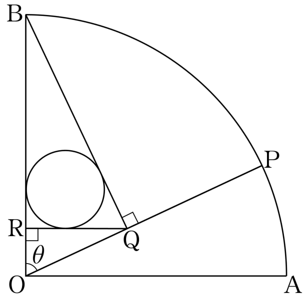
$\overline{\mathrm{CA}} = \sin\theta$이고 $\overline{\mathrm{CH}}^2 = \overline{\mathrm{CA}} \times \overline{\mathrm{CD}}$ 이므로

$(1-\cos\theta)^2 = \sin\theta \times \overline{\mathrm{CD}}$, $\overline{\mathrm{CD}} = \frac{(1-\cos\theta)^2}{\sin\theta}$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\theta^3}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{(1-\cos\theta)^2}{\sin\theta}}{\theta^3}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{(1-\cos\theta)^2(1+\cos\theta)^2}{\theta^3\sin\theta(1+\cos\theta)^2}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{(1-\cos^2\theta)^2}{\theta^3\sin\theta(1+\cos\theta)^2}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sin^3\theta}{\theta^3}\times\frac{1}{(1+\cos\theta)^2}\right)=\frac{1}{4}$$

따라서 $k=\frac{1}{4}$ 이므로 $100k=25$

6) [출제의도] 도형의 성질과 삼각함수의 극한을 이용하여 문제를 해결한다.



$\angle\mathrm{BOQ}=\theta$, $\overline{\mathrm{OB}}=1$ 이고 $\angle\mathrm{OQB}=\frac{\pi}{2}$ 이므로 $\overline{\mathrm{BQ}}=\sin\theta$

또, $\angle\mathrm{RQB}=\frac{\pi}{2}-\angle\mathrm{QBR}=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\theta$, $\overline{\mathrm{BQ}}=\sin\theta$ 이고

$\angle\mathrm{BRQ}=\frac{\pi}{2}$ 이므로

$\overline{\mathrm{BR}}=\sin^2\theta$, $\overline{\mathrm{RQ}}=\sin\theta\cos\theta$

삼각형 BRQ의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BR}}\times\overline{\mathrm{RQ}}=\frac{1}{2}\times\sin^2\theta\times\sin\theta\cos\theta$ …… ㉠

삼각형 BRQ에 내접하는 원의 성질을 이용하여 삼각형의 넓이를 구하면

$\frac{1}{2}\times r(\theta)\times(\sin\theta+\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta)$ …… ㉡

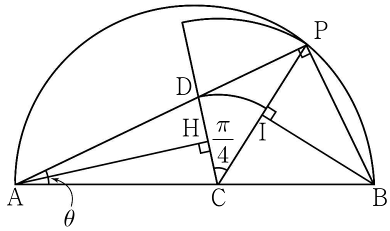
㉠, ㉡에 의해서

$r(\theta)=\frac{\sin^2\theta\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}$

따라서

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{r(\theta)}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin^2\theta\cos\theta}{\theta^2(1+\sin\theta+\cos\theta)}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}\times\lim_{\theta\to0+}\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}$$
$$=1\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{2}$$

7) [출제의도] 삼각함수의 극한을 활용하여 문제해결하기



$\overline{\mathrm{AB}}=1$이고 $\angle\mathrm{APB}=\frac{\pi}{2}$이므로

$\overline{\mathrm{BP}}=\sin\theta=\overline{\mathrm{BC}}$, $\overline{\mathrm{AC}}=1-\sin\theta$

삼각형 ACD에서 $\angle\mathrm{ACD}=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$이고

삼각형 BPC에서 $\angle\mathrm{BCP}=\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}$이므로

$\angle\mathrm{PCD}=\frac{\pi}{4}$

점 A에서 $\overline{\mathrm{CD}}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{CD}}=2\overline{\mathrm{CH}}=2\overline{\mathrm{AC}}\sin\frac{\theta}{2}=2(1-\sin\theta)\sin\frac{\theta}{2}$

$$\therefore S(\theta)=\frac{1}{2}\times4(1-\sin\theta)^2\sin^2\frac{\theta}{2}\times\frac{\pi}{4}$$
$$=\frac{\pi}{2}\times(1-\sin\theta)^2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

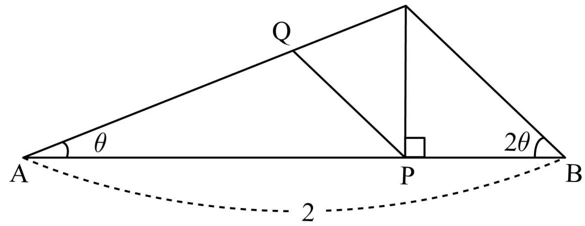
점 B에서 $\overline{\mathrm{CP}}$에 내린 수선의 발을 I라 하면

$\overline{\mathrm{CP}}=2\overline{\mathrm{CI}}=2\overline{\mathrm{BC}}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)=2\sin\theta\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$

$$\therefore T(\theta)=\frac{1}{2}\times4\sin^2\theta\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\times\frac{\pi}{4}$$
$$=\frac{\pi}{2}\sin^2\theta\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{T(\theta)-S(\theta)}{\theta^2}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\pi}{2}\left\{\frac{\sin^2\theta\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)-(1-\sin\theta)^2\sin^2\frac{\theta}{2}}{\theta^2}\right\}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\pi}{2}\left\{\frac{\sin^2\theta\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}{\theta^2}-\frac{(1-\sin\theta)^2\sin^2\frac{\theta}{2}}{4\times\frac{\theta^2}{4}}\right\}$$
$$=\frac{\pi}{2}\left(1\times\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\times1\right)=\frac{\pi}{8}$$

8) [출제의도] 함수의 극한을 활용하여 문제해결하기



선분 AC가 원의 지름이므로 $\angle\mathrm{APC}=\frac{\pi}{2}$ 이다.

$\overline{AP}=a$, $\overline{AQ}=b$라 하자.

두 삼각형 APC와 CPB는 직각삼각형이므로

$a\tan\theta=\overline{CP}=(2-a)\tan 2\theta$

$a=\dfrac{2\tan 2\theta}{\tan\theta+\tan 2\theta}$

삼각형 ABC와 삼각형 APQ는 닮음이므로

$\overline{AP}:\overline{AB}=\overline{AQ}:\overline{AC}$

$a:2=b:a\sec\theta$

$b=\dfrac{1}{2}a^2\sec\theta$

삼각형 APQ의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때,

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times a\times\frac{1}{2}a^2\sec\theta\times\sin\theta=\frac{1}{4}\times a^3\times\tan\theta$$

$$=\frac{1}{4}\times\left(\frac{2\tan 2\theta}{\tan\theta+\tan 2\theta}\right)^3\times\tan\theta$$

따라서

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\left\{\frac{1}{4}\times\left(\frac{\frac{2\tan 2\theta}{2\theta}\times 2}{\frac{\tan\theta}{\theta}+\frac{\tan 2\theta}{2\theta}\times 2}\right)^3\times\frac{\tan\theta}{\theta}\right\}=\frac{16}{27}$$

9) [출제의도] 도형의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

삼각형 BPQ와 삼각형 BCQ는 서로 합동이므로

$\angle QBC=\dfrac{\theta}{2}$ 이고 $\overline{PQ}=\overline{QC}=3\tan\dfrac{\theta}{2}$

직각삼각형 RPQ에서 $\angle RQP=\theta$이므로

$\overline{PR}=\overline{PQ}\tan\theta=3\tan\dfrac{\theta}{2}\tan\theta$

$$f(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{PQ}\times\overline{PR}$$

$$=\frac{1}{2}\times 3\tan\frac{\theta}{2}\times 3\tan\frac{\theta}{2}\tan\theta=\frac{9}{2}\tan^2\frac{\theta}{2}\tan\theta$$

따라서 $\displaystyle\lim_{\theta\to 0+}\frac{8f(\theta)}{\theta^3}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{36\tan^2\frac{\theta}{2}\tan\theta}{\theta^3}=9$

10) [출제의도] 삼각함수의 성질을 이용하여 삼각함수의 극한값을 구한다.

$\angle BPA=\dfrac{\pi}{2}$ 이므로 $\angle QBR=\alpha$라 하면

$3\alpha=\dfrac{\pi}{2}-\theta$

$\alpha=\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\theta}{3}$

$\overline{BP}=\sin\theta$이므로

$\overline{PQ}=\sin\theta\tan 2\alpha$

$\overline{PR}=\sin\theta\tan\alpha$

이다. 따라서

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{BP}\times\overline{PQ}-\frac{1}{2}\times\overline{BP}\times\overline{PR}$$

$$=\frac{1}{2}\sin^2\theta(\tan 2\alpha-\tan\alpha)$$

$$=\frac{1}{2}\sin^2\theta\left\{\tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{2}{3}\theta\right)-\tan\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\theta}{3}\right)\right\}$$

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}=\lim_{\theta\to 0+}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2$$

$=1$이므로

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta^2}=\frac{1}{2}\lim_{\theta\to 0+}\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}\left\{\tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{2}{3}\theta\right)-\tan\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\theta}{3}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\tan\frac{\pi}{3}-\tan\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}$$