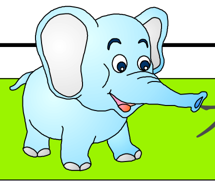
2019학년도 대학수학능력시험 모의평가 1회

수학 영역(가 형) 해설지

Epsilon



정답 및 해설

1) [정답] ②　(출제자 : 18 권세은)

[출제의도] 벡터의 합을 성분을 이용하여 표현하고, 성분의 합을 계산할 수 있는가?

[해설]

$\vec{a}+\vec{b}=(5,\,-3)$ 이므로 벡터 $\vec{a}+\vec{b}$ 의 모든 성분의 합은 $5+(-3)=2$ 이다.

2) [정답] ③　(출제자 : 18 권세은)

[출제의도] 삼각함수의 극한을 계산할 수 있는가?

[해설]

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 7x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\times\frac{7x}{\tan 7x}\times\frac{3}{7}\right)=\frac{3}{7}$$

3) [정답] ②　(출제자 : 18 이현준)

[출제의도] 좌표공간의 두 점을 이은 선분의 내분점을 구할 수 있는가?

[해설]

주어진 두 점 A, B 에 대하여 선분 AB 를 $1:2$ 로 내분하는 점이 xy 평면 위에 있으므로, 이 점의 z 좌표가 0 이어야 한다.

선분 AB 를 $1:2$ 로 내분하는 점을 C 라 하면

C 의 z 좌표는 $\dfrac{2\times 2+1\times a}{1+2}=\dfrac{4+a}{3}$ 이므로

$\dfrac{4+a}{3}=0$ 에서 $a=-4$ 이다.

따라서 구하는 값은 -4 이다.

4) [정답] ③　(출제자 : 17 문혁준)

[출제의도] 독립사건의 개념을 알고 이를 활용할 수 있는가?

[해설]

$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{2}$ 이고

두 사건 A 와 B 가 서로 독립이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{4}$ 이다.

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$ 이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$ 이다.

5) [정답] ④　(출제자: 17 김도훈)

[출제의도] 지수함수와 로그함수의 점근선의 방정식을 구할 수 있는가?

[해설]

곡선 $y=2^{x-3}+4$ 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 곡선의 방정식을 구해보자.

$x=2^{y-3}+4$

$\Rightarrow x-4=2^{y-3}$

$\Rightarrow \log_2(x-4)=y-3$

$\Rightarrow y=\log_2(x-4)+3$

따라서 이 곡선의 점근선의 방정식을 구하면 $x=4$ 이므로 구하는 k 의 값은 4 이다.

[별해]

곡선 $y=2^{x-3}+4$ 의 점근선의 방정식은 $y=4$ 이다.

이 점근선을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동하면 직선 $x=4$ 이다.

따라서 $k=4$ 이다.

6) [정답] ①　(출제자 : 17 김정빈)

[출제의도] 포물선의 준선에 대해 이해하고, 이에 대한 간단한 계산을 할 수 있는가?

[해설]

주어진 식을 정리하면 $y^2=4(x-k)$ 이므로

이 포물선의 준선은 $x=k-1$ 이다.

따라서 $k-1=3$ 이므로 $k=4$ 이다.

7) [정답] ④　(출제자 : 17 김도훈)

[출제의도] 삼각함수의 성질을 이용하여 방정식의 해를 구할 수 있는가?

[해설]

$\cos^2 x=1-\sin^2 x$ 이므로 주어진 방정식을 정리하면

$2(1-\sin^2 x)+\sqrt{3}\sin x=2,\ 2\sin^2 x-\sqrt{3}\sin x=0$ 이고

$\sin x\left(\sin x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=0$ 이다.

즉, 주어진 범위인 $0<x\le 2\pi$ 에서

$\sin x=0$ 또는 $\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 을 만족시키는 x 의 값을 구하면 된다.

따라서 주어진 범위에서 방정식을 만족시키는 모든 해의 값을 구하면

$x=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \pi,\ 2\pi$ 이므로

모든 해의 합을 구하면 $\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{2}{3}\pi+\pi+2\pi=4\pi$ 이다.

8) [정답] ⑤ (출제자 : 14 임현우)

[출제의도] 이항정리를 이용하여 특정 차수 항의 계수를 구할 수 있는가?

[해설]

주어진 다항식은 $x(x-2)^7+(x-2)^7$과 같고, 다항식 $(x-2)^7$의 전개식의 일반항은 ${}_7\mathrm{C}_r\,x^r(-2)^{7-r}$ (단, r은 0 이상 7 이하의 정수)이다. ($\because$ 이항정리) …㉠

x^4의 계수를 구하기 위해서는 다항식 $x(x-2)^7$에서의 x^4의 계수와 다항식 $(x-2)^7$에서의 x^4의 계수를 더해야 한다.

먼저 $x(x-2)^7$에서의 x^4의 계수를 구해보자. x가 곱해져 있으므로 x의 계수인 1과 $(x-2)^7$에서의 x^3의 계수를 곱하면 x^4의 계수를 구할 수 있다. ㉠을 이용하여 $(x-2)^7$에서의 x^3의 계수를 구하면
${}_7\mathrm{C}_3(-2)^{7-3}=\dfrac{7\times6\times5}{3\times2\times1}\times16=560$이므로
$x(x-2)^7$에서의 x^4의 계수는 $1\times560=560$이다.

다음으로 $(x-2)^7$에서의 x^4의 계수를 ㉠을 이용하여 구하면
${}_7\mathrm{C}_4(-2)^{7-4}={}_7\mathrm{C}_3\times(-8)=\dfrac{7\times6\times5}{3\times2\times1}\times(-8)=-280$이다.

따라서 구하는 값은 $560+(-280)=280$이다.

9) [정답] ③ (출제자 : 18 안동우)

[출제의도] 부분적분법을 이용하여 적분 계산을 할 수 있는가?

[해설]

$$\begin{aligned}\int_2^4(\ln x+1)\,dx&=\int_2^4\ln x\,dx+\int_2^4 1\,dx\\&=\left([x\ln x]_2^4-\int_2^4 1\,dx\right)+\int_2^4 1\,dx\\&=[x\ln x]_2^4\\&=4\ln4-2\ln2\\&=8\ln2-2\ln2\\&=6\ln2\end{aligned}$$

10) [정답] ⑤ (출제자 : 18 안동우)

[출제의도] 경우의 수를 계산할 수 있는가?

[해설]

한 여학생이 앉을 수 있는 자리를 고르는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{C}_1$이고, 다른 여학생은 처음 여학생이 고른 자리와 이웃한 2자리에 앉을 수 없으므로 다른 여학생이 앉을 수 있는 자리를 고르는 경우의 수는 ${}_2\mathrm{C}_1$이다.
두 여학생이 자리를 고른 후에 남는 자리는 3자리이므로, 남학생 3명이 앉을 수 있는 자리를 고르는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{P}_3$이다.
따라서 두 여학생이 이웃하여 앉지 않을 경우의 수는
${}_5\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{P}_3=5\times2\times(3\times2\times1)=60$이다.

[별해]

두 여학생이 이웃하여 앉지 않을 경우의 수는 다섯 명이 자리에 앉을 수 있는 모든 경우의 수에서 두 여학생이 이웃하여 앉을 경우의 수를 제외하면 구할 수 있다.
5명이 자리에 앉을 수 있는 모든 경우의 수는
${}_5\mathrm{P}_5=5\times4\times3\times2\times1=120$이다.

한 여학생이 앉을 자리를 고르는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{C}_1$이다. 다른 여학생은 처음 여학생이 고른 자리와 이웃한 2자리에 앉아야 하므로
이 여학생이 앉을 수 있는 자리를 고르는 경우의 수는 ${}_2\mathrm{C}_1$이다.
여학생 2명이 자리를 고른 후에 남는 자리는 3자리이므로, 남학생 3명이 앉을 수 있는 자리를 고르는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{P}_3$이다.

따라서 두 여학생이 이웃하여 앉을 경우의 수는
${}_5\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{P}_3=5\times2\times(3\times2\times1)=60$이므로
두 여학생이 이웃하여 앉지 않을 경우의 수는 $120-60=60$이다.

11) [정답] ② (출제자 : 17 김동규)

[출제의도] 공간상의 두 도형의 위치 관계를 파악하여 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]

구의 중심을 A라 하고, 구와 직선이 만나는 점을 B라 하자.
점 B는 직선 위의 점이므로 B의 좌표를 $(t+2,\,t-1,\,t)$라 둘 수 있다.
두 점 A, B에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(t-1,\,t-2,\,t)$이고, 이 벡터는 직선의 방향벡터와 서로 수직이므로
$(t-1,\,t-2,\,t)\cdot(1,\,1,\,1)=0$이어야 한다.
즉, $(t-1)+(t-2)+t=3t-3=0$에서 $t=1$이므로
점 B의 좌표는 $(3,\,0,\,1)$이다.
따라서 구하는 구의 반지름의 길이 r의 값은
$r=\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(3-3)^2+(0-1)^2+(1-0)^2}=\sqrt{2}$이다.

12) [정답] ① (출제자 : 17 김도훈, 17 김동규)

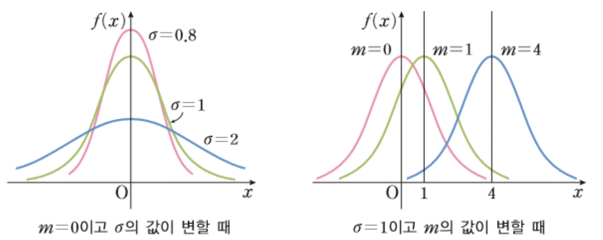
[출제의도] 정규분포를 따르는 연속확률변수에 대한 확률밀도함수의 그래프의 대칭성을 이용하여, 주어진 확률을 구할 수 있는가?

[해설]

주어진 등식의 좌변을 살펴보면
$\mathrm{P}(k\le X\le k+12)=\mathrm{P}(k\le X\le k+8)+\mathrm{P}(k+8\le X\le k+12)$
이다. 마찬가지로 주어진 등식의 우변을 살펴보면
$\mathrm{P}(k-4\le X\le k+8)=\mathrm{P}(k-4\le X\le k)+\mathrm{P}(k\le X\le k+8)$
이다.
따라서 주어진 등식을
$\mathrm{P}(k-4\le X\le k)=\mathrm{P}(k+8\le X\le k+12)$로 볼 수 있다.
위의 등식의 좌변에서 $k-4$와 k의 차이가 4이고
우변에서 $k+8$과 $k+12$의 차이도 4이다.
따라서 정규분포의 확률밀도함수의 그래프는 평균을 기준으로 좌우대칭인 종 모양의 그래프이므로 위의 등식으로부터 m의 값이 $k-4$와 $k+12$의 평균이자 k와 $k+8$의 평균인 $k+4$임을 알 수 있다. …([보충] 참고)
확률변수 X의 평균이 $k+4$이고 표준편차가 4이므로
구하는 값인 $\mathrm{P}(X\ge k+12)$를 표준화시키면
$\mathrm{P}(X\ge k+12)=\mathrm{P}(Z\ge 2)=0.0228$이다.

[보충] 이강섭 외 14인, 미래엔, 2009 개정 교육과정 확률과 통계 111p

정규분포의 확률밀도함수의 그래프는 m과 σ의 값에 따라 그 모양이 정해진다.



일반적으로 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X의 확률밀도함수의 그래프에는 다음과 같은 특징이 있다.

① 직선 $x=m$에 대하여 대칭인 종 모양의 곡선이고, 점근선은 x축이다.
② 곡선과 x축 사이의 넓이는 1이다.
③ $x=m$일 때, 최댓값을 갖는다.
④ m의 값이 일정할 때, σ의 값이 커지면 곡선은 낮아지면서 양쪽으로 퍼지고 σ의 값이 작아지면 곡선은 높아지면서 뾰족하게 된다.
⑤ σ의 값이 일정할 때, m의 값이 변하면 대칭축의 위치는 바뀌지만 곡선의 모양은 같다.

13) [정답] ⑤ (출제자 : 17 박승용)

[출제의도] 역함수의 미분법을 이용하여, 조건을 만족시키는 점의 좌표를 구할 수 있는가?

[해설]

곡선 $y=g(x)$가 점 $(a,\,b)$를 지나므로 $g(a)=b$이며
$g(x)$는 $f(x)$의 역함수이므로 $f(b)=a$이다. …㉠

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\left(1,\,\frac{1}{2}\right)$에서의 접선과
곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(a,\,b)$에서의 접선이 서로 평행하므로
$f'(1)=g'(a)$이다.
이때 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이므로 역함수의 미분법과 ㉠에 의하여
$g'(a)=\dfrac{1}{f'(g(a))}=\dfrac{1}{f'(b)}$이다.
따라서 $f'(1)=\dfrac{1}{f'(b)}$이다. …㉡

$f(x)=\dfrac{x}{2}+\ln x$의 양변을 x에 대하여 미분하면
$f'(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{x}$이므로, $f'(1)=\dfrac{3}{2}$이고 $f'(b)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{b}$이다.
이를 ㉡에 대입하면 $\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{b}}$이다.
따라서 $\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{b}$이므로, b의 값을 구하면 $b=6$이다.
또, ㉠을 이용하여 a의 값을 구하면 $a=f(6)=3+\ln 6$이다.
따라서 구하는 값은 $a+b=(3+\ln 6)+6=9+\ln 6$이다.

14) [정답] ① (출제자 : 18 정우진)

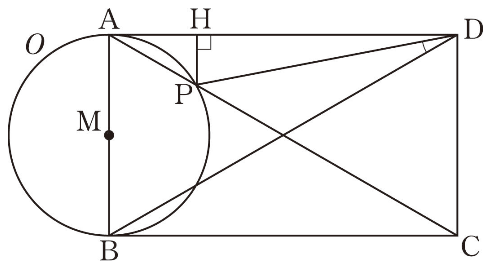
[출제의도] 삼각함수의 덧셈정리를 활용할 수 있는가?

[해설]

$\cos(\angle\mathrm{PMA})=\dfrac{1}{2}$이고 $0<\angle\mathrm{PMA}<\dfrac{\pi}{2}$이므로 $\angle\mathrm{PMA}=\dfrac{\pi}{3}$이다.
이때 선분 MA와 선분 MP는 원 O의 반지름이므로 $\overline{\mathrm{MA}}=\overline{\mathrm{MP}}$이다.

삼각형 AMP는 $\overline{\mathrm{MA}}=\overline{\mathrm{MP}}$인 이등변삼각형이므로
이등변삼각형의 성질에 의하여 $\angle\mathrm{MPA}=\angle\mathrm{MAP}$이다.
$\angle\mathrm{MPA}=\angle\mathrm{MAP}=\theta$라 하면 삼각형의 세 내각의 크기의 합은 π이므로, $\dfrac{\pi}{3}+2\theta=\pi$에서 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$임을 알 수 있다.
따라서 $\angle\mathrm{PMA}=\angle\mathrm{MPA}=\angle\mathrm{MAP}=\dfrac{\pi}{3}$이므로 삼각형 AMP는 한 변의 길이가 2인 정삼각형이다. …㉠

$\angle\mathrm{ACD}$와 $\angle\mathrm{MAP}$는 서로 엇각이고, 직선 MA와 직선 CD가 서로 평행하므로 $\angle\mathrm{ACD}=\angle\mathrm{MAP}=\dfrac{\pi}{3}$이다.
따라서 $\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{CD}}\times\tan(\angle\mathrm{ACD})=4\times\tan\dfrac{\pi}{3}=4\sqrt{3}$이다.



한편, 그림과 같이 점 P에서 선분 AD에 내린 수선의 발을 H라 하고 $\angle\mathrm{HDP}=\alpha$, $\angle\mathrm{ADB}=\beta$라 하자.

$\angle\mathrm{PDB}=\beta-\alpha$이므로 삼각함수의 덧셈정리에 의하여
$\sin(\angle\mathrm{PDB})=\sin(\beta-\alpha)=\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha$이다. …㉡
따라서 $\sin(\angle\mathrm{PDB})$의 값을 구하기 위해서는
$\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\sin\beta$, $\cos\beta$의 값을 구해야 한다.

$\angle\mathrm{APH}$와 $\angle\mathrm{MAP}$는 엇각이고, 직선 PH와 직선 MA가 서로 평행하므로 두 각의 크기는 $\dfrac{\pi}{3}$로 같다.
따라서 $\angle\mathrm{APH}=\dfrac{\pi}{3}$이고, ㉠에 의하여
$\overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{AP}}\times\cos(\angle\mathrm{APH})=2\times\cos\dfrac{\pi}{3}=1$이고

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{HD}}&=\overline{\mathrm{AD}}-\overline{\mathrm{AH}}\\&=4\sqrt{3}-\overline{\mathrm{AP}}\times\sin(\angle\mathrm{APH})\\&=4\sqrt{3}-2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\\&=3\sqrt{3}\end{aligned}$$

이다.

삼각형 DHP는 선분 PD가 빗변인 직각삼각형이므로
피타고라스 정리에 의하여
$\overline{\mathrm{PD}}^2=\overline{\mathrm{HD}}^2+\overline{\mathrm{PH}}^2$에서 $\overline{\mathrm{PD}}=2\sqrt{7}$이다.

또한 $\overline{\mathrm{AB}}=4$, $\overline{\mathrm{AD}}=4\sqrt{3}$이고 삼각형 ADB는 선분 BD가 빗변인 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여
$\overline{\mathrm{BD}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AD}}^2$에서 $\overline{\mathrm{BD}}=8$이다.

위의 결과를 이용하여 $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\sin\beta$, $\cos\beta$의 값을 구하면
$\sin\alpha=\dfrac{\overline{\mathrm{PH}}}{\overline{\mathrm{PD}}}=\dfrac{1}{2\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{7}}{14}$, $\cos\alpha=\dfrac{\overline{\mathrm{HD}}}{\overline{\mathrm{PD}}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}=\dfrac{3\sqrt{21}}{14}$이고
$\sin\beta=\dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{BD}}}=\dfrac{1}{2}$, $\cos\beta=\dfrac{\overline{\mathrm{AD}}}{\overline{\mathrm{BD}}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이다.

따라서 구하는 값은 ㉡에 의하여

$$\begin{aligned}\sin(\angle \mathrm{PDB}) &= \sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha \\ &= \frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{21}}{14} - \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{7}}{14} \\ &= \frac{3\sqrt{21}}{28} - \frac{\sqrt{21}}{28} \\ &= \frac{\sqrt{21}}{14}\end{aligned}$$

이다.

15) [정답] ② (출제자 : 18 김윤태)

[출제의도] 속도, 가속도 사이의 관계를 파악하고 속력을 구할 수 있는가?

[해설]

가속도의 각 성분들을 시각 t에 대하여 적분하면 속도를 구할 수 있다.

가속도 $\vec{a} = \left(2t-4,\ 2^{t+1}\ln 2\right)$의 각 성분을 적분하여 속도를 구해보면 $\vec{v} = \left(t^2-4t+C_1,\ 2^{t+1}+C_2\right)$이다. (단, C_1, C_2는 적분상수)

$t=1$일 때, $\vec{v} = (C_1-3,\ 4+C_2)$이고 이때의 속력은

$\sqrt{(C_1-3)^2+(4+C_2)^2} = 5$이다.

$t=3$일 때, $\vec{v} = (C_1-3,\ 16+C_2)$이고 이때의 속력은

$\sqrt{(C_1-3)^2+(16+C_2)^2} = 7$이다.

두 식을 연립하면 $C_1 = 3$, $C_2 = -9$이다.

따라서 시각 $t\ (t\ge 0)$에서의 점 P의 속도 $\vec{v}$는

$\vec{v} = \left(t^2-4t+3,\ 2^{t+1}-9\right)$이다.

$t=2$일 때, 점 P의 속도는 $\vec{v} = (-1,\ -1)$이므로

이때의 속력은 $\sqrt{(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$이다.

16) [정답] ③ (출제자 : 16 김민지)

[출제의도] 조건부확률을 계산할 수 있는가?

[해설]

주머니 A에서 공 한 개를 두 번 뽑을 때, 나올 수 있는 경우는

㉠ 홀수가 적혀있는 공을 한 개씩 두 번 꺼낸 경우

㉡ 홀수가 적혀있는 공 한 개를 한 번, 짝수가 적혀있는 공 한 개를 한 번 꺼낸 경우

로 두 가지뿐이다.

따라서 주머니 A에서 홀수가 적혀있는 공을 한 개씩 두 번 꺼낸 사건을 X라 하면, 주머니 A에서 홀수가 적혀있는 공 한 개를 한 번, 짝수가 적혀있는 공 한 개를 한 번 꺼낸 사건은 X^C이라 할 수 있다.

주머니 B에서 짝수가 적혀있는 공을 한 개 꺼낸 사건을 Y라 하자.

i) 주머니 A에서 홀수가 적혀있는 공을 한 개씩 두 번 꺼낸 후, 꺼낸 공들을 주머니 B에 넣고 주머니 B에서 짝수가 적혀있는 공을 한 개 꺼낼 확률

사건 X와 사건 Y가 함께 일어나는 경우의 확률이므로

구하는 확률은 $\mathrm{P}(X\cap Y) = \dfrac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_3\mathrm{C}_2}\times\dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{9}$이다.

ii) 주머니 A에서 홀수가 적혀있는 공 한 개를 한 번, 짝수가 적혀있는 공 한 개를 한 번 꺼낸 후 홀수가 적혀있는 공을 주머니 B에 넣고 주머니 B에서 짝수가 적혀있는 공을 한 개 꺼낼 확률

사건 X^C과 사건 Y가 함께 일어나는 경우의 확률이므로

구하는 확률은 $\mathrm{P}(X^C\cap Y) = \dfrac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_1\mathrm{C}_1}{{}_3\mathrm{C}_2}\times\dfrac{2}{5} = \dfrac{4}{15}$이다.

따라서 주머니 B에서 꺼낸 공에 적혀 있는 수가 짝수일 때, 주머니 A에서 꺼낸 공에 적혀있는 수가 모두 홀수일 확률은

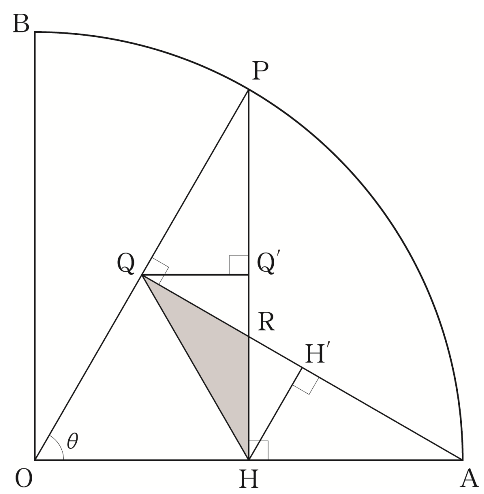
$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X|Y) &= \frac{\mathrm{P}(X\cap Y)}{\mathrm{P}(Y)} \\ &= \frac{\mathrm{P}(X\cap Y)}{\mathrm{P}(X\cap Y)+\mathrm{P}(X^C\cap Y)} \\ &= \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{9}+\frac{4}{15}} \\ &= \frac{5}{17}\end{aligned}$$

이다.

17) [정답] ① (출제자 : 17 박승용)

[출제의도] 삼각형의 넓이를 삼각함수에 관한 식으로 나타낸 후, 삼각함수의 극한을 구할 수 있는가?

[해설]



그림과 같이 점 Q에서 선분 PH에 내린 수선의 발을 Q′이라 하고 점 H에서 선분 AQ에 내린 수선의 발을 H′이라 하자.

직각삼각형 OPH에서 $\overline{\mathrm{OP}} = 1$, $\angle\mathrm{POH} = \theta$이므로

$\overline{\mathrm{OH}} = \overline{\mathrm{OP}}\times\cos\theta = \cos\theta$이고, $\overline{\mathrm{OA}} = 1$이므로

$\overline{\mathrm{HA}} = \overline{\mathrm{OA}} - \overline{\mathrm{OH}} = 1-\cos\theta$이다.

이때, 두 삼각형 OPH와 OAQ는 직각삼각형이고

$\overline{\mathrm{OP}} = \overline{\mathrm{OA}} = 1$, $\angle\mathrm{POH} = \angle\mathrm{AOQ} = \theta$이므로 RHA 합동이다.

따라서 $\overline{\mathrm{OQ}} = \overline{\mathrm{OH}} = \cos\theta$이고, $\overline{\mathrm{QP}} = \overline{\mathrm{HA}} = 1-\cos\theta$이다.

한편, $\angle\mathrm{POH}$와 $\angle\mathrm{PQQ'}$은 동위각이고 직선 QQ′이 직선 OA와 서로 평행하므로 $\angle\mathrm{POH} = \angle\mathrm{PQQ'} = \theta$이다.

따라서 $\angle\mathrm{RQQ'} = \dfrac{\pi}{2}-\theta$이므로 $\angle\mathrm{PRQ} = \theta$이다.

그에 따라, 직각삼각형 PQQ′에서 $\cos\theta = \dfrac{\overline{QQ'}}{\overline{QP}}$ 이므로

$\dfrac{\overline{QQ'}}{1-\cos\theta} = \cos\theta$ 에서 $\overline{QQ'} = (1-\cos\theta)\cos\theta$ 이고

직각삼각형 PQR에서 $\dfrac{\overline{QP}}{\overline{QR}} = \tan\theta$ 이므로

$\dfrac{1-\cos\theta}{\overline{QR}} = \tan\theta$ 에서 $\overline{QR} = \dfrac{1-\cos\theta}{\tan\theta}$ 이다.

또, 두 삼각형 OPH와 OAQ가 합동이므로 동일한 과정에 의하여 $\overline{HH'} = \overline{QQ'} = (1-\cos\theta)\cos\theta$ 이다.

따라서 삼각형 QRH의 넓이 $S(\theta)$는

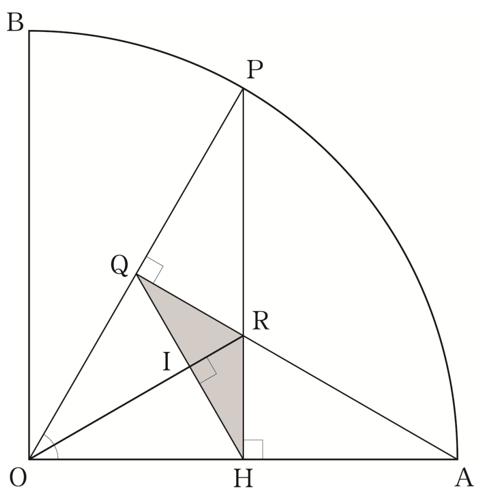
$$\begin{aligned} S(\theta) &= \frac{1}{2}\times\overline{QR}\times\overline{HH'} \\ &= \frac{1}{2}\times\frac{1-\cos\theta}{\tan\theta}\times(1-\cos\theta)\cos\theta \\ &= \frac{1}{2}\times\frac{(1-\cos\theta)^2\cos\theta}{\tan\theta} \end{aligned}$$

이므로 구하는 값은

$$\begin{aligned} \lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3} &= \lim_{\theta\to0+}\frac{(1-\cos\theta)^2\times\cos\theta}{2\theta^3\times\tan\theta} \\ &= \frac{1}{2}\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{(1-\cos\theta)^2}{\theta^4}\times\frac{\theta}{\tan\theta}\times\cos\theta\right\} \\ &= \frac{1}{2}\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{(1-\cos\theta)^2(1+\cos\theta)^2}{\theta^4(1+\cos\theta)^2}\times\frac{\theta}{\tan\theta}\times\cos\theta\right\} \\ &= \frac{1}{2}\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{\sin^4\theta}{\theta^4(1+\cos\theta)^2}\times\frac{\theta}{\tan\theta}\times\cos\theta\right\} \\ &= \frac{1}{2}\lim_{\theta\to0+}\left\{\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^4\times\frac{1}{(1+\cos\theta)^2}\times\frac{\theta}{\tan\theta}\times\cos\theta\right\} \\ &= \frac{1}{2}\times1^4\times\frac{1}{(1+1)^2}\times1\times1 \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

이다.

[별해]



그림과 같이 선분 OR와 선분 QH의 교점을 I라 하자.

직각삼각형 OPH에서 $\overline{OP} = 1$, $\angle POH = \theta$ 이므로

$\overline{OH} = \overline{OP}\times\cos\theta = \cos\theta$ 이고

마찬가지로 직각삼각형 OAQ에서 $\overline{OA} = 1$, $\angle AOQ = \theta$ 이므로

$\overline{OQ} = \overline{OA}\times\cos\theta = \cos\theta$ 이다.

이때, 두 삼각형 ORQ와 ORH는 직각삼각형이고

변 OR를 공유하며 $\overline{OH} = \overline{OQ} = \cos\theta$ 이므로 RHS 합동이다.

그에 따라, $\angle ROH = \angle ROQ = \dfrac{\theta}{2}$ 이고

이등변삼각형의 성질에 의하여 직선 OR와 직선 QH가 서로 수직이고 $\overline{IQ} = \overline{IH}$ 이다.

직각삼각형 ORH에서 $\angle ROH = \dfrac{\theta}{2}$ 이므로, $\angle ORH = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\theta}{2}$ 이고

그에 따라 직각삼각형 HRI에서 $\angle RHI = \dfrac{\theta}{2}$ 이다.

직각삼각형 OHI에서 $\sin\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\overline{IH}}{\overline{OH}}$ 이므로

$\sin\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\overline{IH}}{\cos\theta}$ 에서 $\overline{IH} = \cos\theta\sin\dfrac{\theta}{2}$ 이고

직각삼각형 HRI에서 $\tan\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\overline{IR}}{\overline{IH}}$ 이므로

$\tan\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\overline{IR}}{\cos\theta\sin\frac{\theta}{2}}$ 에서 $\overline{IR} = \cos\theta\sin\dfrac{\theta}{2}\tan\dfrac{\theta}{2}$ 이다.

따라서 삼각형 QRH의 넓이 $S(\theta)$는

$$\begin{aligned} S(\theta) &= \frac{1}{2}\times\overline{IR}\times\overline{QH} \\ &= \frac{1}{2}\times\overline{IR}\times2\overline{IH} \\ &= \frac{1}{2}\times\cos\theta\sin\frac{\theta}{2}\tan\frac{\theta}{2}\times2\cos\theta\sin\frac{\theta}{2} \\ &= \cos^2\theta\sin^2\frac{\theta}{2}\tan\frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

이므로 구하는 값은

$$\begin{aligned} \lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3} &= \lim_{\theta\to0+}\frac{\cos^2\theta\times\sin^2\frac{\theta}{2}\times\tan\frac{\theta}{2}}{\theta^3} \\ &= \frac{1}{8}\lim_{\theta\to0+}\left\{\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right)^2\times\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\times\cos^2\theta\right\} \\ &= \frac{1}{8}\times1^2\times1\times1^2 \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

이다.

18) [정답] ③ (출제자 : 18 안동우)

[출제의도] 각 상황에 맞는 경우의 수를 구할 수 있는가?

[해설]

x축의 양의 방향으로 1 이동하는 것을 →,
x축의 음의 방향으로 1 이동하는 것을 ←,
y축의 양의 방향으로 1 이동하는 것을 ↑,
y축의 음의 방향으로 1 이동하는 것을 ↓ 라 하자.

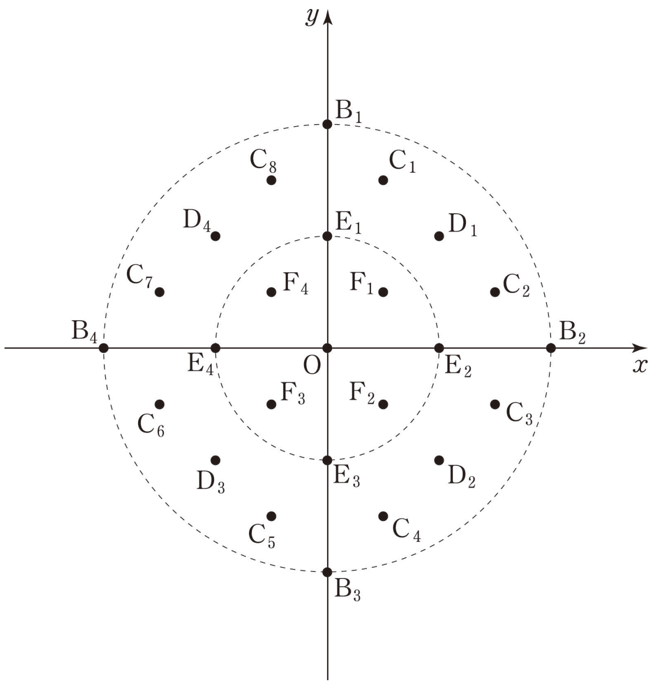
각 순서마다 이동할 수 있는 방향의 가짓수는 4가지이고, 총 4번 이동하므로 이동할 수 있는 전체 경우의 수는 $4^4 = 256$이다.

점 A의 위치로 가능한 모든 곳을 아래의 조건에 따라 정하자.

점 B_n − 한 방향으로만 4번 이동한 경우 (단, $n = 1, 2, 3, 4$)
점 C_n − 한 방향으로 1번, 그 방향과 수직인 두 방향 중 한 방향으로만 3번 이동한 경우 (단, $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$)
점 D_n − 한 방향으로 2번, 그 방향과 수직인 두 방향 중 한 방향으로만 2번 이동한 경우 (단, $n = 1, 2, 3, 4$)

점 E_n − 한 방향으로 1번, 반대 방향으로 3번 이동한 경우 또는
한 방향으로 1번, 반대 방향으로 1번, 두 방향과 수직인 두 방향 중 한 방향으로만 2번 이동한 경우 (단, $n=1, 2, 3, 4$)
점 F_n − 한 방향으로 1번, 반대 방향으로 2번, 두 방향과 수직인 두 방향 중 한 방향으로 1번 이동한 경우 (단, $n=1, 2, 3, 4$)
원점 O − 한 방향으로 2번, 반대 방향으로 2번 이동한 경우 또는 모든 방향으로 1번 이동한 경우

각 조건에 따라 점 A의 위치로 가능한 모든 곳을 표시하면 다음과 같다.



점 A가 점 B_n일 때 $t=4$, 점 C_n일 때 $t=\sqrt{10}$,
점 D_n일 때 $t=2\sqrt{2}$, 점 E_n일 때 $t=2$,
점 F_n일 때 $t=\boxed{\sqrt{2}}$, 원점 O일 때 $t=0$이다.
따라서 가능한 t의 값은 0, $\boxed{\sqrt{2}}$, 2, $2\sqrt{2}$, $\sqrt{10}$, 4이다.
$t=0$, $t=2$, $t=4$일 때, 1점을 획득하고
$t=\boxed{\sqrt{2}}$일 때, 2점을 획득하고
$t=2\sqrt{2}$, $t=\sqrt{10}$일 때, 3점을 획득한다.

i) $X=1$일 때

i−1) $t=0$일 때

원점 O에서 원점 O로 이동하는 경우는 다음 괄호 안의 기호를 나열하는 경우와 같다.
$(\rightarrow, \rightarrow, \leftarrow, \leftarrow)$, $(\uparrow, \uparrow, \downarrow, \downarrow)$, $(\rightarrow, \leftarrow, \uparrow, \downarrow)$
따라서 $t=0$일 때의 경우의 수는
$\frac{4!}{2!\,2!}+\frac{4!}{2!\,2!}+4!=36$이다.

i−2) $t=2$일 때

원점 O에서 점 E_1으로 이동하는 경우는 다음 괄호 안의 기호를 나열하는 경우와 같다.
$(\uparrow, \uparrow, \uparrow, \downarrow)$, $(\rightarrow, \leftarrow, \uparrow, \uparrow)$
따라서 $\frac{4!}{3!}+\frac{4!}{2!}=16$가지이다.
원점 O에서 점 E_1이나 점 E_2, E_3, E_4로 이동하는 경우의 조건은 서로 같으므로 각 점으로 이동하는 경우의 수는 동일하다.
따라서 $t=2$일 때의 경우의 수는 $4\times\left(\frac{4!}{3!}+\frac{4!}{2!}\right)=64$이다.

i−3) $t=4$일 때

원점 O에서 점 B_1으로 이동하는 경우는 다음 괄호 안의 기호를 나열하는 경우와 같다.
$(\uparrow, \uparrow, \uparrow, \uparrow)$
따라서 $\frac{4!}{4!}$가지이다.
원점 O에서 점 B_1이나 점 B_2, B_3, B_4로 이동하는 경우의 조건은 서로 같으므로 각 점으로 이동하는 경우의 수는 동일하다.
따라서 $t=4$일 때의 경우의 수는 $4\times\frac{4!}{4!}=4$이다.

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X=1) &= \frac{1}{256}\times\left\{\left(4!+2\times\frac{4!}{2!\,2!}\right)+4\times\left(\frac{4!}{2!}+\frac{4!}{3!}\right)+4\times\frac{4!}{4!}\right\}\\ &= \frac{1}{256}\times(36+64+4)\\ &= \frac{13}{32}\end{aligned}$$

이다.

ii) $X=2$일 때

$t=\boxed{\sqrt{2}}$일 때

원점 O에서 점 F_1으로 이동하는 경우는 다음 괄호 안의 기호를 나열하는 경우와 같다.
$(\rightarrow, \rightarrow, \leftarrow, \uparrow)$, $(\rightarrow, \uparrow, \uparrow, \downarrow)$
따라서 $\boxed{\frac{4!}{2!}+\frac{4!}{2!}}$이다.
원점 O에서 점 F_1이나 F_2, F_3, F_4로 이동하는 경우의 조건은 서로 같으므로 각 점으로 이동하는 경우의 수는 동일하다.
따라서 $t=\boxed{\sqrt{2}}$일 때의 경우의 수는 $\left(4\times\boxed{\frac{4!}{2!}+\frac{4!}{2!}}\right)$이다.

따라서

$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{256}\times\left(4\times\boxed{\frac{4!}{2!}+\frac{4!}{2!}}\right)=\frac{3}{8}$$ 이다.

iii) $X=3$일 때

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X=3) &= 1-\{\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)\}\\ &= 1-\left(\frac{13}{32}+\frac{3}{8}\right)=\frac{7}{32}\end{aligned}$$

이다.

따라서 확률변수 X의 평균 $\mathrm{E}(X)$는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) &= \sum_{i=1}^{3}\{i\times\mathrm{P}(X=i)\}\\ &= \boxed{1\times\frac{13}{32}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{7}{32}}\\ &= \boxed{\frac{29}{16}}\end{aligned}$$

따라서 $a=\sqrt{2}$, $b=24$, $c=\frac{29}{16}$이므로
$8a^2c-b=8\times(\sqrt{2})^2\times\frac{29}{16}-24=5$이다.

19) [정답] ④ (출제자 : 17 문혁준)

[출제의도] 변곡점에 대하여 이해하고, 이를 이용하여 곡선의 오목과 볼록을 파악할 수 있는가?

[해설]

ㄱ. 함수 $g(x)$의 식에서

$g(x)=\left\{\dfrac{f(k+1)-f(k)}{(k+1)-k}\right\}(x-k)+f(k)\ (k\le x<k+1)$ 이므로

$g(x)$의 그래프는 모든 정수 k에 대하여 두 점 $(k,\ f(k))$와 $(k+1,\ f(k+1))$을 이은 선분들로 이루어진 그래프이다.

즉, 모든 정수 k에 대하여 구간 $[k,\ k+1]$에서 함수 $g(x)$는 연속이므로 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

ㄴ. 함수 $f(x)$의 도함수가 $f'(x)=e^x(x^3-4x^2+8x-8)$이라 주어져 있고, 변곡점의 여부를 판단하려면 $f(x)$의 이계도함수 $f''(x)$를 이용해야 하므로

$f'(x)=e^x(x^3-4x^2+8x-8)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f''(x)=e^x(x^3-x^2)=e^x x^2(x-1)$이다.

모든 실수 x에 대하여 $e^x>0$이므로 방정식 $f''(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 0, 1뿐이다. 또, 각각의 x의 값의 좌우에서 $f''(x)$의 부호를 고려해보면 $x<0$에서 $f''(x)<0$, $0<x<1$에서 $f''(x)<0$이고 $x>1$에서 $f''(x)>0$이다.

이를 이용하여 함수 $f'(x)$의 증가・감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f''(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f'(x)$	↘		↘	극소	↗

$x=0$에서 $f''(0)=0$이지만, $x=0$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 변하지 않으므로 점 $(0,\ f(0))$은 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이 아니다.

$x=1$에서 $f''(1)=0$이고, $x=1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 변하므로 점 $(1,\ f(1))$은 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.

따라서 곡선 $y=f(x)$는 한 개의 변곡점을 갖는다.

ㄷ. ㄱ에 의하여 함수 $g(x)$의 그래프는 모든 정수 k에 대하여 두 점 $(k,\ f(k))$, $(k+1,\ f(k+1))$을 이은 선분들로 이루어진 그래프이다.

이를 고려하면, 구간 $(k,\ k+1)$에서 $f(x)$의 그래프가 아래로 볼록할 때 $f(x)\le g(x)$이고, $f(x)$의 그래프가 위로 볼록할 때 $f(x)\ge g(x)$이다. ($\cdots$[참고 1] 참고)

ㄴ에 의하여 곡선 $y=f(x)$의 변곡점은 $(1,\ f(1))$ 하나이고 두 구간 $(-\infty,\ 0)$과 $(0,\ 1)$에서 $f''(x)<0$, 구간 $(1,\ \infty)$에서 $f''(x)>0$이다. 즉, 구간 $(-\infty,\ 1)$에서 곡선 $y=f(x)$는 위로 볼록하고 구간 $(1,\ \infty)$에서 곡선 $y=f(x)$는 아래로 볼록하다.

이 두 가지 사실을 종합하면, 구간 $(-\infty,\ 1)$에서 $f(x)\ge g(x)$이고 구간 $(1,\ \infty)$에서 $f(x)\le g(x)$이다.
(단, 두 경우 모두 등호는 x가 정수일 때만 성립)

이제 $\displaystyle\int_1^x\{f(t)-g(t)\}dt$의 값을 판단해보자.

i) $x<1$일 때

정적분의 성질에 의하여

$\displaystyle\int_1^x\{f(t)-g(t)\}dt=-\int_x^1\{f(t)-g(t)\}dt$이고

구간 $(-\infty,\ 1)$에서 $f(x)\ge g(x)$이므로 $f(x)-g(x)\ge 0$이다.

즉, $\displaystyle\int_x^1\{f(t)-g(t)\}dt\ge 0$이므로

$\displaystyle\int_1^x\{f(t)-g(t)\}dt=-\int_x^1\{f(t)-g(t)\}dt\le 0$이다.

ii) $x=1$일 때

$\displaystyle\int_1^1\{f(t)-g(t)\}dt=0\le 0$이다.

iii) $x>1$일 때

구간 $(1,\ \infty)$에서 $f(x)\le g(x)$이므로 $f(x)-g(x)\le 0$이다.

따라서 $\displaystyle\int_1^x\{f(t)-g(t)\}dt\le 0$이다.

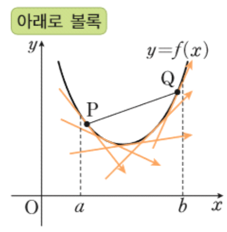
i) ~ iii)에서 $\displaystyle\int_1^x\{f(t)-g(t)\}dt\le 0$이므로, 모든 실수 x에 대하여 $\displaystyle\int_1^x\{f(t)-g(t)\}dt\le 0$이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

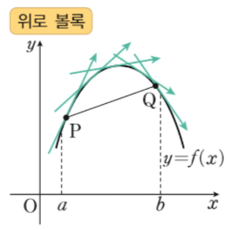
[참고 1]

'이강섭 외 14인, 미래엔, 2009 개정 교육과정 미적분2, 128~129p'를 보면 '아래로 볼록'과 '위로 볼록'의 정의 자체를 다음과 같이 소개하고 있다.

(i) 두 점 P, Q를 잇는 곡선 부분이 선분 PQ보다 아래쪽에 있으면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 아래로 볼록 또는 위로 오목하다고 한다. 이때 이 구간에서 $f'(x)$는 증가한다.
한편, $f''(x)>0$이면 $f'(x)$가 증가하므로 $f''(x)>0$이 되는 구간에서 곡선 $y=f(x)$는 아래로 볼록하게 된다.



(ii) 두 점 P, Q를 잇는 곡선 부분이 선분 PQ보다 위쪽에 있으면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 위로 볼록 또는 아래로 오목하다고 한다. 이때 이 구간에서 $f'(x)$는 감소한다.
한편, $f''(x)<0$이면 $f'(x)$가 감소하므로 $f''(x)<0$이 되는 구간에서 곡선 $y=f(x)$는 위로 볼록하게 된다.



이를 참고하면 '곡선 $y=f(x)$가 아래로 볼록하다'라는 말은 두 점 $(k,\ f(k))$, $(k+1,\ f(k+1))$을 이은 곡선 부분이 그 두 점을 이은 선분보다 아래쪽에 있고 구간 $(k,\ k+1)$에서 $f'(x)$가 증가한다는 것을 의미한다.

또, '곡선 $y=f(x)$가 위로 볼록하다'라는 말은 두 점 $(k,\ f(k))$, $(k+1,\ f(k+1))$을 이은 곡선 부분이 그 두 점을 이은 선분보다 위쪽에 있고 구간 $(k,\ k+1)$에서 $f'(x)$가 감소한다는 것을 의미한다.

따라서 '구간 $(k,\ k+1)$에서 $f(x)$의 그래프가 아래로 볼록할 때 $f(x) \le g(x)$이고, $f(x)$의 그래프가 위로 볼록할 때 $f(x) \ge g(x)$이다'라는 말을 바로 이해할 수 있다.

만약 아래로 볼록 / 위로 볼록에 대한 정의를 모르고, 수식 상으로만 $f''(x) > 0$ / $f''(x) < 0$이라는 것을 알고 있었을 때는 다음과 같은 방법으로 결론을 이끌어낼 수 있다.

$f(x)$의 그래프가 아래로 볼록할 때 $f(x) \le g(x)$라면 $f(x)$의 그래프가 위로 볼록할 때 $f(x) \ge g(x)$라는 것은 자명하므로, 전자만 증명한다.

임의의 정수 $x = k$에 대하여 구간 $(k,\ k+1)$에서 $f(x)$의 그래프가 아래로 볼록하다고 하자.

ㄱ에서 언급했듯 구간 $(k,\ k+1)$에서 $g(x)$의 그래프는 두 점 $(k,\ f(k))$, $(k+1,\ f(k+1))$을 이은 선분이다.
따라서 $g(k) = f(k)$, $g(k+1) = f(k+1)$임을 알 수 있다.

$h(x) = g(x) - f(x)$라 하면, 구간 $(k,\ k+1)$에서 함수 $h(x)$는 미분가능하고 구간 $(k,\ k+1)$에서 $g''(x) = 0$이므로 $h''(x) = g''(x) - f''(x) = -f''(x)$이다.

그런데 구간 $(k,\ k+1)$에서 $f(x)$의 그래프가 아래로 볼록하려면 $f''(x) > 0$이어야 하므로 $h''(x) < 0$이다.
따라서 $h(k) = h(k+1) = 0$이며 구간 $(k,\ k+1)$에서 $h(x)$의 그래프는 위로 볼록임을 알 수 있다.

구간 $[k,\ k+1]$에서 $h(x) \ge 0$임을 증명하자.
앞에서 $h''(x) < 0$임을 밝혔다. $h''(x)$는 $h(x)$의 이계도함수로도 볼 수 있지만, $h'(x)$의 도함수로도 볼 수 있다. 따라서 구간 $(k,\ k+1)$에서 $h''(x) < 0$이라는 것으로부터 이 구간에서 $h'(x)$가 감소한다는 것을 알 수 있다.

함수 $h(x)$는 구간 $[k,\ k+1]$에서 연속이고 구간 $(k,\ k+1)$에서 미분가능하며 $h(k) = h(k+1)$이므로 롤의 정리에 의하여 구간 $(k,\ k+1)$에서 방정식 $h'(c) = 0$을 만족시키는 실수 c가 적어도 하나 존재한다.

앞에서 밝혔듯이 $h'(x)$가 구간 $(k,\ k+1)$에서 계속 감소한다는 것을 고려하면, 구간 $(k,\ k+1)$에서 방정식 $h'(c) = 0$을 만족시키는 실수 c는 단 하나 존재한다.
따라서 구간 $(k,\ c)$에서 $h(x)$는 증가하고 구간 $(c,\ k+1)$에서 $h(x)$는 감소한다는 것을 알 수 있다.

이를 종합하면 구간 $[k,\ k+1]$에서 $h(x) \ge 0$임을 알 수 있고 $h(x) = g(x) - f(x)$이므로 $g(x) - f(x) \ge 0$에서 $f(x) \le g(x)$이다.

따라서 구간 $(k,\ k+1)$에서 $f(x)$의 그래프가 아래로 볼록하면 $f(x) \le g(x)$이다.

[참고 2] 이강섭 외 14인, 미래엔, 2009 개정 교육과정 미적분2, 129~130p

곡선의 오목과 볼록
함수 $y=f(x)$가 어떤 구간에서 항상
① $f''(x)>0$이면 곡선 $y=f(x)$는 그 구간에서 아래로 볼록하다.
② $f''(x)<0$이면 곡선 $y=f(x)$는 그 구간에서 위로 볼록하다.

변곡점의 판정
함수 $y=f(x)$에서 $f''(a)=0$이고, $x=a$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌면 점 $(a,\ f(a))$는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.

[별해-ㄱ]
함수 $g(x) = \{f(k+1) - f(k)\}(x-k) + f(k)$ $(k \le x < k+1)$에서 임의의 정수 k에 대하여 구간 $(k,\ k+1)$에서는 $g(x)$가 연속임을 알 수 있다. 따라서 ㄱ이 성립하기 위해서는 임의의 정수 k에 대하여 $x = k$에서 $g(x)$가 연속임을 보이면 된다. $g(x)$가 $x = k$에서 연속이려면 연속의 정의에 의하여, 다음 세 가지 조건을 만족시켜야 한다.

(1) $\lim_{x \to k} g(x)$의 값이 존재한다.
(2) $x = k$에서의 함숫값 $g(k)$가 정의되어 있다.
(3) $\lim_{x \to k} g(x) = g(k)$
이때 $\lim_{x \to k} g(x)$의 값이 존재하려면 $\lim_{x \to k-} g(x) = \lim_{x \to k+} g(x)$여야 한다.

$\lim_{x \to k-} g(x)$의 값과 $\lim_{x \to k+} g(x)$의 값을 각각 구해보자.

$$\lim_{x \to k-} g(x) = \lim_{x \to k-} [\{f(k) - f(k-1)\}\{x-(k-1)\} + f(k-1)]$$
$$= f(k) - f(k-1) + f(k-1) = f(k)$$
$$\lim_{x \to k+} g(x) = \lim_{x \to k+} [\{f(k+1) - f(k)\}(x-k) + f(k)]$$
$$= 0 + f(k) = f(k)$$

따라서 $\lim_{x \to k-} g(x) = \lim_{x \to k+} g(x) = f(k)$이므로 $\lim_{x \to k} g(x)$의 값이 존재한다.
또한 $g(k) = 0 + f(k) = f(k)$이므로 $x = k$에서의 함숫값이 정의되어 있다.
그리고 $\lim_{x \to k} g(x) = g(k) = f(k)$이므로 세 가지 조건을 모두 만족시킨다.
따라서 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

20) [정답] ④ (출제자 : 17 김도훈)
[출제의도] 주어진 벡터를 분해하여 내적의 최댓값을 구할 수 있는가?

[해설]
$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}| = 4$이고, 점 M은 선분 AP의 중점이므로
$|\overrightarrow{\mathrm{AM}}| = |\overrightarrow{\mathrm{PM}}| = 2$이고
$|\overrightarrow{\mathrm{AM}} + \overrightarrow{\mathrm{PM}}| = 0$이다. …㉠
이를 통해 $|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2 = 10$을 변형해보자.

먼저 $\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \overrightarrow{\mathrm{AM}} + \overrightarrow{\mathrm{MQ}}$이므로
$$|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{AM}} + \overrightarrow{\mathrm{MQ}}|^2$$
$$= |\overrightarrow{\mathrm{AM}}|^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MQ}} + |\overrightarrow{\mathrm{MQ}}|^2$$
$$= 4 + 2\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MQ}} + |\overrightarrow{\mathrm{MQ}}|^2$$
이고 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{PM}} + \overrightarrow{\mathrm{MQ}}$이므로
$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{PM}} + \overrightarrow{\mathrm{MQ}}|^2$$
$$= |\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{PM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MQ}} + |\overrightarrow{\mathrm{MQ}}|^2$$
$$= 4 + 2\overrightarrow{\mathrm{PM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MQ}} + |\overrightarrow{\mathrm{MQ}}|^2$$
이다.

따라서

$$
\begin{aligned}
|\overrightarrow{AQ}|^2+|\overrightarrow{PQ}|^2 &= 8+2|\overrightarrow{MQ}|^2+2\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{MQ}+2\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{MQ}\\
&=8+2|\overrightarrow{MQ}|^2+2\overrightarrow{MQ}\cdot(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{PM})\\
&=8+2|\overrightarrow{MQ}|^2 \ (\because ㉠)\\
&=10
\end{aligned}
$$

이므로 $|\overrightarrow{MQ}|^2=1$ 에서 $|\overrightarrow{MQ}|=1$ 이다.

삼각형 ABC 는 한 변의 길이가 4 인 정삼각형이므로 $|\overrightarrow{AB}|=4$ 이다.
따라서 $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{MQ}$ 에서 $k=4$ 또는 $k=-4$ 이다.
각각의 경우에서 $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{BQ}$ 의 최댓값을 구해보자.

i) $k=4$ 인 경우

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{BQ} &= (\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AP})\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MQ})\\
&=(\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{AM})\cdot\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\right)\\
&=(\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{AM})\cdot\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}\right)\\
&=\frac{3}{4}\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}\cdot\left(\overrightarrow{CA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BA}\right)+2|\overrightarrow{AM}|^2
\end{aligned}
$$

에서 $|\overrightarrow{AM}|=2$ 이고

$$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AB}|\cos\frac{\pi}{3}=4\times4\times\frac{1}{2}=8$$

이므로

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{BQ} &= \frac{3}{4}\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}\cdot\left(\overrightarrow{CA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BA}\right)+2|\overrightarrow{AM}|^2\\
&=\frac{3}{4}\times8+\overrightarrow{AM}\cdot\left(\overrightarrow{CA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BA}\right)+2\times2^2\\
&=14+\overrightarrow{AM}\cdot\left(\overrightarrow{CA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BA}\right)
\end{aligned}
$$

이다.

$\overrightarrow{AM}\cdot\left(\overrightarrow{CA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BA}\right)$ 의 값이 최대일 때, $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{BQ}$ 의 값이 최대이고
$\overrightarrow{AM}$ 은 크기가 2 이고 방향이 정해지지 않은 벡터이므로
두 벡터 $\overrightarrow{AM}$ 과 $\left(\overrightarrow{CA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BA}\right)$ 의 방향이 같을 때
$\overrightarrow{AM}\cdot\left(\overrightarrow{CA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BA}\right)$ 의 값이 최대이다.

두 벡터 $\overrightarrow{AM}$ 과 $\left(\overrightarrow{CA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BA}\right)$ 의 방향이 같으면 두 벡터가 이루는 각의 크기는 0 (라디안)이므로 이때의 $\overrightarrow{AM}\cdot\left(\overrightarrow{CA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BA}\right)$ 의 값은
두 벡터 $\overrightarrow{AM}$ 과 $\left(\overrightarrow{CA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BA}\right)$ 의 크기의 곱이다.
$|\overrightarrow{AM}|=2$ 임을 알고 있으므로, $\left|\overrightarrow{CA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BA}\right|$ 의 값만 구하면 된다.

$\left|\overrightarrow{CA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BA}\right|^2=|\overrightarrow{CA}|^2+3\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BA}+\frac{9}{4}|\overrightarrow{BA}|^2=76$ 이므로
$\left|\overrightarrow{CA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BA}\right|=\sqrt{76}=2\sqrt{19}$ 이다.
따라서 $\overrightarrow{AM}\cdot\left(\overrightarrow{CA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BA}\right)\le|\overrightarrow{AM}|\left|\overrightarrow{CA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BA}\right|=4\sqrt{19}$
(단, 등호는 두 벡터 $\overrightarrow{AM}$ 과 $\left(\overrightarrow{CA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BA}\right)$ 의 방향이 같을 때 성립)
이므로 $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{BQ}=14+\overrightarrow{AM}\cdot\left(\overrightarrow{CA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BA}\right)\le14+4\sqrt{19}$ 이다.

따라서 $k=4$ 인 경우, $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{BQ}$ 의 최댓값은 $14+4\sqrt{19}$ 이다.

ii) $k=-4$ 인 경우

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{BQ} &= (\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AP})\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MQ})\\
&=(\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{AM})\cdot\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}\right)\\
&=(\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{AM})\cdot\left(\frac{5}{4}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}\right)\\
&=\frac{5}{4}\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}\cdot\left(\overrightarrow{CA}+\frac{5}{2}\overrightarrow{BA}\right)+2|\overrightarrow{AM}|^2
\end{aligned}
$$

에서 $|\overrightarrow{AM}|=2$ 이고 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BA}=8$ 이므로

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{BQ} &= \frac{5}{4}\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}\cdot\left(\overrightarrow{CA}+\frac{5}{2}\overrightarrow{BA}\right)+2|\overrightarrow{AM}|^2\\
&=\frac{5}{4}\times8+\overrightarrow{AM}\cdot\left(\overrightarrow{CA}+\frac{5}{2}\overrightarrow{BA}\right)+2\times2^2\\
&=18+\overrightarrow{AM}\cdot\left(\overrightarrow{CA}+\frac{5}{2}\overrightarrow{BA}\right)
\end{aligned}
$$

이다.

$\overrightarrow{AM}\cdot\left(\overrightarrow{CA}+\frac{5}{2}\overrightarrow{BA}\right)$ 의 값이 최대일 때, $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{BQ}$ 의 값이 최대이고
$\overrightarrow{AM}$ 은 크기가 2 이고 방향이 정해지지 않은 벡터이므로
두 벡터 $\overrightarrow{AM}$ 과 $\left(\overrightarrow{CA}+\frac{5}{2}\overrightarrow{BA}\right)$ 의 방향이 같을 때
$\overrightarrow{AM}\cdot\left(\overrightarrow{CA}+\frac{5}{2}\overrightarrow{BA}\right)$ 의 값이 최대이다.

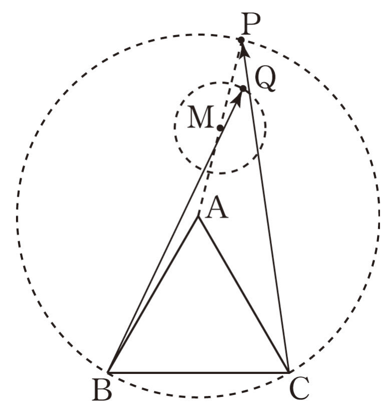
두 벡터 $\overrightarrow{AM}$ 과 $\left(\overrightarrow{CA}+\frac{5}{2}\overrightarrow{BA}\right)$ 의 방향이 같으면 두 벡터가 이루는 각의 크기는 0 (라디안)이므로 이때의 $\overrightarrow{AM}\cdot\left(\overrightarrow{CA}+\frac{5}{2}\overrightarrow{BA}\right)$ 의 값은
두 벡터 $\overrightarrow{AM}$ 과 $\left(\overrightarrow{CA}+\frac{5}{2}\overrightarrow{BA}\right)$ 의 크기의 곱이다.
$|\overrightarrow{AM}|=2$ 임을 알고 있으므로, $\left|\overrightarrow{CA}+\frac{5}{2}\overrightarrow{BA}\right|$ 의 값만 구하면 된다.

$\left|\overrightarrow{CA}+\frac{5}{2}\overrightarrow{BA}\right|^2=|\overrightarrow{CA}|^2+5\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BA}+\frac{25}{4}|\overrightarrow{BA}|^2=156$
이므로 $\left|\overrightarrow{CA}+\frac{5}{2}\overrightarrow{BA}\right|=\sqrt{156}=2\sqrt{39}$ 이다.
따라서 $\overrightarrow{AM}\cdot\left(\overrightarrow{CA}+\frac{5}{2}\overrightarrow{BA}\right)\le|\overrightarrow{AM}|\left|\overrightarrow{CA}+\frac{5}{2}\overrightarrow{BA}\right|=4\sqrt{39}$
(단, 등호는 두 벡터 $\overrightarrow{AM}$ 과 $\left(\overrightarrow{CA}+\frac{5}{2}\overrightarrow{BA}\right)$ 의 방향이 같을 때 성립)
이므로 $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{BQ}=18+\overrightarrow{AM}\cdot\left(\overrightarrow{CA}+\frac{5}{2}\overrightarrow{BA}\right)\le18+4\sqrt{39}$ 이다.

따라서 $k=-4$ 인 경우, $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{BQ}$ 의 최댓값은 $18+4\sqrt{39}$ 이다.

i), ii)를 비교해보면 ii)의 경우에서 $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{BQ}$ 의 최댓값이 더 크므로
구하는 $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{BQ}$ 의 최댓값은 $18+4\sqrt{39}$ 이다.

[보충]
다음은 $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{BQ}$ 의 값이 최대일 때의 상황을 그림으로 나타낸 것이다.



21) [정답] ①　(출제자 : 14 이다운, 17 김정빈)

[출제의도] 주어진 조건을 이용하여 함수의 그래프의 개형을 유추하고, 평균값 정리를 응용하여 복합적인 상황에서의 적분값과 함수의 관계를 추론할 수 있는가?

[해설]

(나) 조건에서 주어진 식을 이용하여 함수 $g(x)$의 그래프의 대략적인 개형을 파악해보자.

함수 $f(x)\cos x$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면
미적분의 기본 정리에 의하여 $F'(x)=f(x)\cos x$이다. …㉠

$g(x)-f(x)=\int_{-x}^{x} f(t)\cos t\,dt - f(0)$을 다시 쓰면

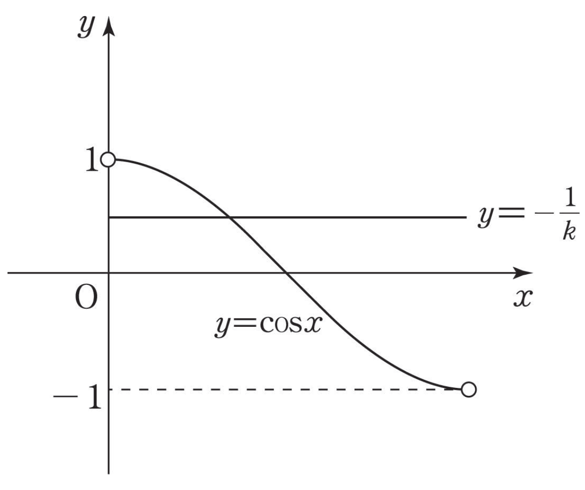
$g(x)-f(x)=F(x)-F(-x)-f(0)$이고, 이 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} g'(x)-f'(x) &= F'(x)+F'(-x) \\ &= f(x)\cos x + f(-x)\cos(-x)\ (\because ㉠) \\ &= f(x)\cos x + f(-x)\cos x\ (\because \cos(-x)=\cos x) \end{aligned}$$

이다. …㉡

이때 $f(x)=2x+k$이므로 $f'(x)=2$이고, $f(-x)=-2x+k$이므로 이를 ㉡에 대입하면 $g'(x)=(2x+k)\cos x+(-2x+k)\cos x+2$에서 $g'(x)=2k\cos x+2=2k\left(\cos x+\frac{1}{k}\right)$임을 알 수 있다.

$k<-1$에서 $-1<\frac{1}{k}<0$이고, 방정식 $\cos x+\frac{1}{k}=0$을 만족시키는 실근은 곡선 $y=\cos x$와 직선 $y=-\frac{1}{k}$의 교점의 x좌표와 같다.
이를 참고하여 곡선 $y=\cos x\ (0<x<\pi)$와 직선 $y=-\frac{1}{k}$을 좌표평면에 나타내면 그림과 같이 교점은 단 하나 존재한다.

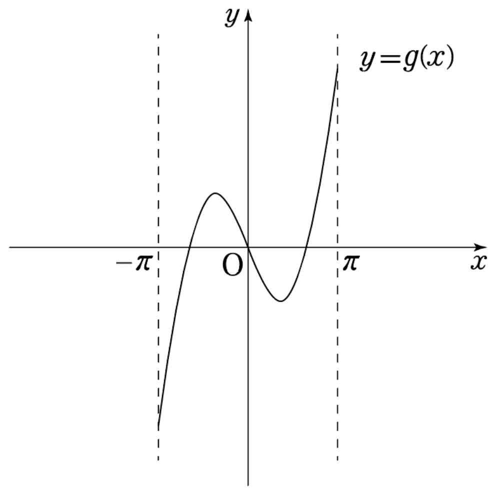


따라서 구간 $(0,\pi)$에서 방정식 $\cos x+\frac{1}{k}=0$을 만족시키는 실근은 단 하나 존재한다.

방정식 $\cos x+\frac{1}{k}=0$을 만족시키는 x의 값의 좌우에서
함수 $g'(x)$의 부호는 음에서 양으로 바뀌므로, 함수 $g(x)$는
구간 $(0,\pi)$에서 한 개의 극솟값을 갖고, (가) 조건에 의하여
구간 $(-\pi,0)$에서 한 개의 극댓값을 갖는다는 것을 알 수 있다.

또한, (가) 조건에서 주어진 식에 $x=0$을 대입하면
$2g(0)=0$에서 $g(0)=0$임을 알 수 있다.

이를 이용하여 다음과 같이 곡선 $y=g(x)$의 개형을 그릴 수 있다.



한편, (가) 조건과 (다) 조건에 의하여
두 구간 $(-\infty,-\pi)$, (π,∞)에서 함수 $g(x)$의 그래프는 직선임을 알 수 있다.

$|c|\neq\pi$인 어떤 실수 c에 대하여 $\frac{g(\beta)-g(\alpha)}{\beta-\alpha}=g'(c)\ (\alpha<c<\beta)$를 만족시키는 두 실수 α, β가 존재하지 않도록 하는 함수 $g(x)$의 그래프를 추론해보자.

먼저, 실수 c가 구간 $(-\infty,-\pi)$에 포함되어 있다고 가정하자.
구간 $(-\infty,c)$에서 직선 $y=g(x)$ 위의 한 점을 잡은 후 그 점의 x좌표를 α라 하고, 구간 $(c,-\pi)$에서 직선 $y=g(x)$ 위의 한 점을 잡은 후 그 점의 x좌표를 β라 하자.

구간 $(-\infty,-\pi)$에서 함수 $g(x)$의 그래프는 직선이므로
$\frac{g(\beta)-g(\alpha)}{\beta-\alpha}=g'(c)\ (\alpha<c<\beta)$가 성립한다.
따라서 두 실수 α, β가 존재하므로, 구간 $(-\infty,-\pi)$에서의 직선 $y=g(x)$의 기울기와 상관없이 이 경우는 문제의 조건을 만족시키지 않는다.

또, 실수 c가 구간 (π,∞)에 포함되어 있다고 가정하자.
구간 (π,c)에서 직선 $y=g(x)$ 위의 한 점을 잡은 후 그 점의 x좌표를 α라 하고, 구간 (c,∞)에서 직선 $y=g(x)$ 위의 한 점을 잡은 후 그 점의 x좌표를 β라 하면
구간 (π,∞)에서 함수 $g(x)$의 그래프는 직선이므로
$\frac{g(\beta)-g(\alpha)}{\beta-\alpha}=g'(c)\ (\alpha<c<\beta)$가 성립한다.
따라서 두 실수 α, β가 존재하므로, 구간 (π,∞)에서의 직선 $y=g(x)$의 기울기와 상관없이 이 경우는 문제의 조건을 만족시키지 않는다.

다음으로, 실수 c가 구간 $(-\pi,\pi)$에 포함되어 있다고 가정하자.

$g(x)+g(-x)=0$이므로 구간 $(0,\pi)$에 있는 실수 c가 문제의 조건을 만족시키지 못함을 증명하면 구간 $(-\pi,0)$에 있는 실수 c 역시 문제의 조건을 만족시키지 못함은 자명하다. 따라서 전자만 증명하자.

구간 $(0,\pi)$에 있는 임의의 실수 c에 대하여 곡선 $y=g(x)$와 점 $(c,g(c))$에서 접하는 직선을 l이라 하자.

구간 $(0, \pi)$에서 $g''(x) = -2k\sin x > 0$이므로 곡선 $y = g(x)$는 구간 $(0, \pi)$에서 아래로 볼록하다. 따라서 직선 l을 y축의 음의 방향으로 평행이동시키면 구간 $(0, \pi)$에서 곡선 $y = g(x)$와 만나지 않으므로 직선 l을 y축의 양의 방향으로 평행이동시키는 것만을 생각한다.

직선 l을 y축의 양의 방향으로 $p\ (p > 0)$만큼 평행이동시킨 직선을 l'이라 하자.

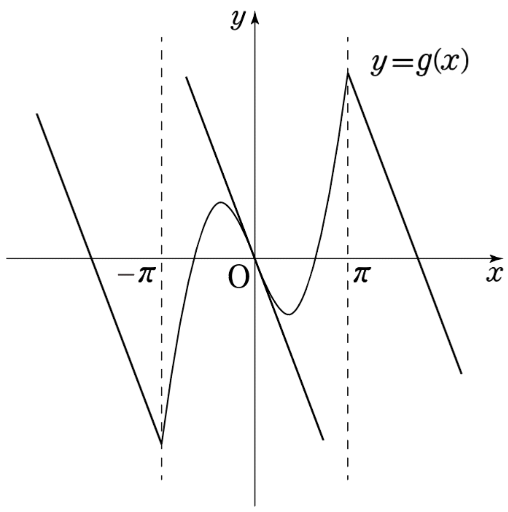
구간 $(0, c)$에서 곡선 $y = g(x)$와 직선 l'이 만나지 않도록 하는 실수 p의 최솟값을 k_1이라 하고, 구간 (c, π)에서 곡선 $y = g(x)$와 직선 l'이 만나지 않도록 하는 실수 p의 최솟값을 k_2라 하자.
k_1과 k_2는 모두 양수이므로, k_1, k_2 중 더 작은 값을 k라 할 때 $k > 0$이다.

따라서 $0 < p < k$일 때 두 구간 $(0, c)$와 (c, π)에서 곡선 $y = g(x)$와 직선 l'이 만나서 교점이 생긴다.
구간 $(0, c)$에서 생기는 교점의 x좌표를 α, 구간 (c, π)에서 생기는 교점의 x좌표를 β라 하면 $\dfrac{g(\beta) - g(\alpha)}{\beta - \alpha} = g'(c)\ (\alpha < c < \beta)$이므로
두 구간 $(-\infty, -\pi)$, (π, ∞)에서의 직선 $y = g(x)$의 기울기와 상관없이 구간 $(0, \pi)$에 있는 실수 c는 문제의 조건을 만족시킬 수 없다.

같은 이유로 두 구간 $(-\infty, -\pi)$, (π, ∞)에서의 직선 $y = g(x)$의 기울기와 상관없이 구간 $(-\pi, 0)$에 있는 실수 c 역시 문제의 조건을 만족시킬 수 없다.

따라서 구간 $(-\pi, \pi)$에 있는 실수 c에 대하여 c가 0이 아닐 때는 두 구간 $(-\infty, -\pi)$, (π, ∞)에서의 직선 $y = g(x)$의 기울기와 상관없이 문제의 조건을 만족시킬 수 없다.

한편, 실수 c가 0인 경우를 보자.

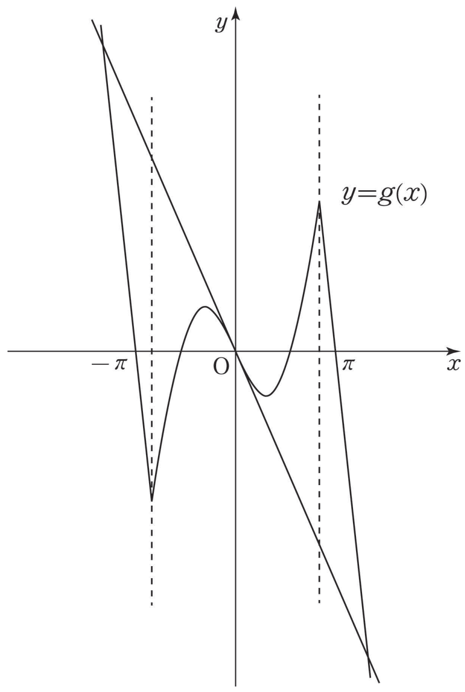


위의 그림과 같이 곡선 $y = g(x)$ 위의 점 $(0, 0)$에서의 접선의 기울기와 두 구간 $(-\infty, -\pi)$, (π, ∞)에서 직선 $y = g(x)$의 기울기가 서로 같을 경우를 살펴보자.

곡선 $y = g(x)$ 위의 점 $(0, 0)$에서의 접선과 같은 기울기를 갖고 함수 $g(x)$의 그래프 위의 한 점을 지나는 직선과 함수 $g(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수가 2 이상이려면 구간 $(-\infty, -\pi)$ 또는 구간 (π, ∞)에서 만나야 한다.

그런데 함수 $g(x)$의 그래프 위의 $\alpha < 0 < \beta$인 어떤 두 점 $\mathrm{A}(\alpha, g(\alpha))$, $\mathrm{B}(\beta, g(\beta))$를 잡아도 직선 AB의 기울기와 원점에서의 접선의 기울기가 같을 수 없으므로 $\dfrac{g(\beta) - g(\alpha)}{\beta - \alpha} = g'(0)\ (\alpha < 0 < \beta)$를 만족시키는 α와 β가 존재하지 않는다.

위와 같은 방식으로 생각하면 곡선 $y = g(x)$ 위의 점 $(0, 0)$에서의 접선의 기울기보다 구간 $(-\infty, -\pi)$와 구간 (π, ∞)에서 직선 $y = g(x)$의 기울기가 큰 경우에도 $\dfrac{g(\beta) - g(\alpha)}{\beta - \alpha} = g'(0)\ (\alpha < 0 < \beta)$를 만족시키는 α와 β가 존재하지 않음을 알 수 있다.



위의 그림과 같이 곡선 $y = g(x)$ 위의 점 $(0, 0)$에서의 접선의 기울기보다 두 구간 $(-\infty, -\pi)$, (π, ∞)에서 직선 $y = g(x)$의 기울기가 작은 경우를 살펴보자.

곡선 $y = g(x)$ 위의 점 $(0, 0)$에서의 접선과 함수 $g(x)$의 그래프가 만나는 점 중 원점이 아닌 점이 2개 존재하고, 두 점을 각각 $\mathrm{A}(\alpha, g(\alpha))$, $\mathrm{B}(\beta, g(\beta))$라 할 때 $\dfrac{g(\beta) - g(\alpha)}{\beta - \alpha} = g'(c)\ (\alpha < c < \beta)$가 성립하므로 문제의 조건을 만족시키지 못한다.

따라서 구간 $(-\infty, -\pi)$와 구간 (π, ∞)에서 직선 $y = g(x)$의 기울기가 곡선 $y = g(x)$ 위의 점 $(0, 0)$에서의 접선의 기울기보다 크거나 같을 경우 문제의 조건을 만족시킨다는 것을 알 수 있다.

즉, $g'(0) = 2k\sin 0 + 2 = 2k + 2 \le a$이므로
a의 최솟값은 $h(k) = 2k + 2$이다.
따라서 $h(b) = 2b + 2 = -10$이므로 $b = -6$이다.

22) [정답] 56 (출제자 : 17 김정빈)
[출제의도] 간단한 조합의 계산을 할 수 있는가?

[해설]
$${}_8\mathrm{C}_3 = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56$$

23) [정답] 1　(출제자 : 17 석진우)

[출제의도] 합성함수의 미분계수를 구할 수 있는가?

[해설]

$f(x)=\sqrt{3x^2+2x+1}$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$f'(x)=\dfrac{6x+2}{2\sqrt{3x^2+2x+1}}=\dfrac{3x+1}{\sqrt{3x^2+2x+1}}$ 이므로

$f'(0)=\dfrac{1}{\sqrt{1}}=1$ 이다.

24) [정답] 2　(출제자 : 18 안동우)

[출제의도] 음함수의 미분법을 통해 접선의 기울기를 구할 수 있는가?

[해설]

$5x^3-2xy+y^2-2y=0$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$15x^2-2y-2x\dfrac{dy}{dx}+2y\dfrac{dy}{dx}-2\dfrac{dy}{dx}=0$ 이므로

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{15x^2-2y}{2x-2y+2}$ $(2x-2y+2\neq 0)$ 이다.

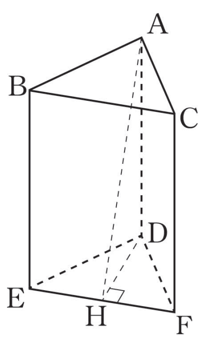
따라서 곡선 위의 점 $(0,\,2)$ 에서의 접선의 기울기는

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{15\times 0-2\times 2}{2\times 0-2\times 2+2}=2$ 이다.

25) [정답] 9　(출제자 : 18 안동우)

[출제의도] 삼수선의 정리를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]



그림과 같이 점 D 에서 선분 EF 에 내린 수선의 발을 H 라 하자.

직선 AD 와 평면 DEF 는 서로 수직이고
직선 DH 와 직선 EF 는 서로 수직이므로
삼수선의 정리에 의하여 직선 AH 와 직선 EF 는 서로 수직이다. …㉠

삼각형 DEF 는 한 변의 길이가 6 인 정삼각형이므로
$\overline{\mathrm{DH}}=3\sqrt{3}$ 이다.
따라서 삼각형 DEF 의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{DH}}\times\overline{\mathrm{EF}}=9\sqrt{3}$ 이다.

㉠에 의하여 삼각형 AEF 의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AH}}\times\overline{\mathrm{EF}}=\overline{\mathrm{AH}}\times 3$ 이고
삼각형 AEF 의 넓이는 삼각형 DEF 의 넓이의 2 배이므로
$2\times 9\sqrt{3}=3\times\overline{\mathrm{AH}}$ 이다.
그러므로 $\overline{\mathrm{AH}}=6\sqrt{3}$ 임을 알 수 있다.

삼각형 ADH 는 빗변이 선분 AH 인 직각삼각형이므로
$\overline{\mathrm{AD}}^2=\overline{\mathrm{AH}}^2-\overline{\mathrm{DH}}^2=108-27=81$ 이고
선분 AD 의 길이는 삼각기둥 ABC－DEF 의 높이이므로
이 삼각기둥의 높이는 $\overline{\mathrm{AD}}=9$ 이다.

26) [정답] 18　(출제자 : 16 김민지)

[출제의도] 통계적 추정을 잘 활용할 수 있는가?

[해설]

모평균 m 에 대한 신뢰도 $95\,\%$ 의 신뢰구간이

$$\overline{x}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{64}}\le m\le\overline{x}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{64}}$$

이므로

$$\overline{x}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{64}}=3.52\quad\cdots㉠$$

과

$$\overline{x}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{64}}=5.48\quad\cdots㉡$$

을 구할 수 있다.

㉠의 좌변과 ㉡의 좌변을 더하고, ㉠의 우변과 ㉡의 우변을 더하면
$2\overline{x}=9$ 에서 $\overline{x}=4.5$ 임을 알 수 있다.

또한 ㉡의 좌변에서 ㉠의 좌변을 빼고, ㉡의 우변에서 ㉠의 우변을 빼면
$2\times 1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{64}}=1.96$ 이므로
$2\times\dfrac{\sigma}{8}=1$ 에서 $\sigma=4$ 임을 알 수 있다.

따라서 구하는 값은 $\overline{x}\times\sigma=4.5\times 4=18$ 이다.

27) [정답] 175　(출제자 : 18 김동현)

[출제의도] 타원과 쌍곡선의 성질, 삼각형의 닮음을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]

두 점 $\mathrm{F}(3,\,0)$, $\mathrm{F}'(-3,\,0)$ 에 대하여 $\overline{\mathrm{PF}'}=\overline{\mathrm{FF}'}$ 이므로
$\overline{\mathrm{PF}'}=\overline{\mathrm{FF}'}=6$ 이고, 타원의 정의에 의하여
$\overline{\mathrm{PF}}=10-\overline{\mathrm{PF}'}=4$ 이다.

두 점 $\mathrm{A}(5,\,0)$, $\mathrm{A}'(-5,\,0)$ 에 대하여 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의
점 Q 를 선분 PF$'$ 과 선분 QA$'$ 이 서로 평행이 되도록 제1 사분면에서
잡으면 $\angle\mathrm{QA'A}=\angle\mathrm{PF'F}$ ($\because$ 동위각)이다. …㉠

점 Q 는 제1 사분면에 있으므로, 선분 AQ 의 길이와 선분 QA$'$ 의 길이는
같을 수 없다. 따라서 삼각형 QAA$'$ 은 $\overline{\mathrm{QA}'}=\overline{\mathrm{AA}'}$ 인 이등변삼각형
또는 $\overline{\mathrm{AQ}}=\overline{\mathrm{AA}'}$ 인 이등변삼각형이다.

만약 $\overline{\mathrm{AQ}}=\overline{\mathrm{AA}'}=10$ 인 경우 $\angle\mathrm{QAA}'$ 은 둔각이다. …(*)
그러나 삼각형 QAA$'$ 은 세 내각이 모두 예각인 이등변삼각형이므로
삼각형 QAA$'$ 은 $\overline{\mathrm{QA}'}=\overline{\mathrm{AA}'}=10$ 인 이등변삼각형이다.

$\angle A'AQ = \angle A'QA = \frac{1}{2}(\pi - \angle QA'A)$ 이고

$\angle F'FP = \angle F'PF = \frac{1}{2}(\pi - \angle PF'F)$ 이다.

㉠에 의하여 $\angle QA'A = \angle PF'F$ 이므로, 삼각형 PFF′ 과
삼각형 QAA′ 은 AA 닮음이다.

$\overline{FF'} : \overline{AA'} = 6 : 10 = 3 : 5$ 이므로 삼각형 PFF′ 과 삼각형 QAA′ 의 닮음비는 $3 : 5$ 이다. 따라서 $\overline{QA'} = \overline{PF'} \times \frac{5}{3} = 10$ 이다.

쌍곡선의 정의에 의하여
$\overline{QA'} - \overline{AQ} = 10 - \frac{20}{3} = \frac{10}{3} = 2a\ (a > 0)$ 이므로 $a = \frac{5}{3}$ 이다.

쌍곡선의 두 초점이 A, A′ 이므로
$a^2 + b^2 = 25$ 에서 $a^2 = \frac{25}{9}$, $b^2 = \frac{200}{9}$ 이다.
따라서 $9(b^2 - a^2) = 9\left(\frac{200}{9} - \frac{25}{9}\right) = 175$ 이다.

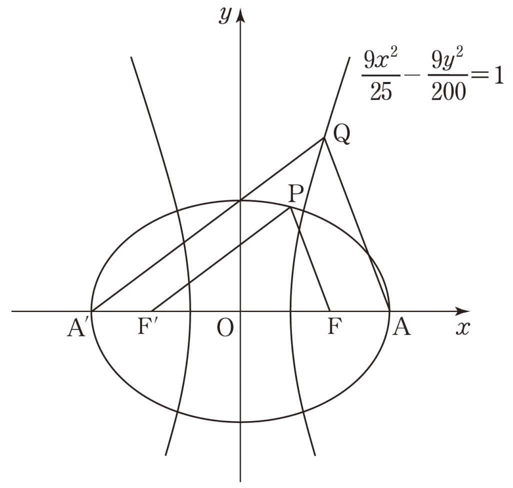
(*) 만약 $\overline{AQ} = \overline{AA'} = 10$ 이라면, 쌍곡선의 정의에 의하여
$\overline{QA'} - \overline{AQ} = 2a\ (a > 0)$ 이므로 $\overline{QA'} = 10 + 2a$ 이다.

삼각형 PFF′ 은 $\overline{PF'} = \overline{FF'}$ 인 이등변삼각형이므로
점 F′ 에서 선분 PF 에 내린 수선의 발을 H 라 하면 이등변삼각형의 성질에 의하여 $\overline{PH} = \overline{HF} = 2$ 이다.
두 삼각형 F′HP 와 삼각형 F′HF 는 직각삼각형이고, 변 F′H 를 공유하며 $\angle F'PH = \angle F'FH$ 이므로 RHA 합동이다.
따라서 $\angle FF'H = \theta\ \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ 라 하면 $\angle PF'F = 2\theta$ 이다.
이때 $\sin\theta = \frac{\overline{FH}}{\overline{FF'}} = \frac{1}{3}$ 이므로 $\cos\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ 이고
$\cos(\angle PF'F) = \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = \frac{8}{9} - \frac{1}{9} = \frac{7}{9}$ 이다.

$\cos(\angle PF'F) = \frac{7}{9}$ 이고, $\angle PF'F = \angle QA'A$ 이므로
$\cos(\angle QA'A) = \frac{7}{9}$ 이다.
점 A 에서 선분 QA′ 에 내린 수선의 발을 H′ 이라 하면 삼각형 QAA′ 은 $\overline{AQ} = \overline{AA'}$ 인 이등변삼각형이므로 $\overline{A'H'} = \frac{1}{2}\overline{QA'} = 5 + a$ 이다.

즉, $\frac{5+a}{10} = \frac{7}{9}$ 이므로 $a = \frac{25}{9}$ 이다.
따라서 $\overline{QA'} = 10 + 2a = \frac{140}{9}$ 이고
$\overline{QA'}^2 = \frac{19600}{81} > 241 > \overline{AQ}^2 + \overline{AA'}^2 = 100 + 100 = 200$ 이므로
$\overline{AQ} = \overline{AA'} = 10$ 일 때, $\angle QAA'$ 는 둔각이다.

[보충]
문제의 조건을 만족시키는 상황을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



28) [정답] 12 (출제자 : 17 문혁준)
[출제의도] 특수한 경우를 이해하고 그 확률을 계산할 수 있는가?

[해설]
맨 처음 상태에서 A 와 B 의 점수를 합하면 16 점이다.

A 와 B 의 점수의 합의 변화를 기준으로 볼 때, 한 번 게임을 하면 다음의 3 가지 경우가 가능하다.

(1) 진 사람의 점수가 4 점 이상일 경우
이긴 사람은 2 점을 얻고, 진 사람은 4 점을 잃으므로 A 와 B 의 점수의 합은 2 점 낮아진다.

(2) 진 사람의 점수가 2 점일 경우
이긴 사람은 2 점을 얻고 진 사람은 2 점을 잃으므로 A 와 B 의 점수의 합은 그대로이다.

(3) 진 사람의 점수가 0 점일 경우
이긴 사람은 2 점을 얻고 진 사람의 점수에는 변화가 없다.
따라서 A 와 B 의 점수의 합은 2 점 높아진다.

(1) 의 경우를 ‘-2’, (2) 의 경우를 ‘0’, (3) 의 경우를 ‘$+2$’라 하자.
게임을 4 번 한 결과 두 사람의 점수의 합이 16 점에서 10 점이 되었으므로 6 점이 감소했다.
만약 $+2$ 가 단 한 번이라도 있었다면, 남은 3 번 안에 8 점을 감소시켜야 하는데 이는 불가능하다.
따라서 주어진 상황에서 $+2$ 의 경우는 일어나지 않는다.
이제 -2 와 0 을 이용해 두 사람의 점수의 합을 6 점 감소시키면 된다.
이것이 가능한 경우는 -2 가 3 번, 0 이 1 번 있는 경우이다.

‘0’이 1 번 있어야 하므로 2 점일 때 패배하는 순간이 1 번 있어야 한다.
따라서 최대 3 번의 게임을 거친 후 A 와 B 둘 중 한 명은 2 점이 되어야 하는데, 시작할 때 A 와 B 둘 다 8 점으로 시작하므로 게임을 1 번 또는 2 번 해서는 2 점을 만들 수 없다.
세 번째 게임이 끝났을 때, 순서에 상관없이 1 승 2 패를 하면 2 점이 되고 마지막 4 번째 게임에서 2 점인 사람이 지면 조건을 충족시키게 된다.

A 가 2 점이 되는 경우로 생각해 확률을 계산하자.
3 번 게임을 한 결과 A 가 1 승 2 패가 될 확률은
${}_3C_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}$ 이고, 마지막 게임에서 A 가 질 확률은 $\frac{1}{2}$ 이므로
이때의 확률은 $\frac{3}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{16}$ 이다.

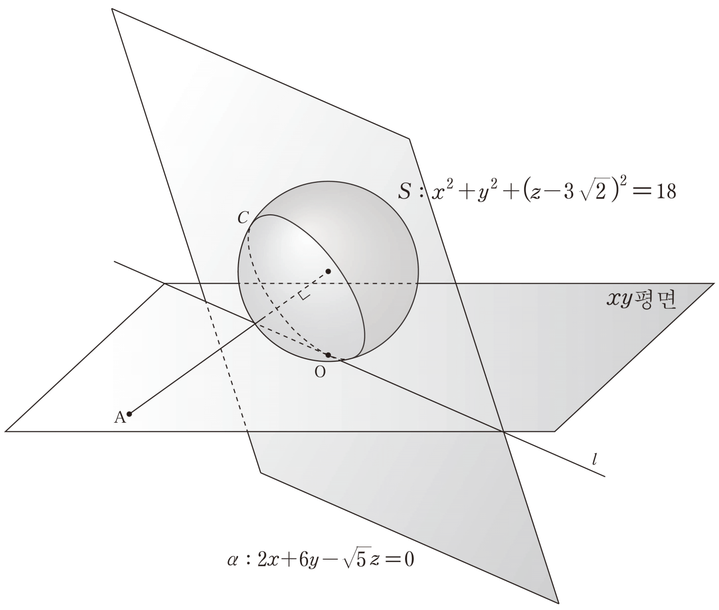
A 가 2 점이 되는 경우도 있지만 B 가 2 점이 되는 경우도 있으므로
$k = \frac{3}{16} \times 2 = \frac{3}{8}$ 이다.

따라서 $32k$ 의 값은 $32 \times \frac{3}{8} = 12$ 이다.

29) [정답] 42 (출제자 : 18 김종해)

[출제의도] 공간상에서 도형의 관계를 살피고 벡터의 내적을 계산할 수 있는가?

[해설]



평면 α 와 구 S 의 관계를 알아보자. 구의 중심 $(0, 0, 3\sqrt{2})$ 에서 평면 α 까지의 거리 d 를 구하면 $d = \frac{|-3\sqrt{10}|}{\sqrt{2^2+6^2+(-\sqrt{5})^2}} = \sqrt{2}$ 이고
구의 반지름의 길이는 $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ 이므로 원 C 의 반지름의 길이는 4 이다. 또한, 평면 α 는 원점을 지나므로 원 C 는 직선 l 과 원점에서 접한다.

문제에서 구하고자 하는 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AQ}$ 의 값을 살펴보자. 원 C 의 중심을 M 이라 하면, $\overrightarrow{AM}$ 은 평면 α 와 서로 수직이므로 평면 α 의 법선벡터를 $\vec{n}$ 이라 하면 $\overrightarrow{AM}$ 은 $\vec{n}$ 과 서로 평행하다.
이때 $\overrightarrow{OP}$ 와 $\vec{n}$ 은 서로 수직이므로, $\overrightarrow{OP}$ 와 $\overrightarrow{AM}$ 도 서로 수직이다.
따라서 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{OP} \cdot (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MQ}) = \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{MQ}$ 이다.

점 P 는 원 C 위를 움직이는 점이므로, 벡터의 내적 계산을 쉽게 하기 위하여 원 C 의 중심 M 을 이용하여 $\overrightarrow{OP}$ 를 $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP}$ 로 분해해보자.

$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{MQ} = (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP}) \cdot \overrightarrow{MQ}$ 에서 점 Q 의 위치에 관계없이
$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{MQ} = -|\overrightarrow{MO}|^2 = -16$ 이므로
$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} - 16$ 이다.

$|\overrightarrow{PQ}| = 6$ 에서 $\overrightarrow{PQ}$ 를 $\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MQ}$ 로 분해하여 생각해보자.

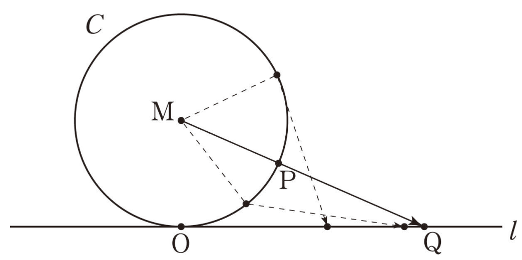
$$
\begin{aligned}
|\overrightarrow{PQ}|^2 &= |\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MQ}|^2 \\
&= |\overrightarrow{PM}|^2 + 2\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{MQ} + |\overrightarrow{MQ}|^2 \\
&= |\overrightarrow{PM}|^2 - 2\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} + |\overrightarrow{MQ}|^2 \\
&= 36
\end{aligned}
$$

이고 $|\overrightarrow{PM}| = 4$ 이므로 $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} = \frac{|\overrightarrow{MQ}|^2}{2} - 10$ 이다.
즉, $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AQ}$ 의 값은 $\overrightarrow{MQ}$ 의 크기에 따라 결정된다.

i) $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AQ}$ 의 값이 최대인 경우
$\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PQ}$ 이다. $\overrightarrow{MP}$ 의 크기는 4 이고 $\overrightarrow{PQ}$ 의 크기는 6 이라 하였으므로, 두 벡터 $\overrightarrow{MP}$ 와 $\overrightarrow{PQ}$ 가 이루는 각의 크기에 따라 $\overrightarrow{MQ}$ 의 크기가 결정된다.

두 벡터 $\overrightarrow{MP}$ 와 $\overrightarrow{PQ}$ 가 이루는 각의 크기가 0 (라디안)일 때, 즉
$|\overrightarrow{MQ}| = |\overrightarrow{MP}| + |\overrightarrow{PQ}| = 10$ 일 때 $\overrightarrow{MQ}$ 의 크기가 최대이고
이때 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AQ}$ 의 값도 최대이다.

$\overrightarrow{MQ}$ 의 크기가 최대인 상황을 그림으로 나타내면 다음과 같다.

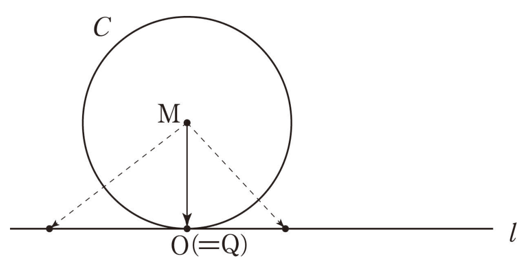


따라서 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AQ}$ 의 최댓값은

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AQ} &= \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{MQ} \\
&= \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} - 16 \\
&= \left(\frac{|\overrightarrow{MQ}|^2}{2} - 10\right) - 16 \\
&= \frac{10^2}{2} - 26 \\
&= 24
\end{aligned}
$$

이다.

ii) $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AQ}$ 의 값이 최소인 경우
점 M 은 고정된 점이고, 점 Q 는 직선 l 위를 움직이는 점이므로
$|\overrightarrow{MQ}|$ 의 값이 최소가 될 때는 점 Q 가 원점 O 에 있을 때이다.
따라서 $|\overrightarrow{MQ}| = |\overrightarrow{MO}| = 4$ 일 때 $\overrightarrow{MQ}$ 의 크기가 최소이고
이때 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AQ}$ 의 값도 최소이다.
$\overrightarrow{MQ}$ 의 크기가 최소인 상황을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AQ}$ 의 최솟값은

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AQ}&=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{MQ}\\&=\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}-16\\&=\left(\frac{|\overrightarrow{MQ}|^2}{2}-10\right)-16\\&=\left(\frac{4^2}{2}-10\right)-16\\&=-18\end{aligned}$$

이다.

ⅰ), ⅱ)에 의하여 $M=24$, $m=-18$ 이므로 $M-m=42$ 이다.

30) [정답] 39 (출제자 : 17 김정빈)

[출제의도] 함수의 미분가능성을 파악하고, 이를 함수의 그래프의 개형을 유추하는 데에 적용시킬 수 있는가?

[해설]

ⅰ) (가) 조건 해석

함수 $g(x)=\left|\ln\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)\right|$ 가 구간 $(0,\infty)$ 에서 미분가능하기 위해서는 다음 두 가지를 만족시켜야 한다.

① $x>0$ 에서 $\int_0^x f(t)\,dt>0$

② $\ln\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)=0$ 일 때 $g'(x)=0$

②를 다시 쓰면, $\int_0^x f(t)\,dt=1$ 일 때 $\dfrac{f(x)}{\int_0^x f(t)\,dt}=0$, 즉 $f(x)=0$ 이다.

$g(3)=0$ 이므로, $\int_0^3 f(t)\,dt=1$ 이다. 따라서 $f(3)=0$ 이다.

함수 $f(x)$ 는 0 이상의 정수 n 에 대하여 구간 $(n,\,n+1)$ 에서 일차함수이다. 따라서 세 점 $(1,\,f(1))$, $(2,\,f(2))$, $(3,\,f(3))$ 을 이 순서대로 선분으로 연결한 것과 같다.

$\int_0^3 f(t)\,dt=1$ 이고 $\int_0^1 f(t)\,dt=\int_0^1 t\,dt=\dfrac{1}{2}$ 이므로

$\int_1^3 f(t)\,dt=\dfrac{1}{2}$ 이다.

$f(1)=1$, $f(3)=0$ 임을 이용하면

$1\le x<2$ 에서 $f(x)=a_1(x-1)+1$ 이고

$2\le x<3$ 에서 $f(x)=a_2(x-3)$ 라 할 수 있고, 함수 $f(x)$ 는 구간 $(0,\infty)$ 에서 연속이므로 $\lim\limits_{x\to2-}f(x)=f(2)$ 에서

$a_1+1=-a_2$ 이다. 다시 정리하면

$1\le x<2$ 에서 $f(x)=a_1(x-1)+1$, $2\le x<3$ 에서

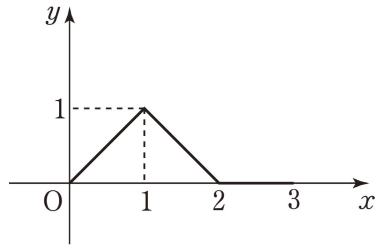
$f(x)=-(a_1+1)(x-3)$ 이다.

$$\begin{aligned}\int_1^3 f(t)\,dt&=\int_1^2\{a_1(t-1)+1\}\,dt-\int_2^3(a_1+1)(t-3)\,dt\\&=\left[\frac{1}{2}a_1t^2+(1-a_1)t\right]_1^2-\left[\frac{a_1+1}{2}t^2-3(a_1+1)t\right]_2^3\\&=\left(\frac{1}{2}a_1+1\right)-\left(-\frac{1}{2}a_1-\frac{1}{2}\right)=a_1+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

이므로 $a_1=-1$ 이다. $\cdots(*)$

따라서 $1\le x<2$ 에서 $f(x)=-x+2$, $2\le x<3$ 에서 $f(x)=0$ 임을 알 수 있다.

(가) 조건에서 알아낸 함수 $f(x)$ 의 그래프를 그리면 다음과 같다.



ⅱ) (나) 조건 해석

임의의 양의 실수 x_1, x_2 $(x_1<x_2)$ 에 대하여 $\dfrac{h(x_2)-h(x_1)}{x_2-x_1}\le0$ 이다.

$x_2=x_1+c$ $(c>0)$ 라 하면 $\dfrac{h(x_1+c)-h(x_1)}{c}\le0$ 이다.

따라서 함수의 극한의 성질에 의하여

$\lim\limits_{c\to0+}\dfrac{h(x_1+c)-h(x_1)}{c}=h'(x_1)\le0$ 이다. $\cdots(**)$

따라서 임의의 양의 실수 x 에 대하여 $h'(x)\le0$ 임을 알 수 있다.

$h(x)=\int_0^1 g(x+t)\,dt=\int_x^{x+1}g(t)\,dt$ 이므로

$h'(x)=g(x+1)-g(x)$ 이다. $\cdots(***)$

$h'(x)\le0$ 이므로 $g(x+1)-g(x)\le0$, 즉 $g(x+1)\le g(x)$ 이다.

한편, $x\le3$ 에서 $\int_0^x f(t)\,dt\le1$ 이므로 $\ln\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)\le0$ 이고

이때 $g(x)=-\ln\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)$ 이다.

한편 $\int_0^2 f(t)\,dt=1$ 이므로 $g(2)=0$ 이다.

또한 $2\le x<3$ 에서 $f(x)=0$ 이므로

$g(x)=\left|\ln\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)\right|=\left|\ln\left(1+\int_2^x f(t)\,dt\right)\right|=|\ln1|=0$ 이다.

따라서 $2\le x<3$ 에서 $g(x)=0$ 이고, $g(x+1)\le g(x)$ 를 이용하면

$3\le x<4$ 에서 $g(x)=0$, $4\le x<5$ 에서 $g(x)=0$, $\cdots$ 이므로

$n\le x<n+1$ 에서 $g(x)=0$ (단, n 은 2 이상의 자연수)

임을 알 수 있다. 따라서 $g(x)=0$ $(x\ge3)$ 이다.

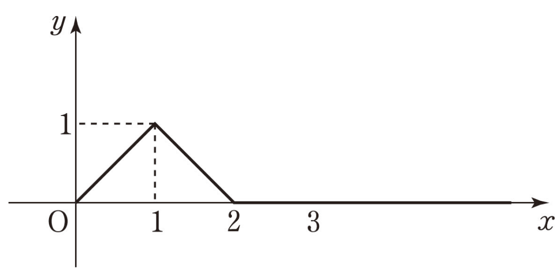
이를 정리하면, $x\ge3$ 에서

$\left|\ln\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)\right|=\left|\ln\left(1+\int_2^x f(t)\,dt\right)\right|=0$

이므로 $x\ge3$ 에서 $\int_2^x f(t)\,dt=0$ 이다. $\int_2^3 f(t)\,dt=0$ 이므로

$x\ge3$ 에서 $\int_3^x f(t)\,dt=0$ 이다. 따라서 $f(x)=0$ $(x\ge3)$ 이다.

(가) 조건과 (나) 조건에서 알아낸 함수 $f(x)$ 의 그래프를 그리면 다음과 같다.



iii) 계산

$\sum_{k=1}^{10} g'\left(k-\frac{1}{2}\right) = g'\left(\frac{1}{2}\right) + g'\left(\frac{3}{2}\right) + \cdots + g'\left(\frac{19}{2}\right)$ 이고,

$g(x)=0\ (x \geq 3)$이므로 $g'\left(\frac{5}{2}\right) = g'\left(\frac{7}{2}\right) = \cdots = g'\left(\frac{19}{2}\right) = 0$ 이다.

$$g'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{f\left(\frac{1}{2}\right)}{\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\,dt} = -\frac{\frac{1}{2}}{\int_0^{\frac{1}{2}} t\,dt} = -4$$

$$g'\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{f\left(\frac{3}{2}\right)}{\int_0^{\frac{3}{2}} f(t)\,dt} = -\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\int_1^{\frac{3}{2}}(-t+2)\,dt}$$

$$= -\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{3}{8}} = -\frac{4}{7}$$

이므로, $\sum_{k=1}^{10} g'\left(k-\frac{1}{2}\right) = -4-\frac{4}{7}+0+\cdots+0 = -\frac{32}{7}$ 이다.

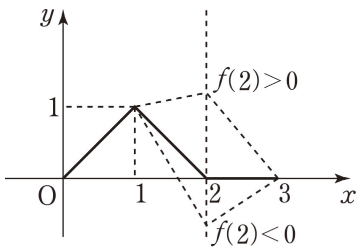
따라서 $p=7$, $q=32$ 이므로 $p+q=39$ 이다.

[참고]

(*) 별해

$f(2)=0$ 일 때 $\int_1^3 f(t)\,dt = \frac{1}{2}$, $f(2)>0$ 일 때 $\int_1^3 f(t)\,dt > \frac{1}{2}$ 이고

$f(2)<0$ 일 때 $\int_1^3 f(t)\,dt < \frac{1}{2}$ 이므로 $f(2)=0$ 일 때 주어진 식이 성립함을 알 수 있다.



(**) 함수의 극한의 성질 (① 참고)

일반적으로 함수의 극한에 대하여 다음과 같은 대소 관계가 성립한다.

○ 함수의 극한의 대소 관계는 $x\to\infty$, $x\to-\infty$일 때도 성립한다.

함수의 극한의 대소 관계

$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a} g(x)=\beta$ (α, β는 실수)일 때, a에 가까운 모든 실수 x에 대하여

① $f(x)\leq g(x)$이면 $\alpha\leq\beta$이다.

② $f(x)\leq h(x)\leq g(x)$이고 $\alpha=\beta$이면 $\lim_{x\to a} h(x)=\alpha$이다.

(출처 : 이강섭 외 14인, 미래엔, 2009 개정 교육과정 미적분I 63p)

$\frac{h(x_1+c)-h(x_1)}{c} \leq 0$ 에서 $\lim_{c\to 0+} \frac{h(x_1+c)-h(x_1)}{c} = h'(x_1)$ 이고

$\lim_{c\to 0+} 0 = 0$ 이다.

함수의 극한의 대소 관계에 의하여 $\frac{h(x_1+c)-h(x_1)}{c} \leq 0$ 이면

$\lim_{c\to 0+} \frac{h(x_1+c)-h(x_1)}{c} = h'(x_1) \leq 0$ 이 성립한다.

(***) 함수 $h(x)$가 구간 $(0, \infty)$에서 미분가능한 이유

함수 $g(x)$는 (가) 조건에 의해 구간 $(0, \infty)$에서 미분가능하다.

따라서 함수 $g(x)$는 구간 $(0, \infty)$에서 연속이다.

연속인 함수를 정적분으로 정의한 함수는 미분가능하다.

$$h(x) = \int_0^1 g(x+t)\,dt = \int_x^{x+1} g(t)\,dt = \int_c^{x+1} g(t)\,dt - \int_c^x g(t)\,dt$$

이고, 두 함수 $\int_c^{x+1} g(t)\,dt$, $\int_c^x g(t)\,dt$ 는 구간 $(0, \infty)$에서 미분가능하므로 함수 $h(x)$도 구간 $(0, \infty)$에서 미분가능하다.

(단, c는 0보다 큰 상수)

적분과 미분의 관계

함수 $f(t)$가 구간 $[a, b]$에서 연속일 때,

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)\ (\text{단, } a<x<b)$$

(출처 : 이강섭 외 14인, 미래엔, 2009 개정 교육과정 미적분I 166p)