제 2 교시

수학 영역(가 형)

5지선다형

1. 두 벡터 $\vec{a}=(0,\ 8)$, $\vec{b}=(2,\ 5)$에 대하여 벡터 $\vec{a}-\vec{b}$의 모든 성분의 합은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\vec{a}-\vec{b}=(0-2,\ 8-5)$
$=(-2,\ 3)$ 이므로

모든 성분의 합은 $-2+3=1$ 이다.

2. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{2x}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{3x}\times\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$

3. 좌표공간의 두 점 $\mathrm{A}(a,\ -1,\ 2)$, $\mathrm{B}(4,\ 0,\ b)$에 대하여 선분 AB를 $3:2$로 외분하는 점의 좌표가 $(6,\ 2,\ -4)$이다. $a+b$의 값은? [2점]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

$\left(\frac{12-2a}{3-2},\ \frac{0+2}{3-2},\ \frac{3b-4}{3-2}\right)$

$=(12-2a,\ 2,\ 3b-4)$

$=(6,\ 2,\ -4)$ 이므로

$a=3,\ b=0 \Rightarrow a+b=3$

4. 두 사건 A와 B는 서로 독립이고

$\mathrm{P}(A|B)=\frac{1}{4},\quad \mathrm{P}(A\cup B)=\frac{3}{4}$

일 때, $\mathrm{P}(B)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

$P(A|B)=P(A)=\frac{1}{4}$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$

$=\frac{1}{4}+P(B)-\frac{P(B)}{4}$

$=\frac{3}{4}P(B)+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ 이므로

$P(B)=\frac{2}{3}$ 이다.

5. $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{4}$ 일 때, $\sin\alpha\cos\alpha$ 의 값은? [3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{12}$ ④ $\frac{1}{16}$ ⑤ $\frac{1}{20}$

$\sin(\alpha+\frac{\pi}{4}) = \sin\alpha\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha$

$= \frac{3}{4}$

$\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{3}{4}\sqrt{2}$ 이므로

$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha$

$= 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha$

$= \frac{9}{8}$

$1+2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{9}{8}$

$\therefore \sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{16}$

6. $0 \le x < 2\pi$ 일 때, 방정식

$$\sin x\cos x + \cos^2 x = 1$$

의 모든 해의 합은? [3점]

① $\frac{\pi}{2}$ ② π ③ $\frac{3}{2}\pi$ 2π ⑤ $\frac{5}{2}\pi$

$\sin x\cos x + (\cos^2 x - 1) = 0$

$\sin x\cos x - \sin^2 x = 0$

$\sin x(\cos x - \sin x) = 0$

따라서 $\sin x = 0$ 또는 $\sin x = \cos x$

i) $\sin x = 0$ 일 때,

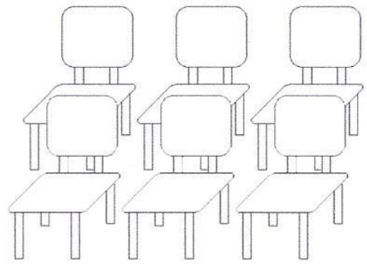
$x = 0, \pi$

ii) $\sin x = \cos x$ 일 때,

$x = \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi$

따라서 모든 해의 합은 $0+\pi+\frac{\pi}{4}+\frac{5}{4}\pi = \frac{5}{2}\pi$

7. 그림과 같이 놓인 6개의 의자에 토끼 인형 3개, 곰 인형 2개, 펭귄 인형 1개를 배치하려 한다. 한 개의 의자에 한 개의 인형만을 배치할 때, 모든 인형을 배치하는 경우의 수는? (단, 같은 종류의 인형끼리는 구분하지 않는다.) [3점]



① 60 ② 75 ③ 90 ④ 105 ⑤ 120

다음 경우의 수는 인형을 일렬로 줄세우는 경우의 수와 같다.

따라서 같은 것이 있는 순열로 계산하면,

토끼 인형이 3개, 곰 인형이 2개, 펭귄 인형이 1개

있으므로 $\frac{6!}{3!\,2!\,1!} = 60$ 이다.

8. $\int_1^{e^2} \frac{(\ln x+1)^2}{x} dx$ 의 값은? [3점]

① $\frac{22}{3}$ ② $\frac{23}{3}$ ③ 8 ④ $\frac{25}{3}$ ⑤ $\frac{26}{3}$

$\ln x + 1 = t$ 로 치환하면 $\frac{1}{x}dx = dt$ 이므로

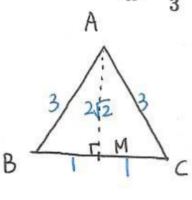
$$\int_1^{e^2} \frac{(\ln x+1)^2}{x} dx = \int_1^3 t^2 dt$$

$$= \left[\frac{t^3}{3}\right]_1^3$$

$$= \frac{27-1}{3} = \frac{26}{3}.$$

9. $\overline{AB} = \overline{AC}$ 인 이등변삼각형 ABC 에 대하여 $|\overrightarrow{BC}| = 2$, $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 4\sqrt{2}$ 이다. 점 B 에서 선분 AC 에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\overline{BH}$ 의 값은? [3점]

① $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ② $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ③ $\sqrt{2}$ ④ $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{2}}{3}$



$\overline{BC}$ 의 중점을 M 이라고 하자.

$\overline{BC} = 2$ 이고,

$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 2|\overrightarrow{AM}| = 4\sqrt{2}$ 이므로

$\overline{AM} = 2\sqrt{2}$ 이다.

$\overline{BM} = \overline{CM} = 1$ 이므로 $\overline{AB} = \overline{AC} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2+1} = 3$

삼각형 ABC 의 넓이는

$\frac{1}{2}\overline{BC} \times \overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AC} \times \overline{BH}$ 이므로

$\frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{2} = \frac{1}{2} \times 3 \times \overline{BH}$

따라서 $\overline{BH} = \frac{4}{3}\sqrt{2}$ 이다.

10. 8월동안 수희아파트 한 세대의 전력소비량은 평균이 434, 표준편차가 12인 정규분포를 따른다고 한다. n개의 세대를 임의추출하여 측정한 전력소비량의 표본평균이 435.44 이상일 확률이 0.1150일 때, 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 자연수 n의 값을 구한 것은? (단, 전력소비량의 단위는 kWh이다.) [3점]

z	$P(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.2	0.3850
1.4	0.4192
1.6	0.4452

① 81 ② 100 ③ 121 ④ 144 ⑤ 169

수희아파트 한 세대의 전력소비량을 확률변수 X라 하면 확률변수 X는 정규분포 $N(434, 12^2)$를 따른다.

크기가 n인 표본의 표본평균을 $\overline{X}$라 하면 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(434, \left(\frac{12}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$를 따른다.

$$P(\overline{X} \ge 435.44) = P\left(Z \ge \frac{435.44-434}{\frac{12}{\sqrt{n}}}\right)$$

$$= P(Z \ge 1.2)$$

$$= 0.1150 \quad \text{이므로}$$

$$\frac{1.44}{\frac{12}{\sqrt{n}}} = 1.2$$

$\sqrt{n} = 1.2 \times \frac{12}{1.44} = 10$ 이고 $n = 100$ 이다.

11. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t>0)$에서의 위치 $\mathrm{P}(x,\ y)$가

$$x=3\sin 2t-t,\quad y=-3\cos 2t$$

이다. 점 P의 속력의 최솟값은? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

$\frac{dx}{dt}=6\cos 2t-1$, $\frac{dy}{dt}=6\sin 2t$ 이고

속력은 $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{(6\cos 2t-1)^2+(6\sin 2t)^2}$

$=\sqrt{36(\sin^2 2t+\cos^2 2t)-12\cos 2t+1}$

$=\sqrt{37-12\cos 2t}$ 이다.

$-1\le\cos 2t\le 1$ 이므로 속력의 최솟값은

$\sqrt{37-12}=5$ 이다.

12. 주머니 A에는 흰 구슬 3개와 검은 구슬 2개가 들어 있고, 주머니 B에는 흰 구슬 1개와 검은 구슬 4개가 들어 있다. 한 개의 주사위를 한 번 던져서 나온 눈의 수가 3의 배수이면 주머니 A에서 임의로 2개의 구슬을 동시에 꺼내고, 3의 배수가 아니면 주머니 B에서 임의로 2개의 구슬을 동시에 꺼낸다. 주머니에서 꺼낸 2개의 구슬이 서로 다른 색일 때, 꺼낸 2개의 구슬이 주머니 A에서 꺼낸 구슬일 확률은? [3점]

① $\frac{3}{7}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{4}{7}$ ④ $\frac{9}{14}$ ⑤ $\frac{5}{7}$

A ○ ○ ○ ● ●

B ○ ● ● ● ●

1) 3의 배수가 나올 확률 : $\frac{1}{3}$

A에서 꺼낸 두 구슬의 색이 다를 확률 : $\frac{3\times 2}{{}_5C_2}=\frac{3}{5}$

$P(A)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}=\frac{1}{5}$

2) 3의 배수가 나오지 않을 확률 : $\frac{2}{3}$

B에서 꺼낸 두 구슬의 색이 다를 확률 : $\frac{1\times 4}{{}_5C_2}=\frac{2}{5}$

$P(B)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$

$\frac{P(A)}{P(A\cup B)}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{5}+\frac{4}{15}}=\frac{3}{7}$ 이다.

13. 함수 $f(x)=x^3+2x+1$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 곡선 $y=g(2x-2)$ 위의 점 $(3,\ 1)$에서의 접선의 y절편은? [3점]

① $-\frac{2}{5}$ ② $-\frac{1}{5}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{2}{5}$

$f'(x) = 3x^2+2$

$g(x)$는 $f(x)$의 역함수이므로 $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$ 이다.

$y = g(2x-2)$ 를 x에 대하여 미분하면

$y' = g'(2x-2) \times (2x-2)'$

$= 2g'(2x-2)$ 이므로

점 (3.1) 에서의 접선의 기울기는 $2g'(4)$ 이다.

$2g'(4) = \frac{2}{f'(g(4))} = \frac{2}{f'(1)} = \frac{2}{5}$

따라서 접선의 방정식은

$y = \frac{2}{5}(x-3)+1 = \frac{2}{5}x - \frac{1}{5}$ 이고

접선의 y절편은 $-\frac{1}{5}$ 이다.

14. 두 점 $F(3,\ 0)$, $F'(-3,\ 0)$을 초점으로 하는 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{16}=1$ 위의 제1사분면에 있는 점 P에서의 접선이 x축과 만나는 점을 A, y축과 만나는 점을 B라 하자. 선분 F'A를 $9:8$로 내분하는 점이 F일 때, 삼각형 FBF'의 넓이는? [4점]

① $\frac{48}{5}$ ② $\frac{54}{5}$ ③ 12 ④ $\frac{69}{5}$ ⑤ 15

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{16}=1$의 초점의 좌표는 $F(\sqrt{a^2-16}.0)$, $F'(-\sqrt{a^2-16}.0)$

이므로 $\sqrt{a^2-16} = 3$, 즉 $a^2=25$ 이다.

$P(x_1, y_1)$ 에서의 접선은 $\frac{x_1}{25}x + \frac{y_1}{16}y = 1$ 이므로

$A\left(\frac{25}{x_1}, 0\right)$, $B\left(0. \frac{16}{y_1}\right)$ 이다.

이 때, 점 F가 선분 F'A를 9:8로 내분하는 점이므로

$\overline{FF'} : \overline{FA} = 9:8$ 이다.

따라서 $\overline{FA} = \frac{8}{9}\overline{FF'} = \frac{8}{9}\times 6 = \frac{16}{3}$ 이고

$F(3.0)$ 이므로 $A\left(3+\frac{16}{3}, 0\right) = A\left(\frac{25}{x_1}, 0\right)$ 이다.

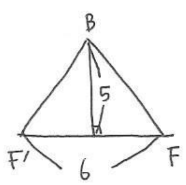
$\Rightarrow x_1 = 3$

이 때, 점 $P(3.y_1)$는 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 위의

점이므로 $\frac{9}{25}+\frac{y_1^2}{16}=1 \Rightarrow y_1 = \frac{16}{5}$

따라서 점 B의 좌표는 $B(0.5)$ 이다.

삼각형 FBF'의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 6\times 5 = 15$ 이다.



15. 주머니에 1, 2, 3, 4의 숫자가 하나씩 적혀 있는 공이 각각 3개씩 12개가 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 세 수의 곱이 4의 배수일 확률은? [4점]

① $\frac{25}{44}$ ② $\frac{27}{44}$ ③ $\frac{29}{44}$ ④ $\frac{31}{44}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

12 개의 공 중에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는 $_{12}C_3$ 이다.

꺼낸 공에 적혀 있는 세 수의 곱이 4의 배수가 아니려면 4가 적힌 공이 있으면 안된다.

① 2가 적힌 공이 0개 일때

1, 3 이 적혀 있는 공 중에서 3개를 꺼내는 경우의 수는 $_6C_3 = 20$ 이다.

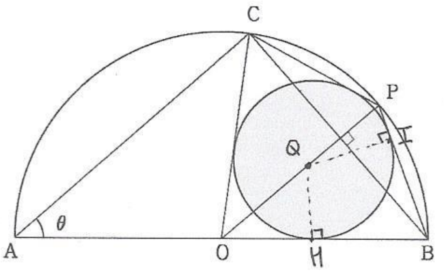
② 2가 적힌 공이 1개 일 때

1, 3 이 적혀 있는 공 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수는 $\underbrace{3}_{\text{2가 1개 뽑히는 경우의 수}} \times {}_6C_2 = 45$ 이다.

따라서, 세 수의 곱이 4의 배수가 아닐 확률은 $\frac{20+45}{_{12}C_3}$ 이고, 세 수의 곱이 4의 배수일 확률은

$$1 - \frac{20+45}{_{12}C_3} = 1 - \frac{65}{220} = \frac{31}{44} \text{ 이다.}$$

16. 그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 1인 반원이 있고, 호 AB 위의 점 C에 대하여 ∠CAB $=\theta$라 하자. 호 BC 위의 점 P를 선분 BC와 선분 OP가 서로 수직이 되도록 잡을 때, 사각형 OBPC에 내접하는 원의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^2}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$) [4점]



① $\frac{\pi}{16}$ ② $\frac{\pi}{8}$ ③ $\frac{\pi}{4}$ ④ $\frac{\pi}{2}$ ⑤ π

$\angle OAC = \angle OCA = \theta$ 이고

$\angle BOC = \angle OAC + \angle OCA = 2\theta$ 이다.

$\overline{OP} \perp \overline{BC}$ 이므로 $\angle BOP = \angle COP = \theta$ 이다.

내접하는 원의 중심을 Q, Q에서 $\overline{OB}$에 내린 수선의 발을 H, $\overline{BP}$에 내린 수선의 발을 I 라고 하자.

$\triangle OBP$에서 $\angle BOP = \theta$ 이므로 $\angle OBP = \angle OPB = \frac{\pi - \theta}{2}$ 이다.

$\triangle PQI$ 에서 $\angle QPI = \frac{\pi-\theta}{2}$ 이므로 $\angle PQI = \frac{\theta}{2}$ 이다.

내접하는 원의 반지름의 길이를 r이라고 하면,

$\triangle OQH$에서 $\frac{\overline{QH}}{\overline{OQ}} = \sin\theta$, $\overline{OQ} = \frac{r}{\sin\theta}$ 이며.

$\triangle QPI$ 에서 $\frac{\overline{QI}}{\overline{QP}} = \cos\frac{\theta}{2}$, $\overline{QP} = \frac{r}{\cos\frac{\theta}{2}}$ 이다.

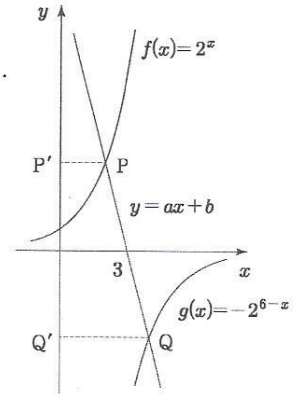
$\overline{OQ} + \overline{QP} = 1$ 이므로 $\frac{r}{\sin\theta} + \frac{r}{\cos\frac{\theta}{2}} = 1$

$$r = \frac{1}{\frac{1}{\sin\theta} + \frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}}} = \frac{\sin\theta}{1 + 2\sin\frac{\theta}{2}}$$

$S(\theta) = \left(\frac{\sin\theta}{1+2\sin\frac{\theta}{2}}\right)^2 \pi$ 이므로

$$\lim_{\theta\to0+} \frac{S(\theta)}{\theta^2} = \lim_{\theta\to0+} \frac{\sin^2\theta}{\theta^2} \times \left(\frac{1}{1+2\sin\frac{\theta}{2}}\right)^2 \pi = \pi \text{ 이다.}$$

17. 두 함수 $f(x)=2^x$, $g(x)=-2^{6-x}$가 있다. 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 점 (3, 0)을 지나는 직선 $y=ax+b$ ($a<0$, $b>1$)과 만나는 점을 각각 P, Q라 하고, 두 점 P, Q에서 y축에 내린 수선의 발을 각각 P′, Q′이라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]



<보 기>

ㄱ. 모든 실수 x에 대하여 $f(3+x)+g(3-x)=0$이다.
ㄴ. $\overline{PP'}+\overline{QQ'}=8$
ㄷ. 사각형 PP′Q′Q의 넓이가 24일 때, $a+b=8$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ $f(3+x)=2^{3+x}$, $g(3-x)=-2^{3+x}$ 이므로
모든 실수 x에 대하여 $f(3+x)+g(3-x)=0$ 이다.

~~ㄴ~~. $P(x_1, f(x_1))$, $Q(x_2, g(x_2))$ $(x_1>0, x_2>0)$에 대하여 두 점 P, Q는 (3, 0)에 대하여 대칭이므로
$\frac{x_1+x_2}{2}=3$ 이다.
즉 $\overline{PP'}+\overline{QQ'}=x_1+x_2=6$ 이다.

ㄷ. 사각형 PP′Q′Q의 넓이는 $\frac{1}{2}(\overline{PP'}+\overline{QQ'})\times\overline{P'Q'}$ 이다.
이 때 $\overline{PP'}+\overline{QQ'}=6$, $\overline{P'Q'}=2\overline{OP'}$ 이므로
$\frac{1}{2}\times6\times2\overline{OP'}=24 \Rightarrow \overline{OP'}=4$
점 P의 y좌표는 4이므로 P의 좌표는 (2, 4)이다.
직선 $y=ax+b$는 두 점 (3, 0), (2, 4)을 지나므로 $a=-4$, $b=12$ 이다.
따라서 $a+b=8$ 이다.

18. 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 도함수가 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $A(t, f(t))$ $(t\neq 0)$을 지나고 점 A에서의 접선과 수직인 직선이 x축과 만나는 점을 B라 하자. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, f(0))$에서의 접선의 방정식이 $y=4x$이고 삼각형 AOB의 넓이를 $S(t)$라 할 때, $\lim_{t\to0}\frac{S(t)}{t^2}$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

① 34 ② 32 ③ 30 ④ 28 ⑤ 26

$y=f(x)$ 위의 점 $A(t, f(t))$에서의 접선의 기울기는 $f'(t)$ 이므로
접선과 수직인 직선의 방정식은 $y=\frac{-1}{f'(t)}(x-t)+f(t)$ 이다.
이 때 B의 좌표는 $B(t+f(t)f'(t), 0)$ 이다.
$y=f(x)$ 위의 점 $(0, f(0))$에서의 접선의 방정식이 $y=4x$ 이므로 $f(0)=0$, $f'(0)=4$이다.

1) $t>0$일 때, $t+f(t)f'(t)>0$, $f(t)>0$ 이므로
$S(t)=\frac{1}{2}(t+f(t)f'(t))\times f(t)$ 이다.

모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$ 이므로

2) $t<0$일 때, $t+f(t)f'(t)<0$, $f(t)<0$ 이므로
$S(t)=\frac{1}{2}(-t-f(t)f'(t))(-f(t))$ 이다.

$f'(0)=\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t}=4$ 이므로

$\lim_{t\to0}\frac{S(t)}{t^2}=\lim_{t\to0}\frac{\frac{1}{2}(t+f(t)f'(t))f(t)}{t^2}$
$=\lim_{t\to0}\frac{1}{2}\left(1+\frac{f(t)}{t}f'(t)\right)\times\frac{f(t)}{t}$
$=\frac{1}{2}(1+4\times4)\times4$
$=34$ 이다.

19. 1부터 14까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 14장의 카드가 있다. 14장의 카드 중 임의로 2장의 카드를 택할 때, 2장의 카드에 적혀 있는 수의 곱을 4로 나눈 나머지를 확률변수 X라 하자. 다음은 확률변수 X의 평균 $\mathrm{E}(X)$의 값을 구하는 과정이다.

> 14장의 카드 중 임의로 2장의 카드를 택하는 경우의 수는 ${}_{14}\mathrm{C}_2$이다.
>
> (i) $X=0$인 사건은 2장의 카드에 적혀 있는 수를 각각 4로 나눈 나머지 중 적어도 0이 하나 있거나 모두 2인 경우이므로
>
> $$\mathrm{P}(X=0)=\frac{\boxed{(가)}+{}_4\mathrm{C}_2}{{}_{14}\mathrm{C}_2} \quad = \frac{42}{91}$$
>
> (ii) $X=1$인 사건은 2장의 카드에 적혀 있는 수를 각각 4로 나눈 나머지가 모두 1이거나 모두 3인 경우이므로
>
> $$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2+{}_3\mathrm{C}_2}{{}_{14}\mathrm{C}_2} \quad = \frac{9}{91}$$
>
> (iii) $X=2$인 사건은 2장의 카드에 적혀 있는 수를 각각 4로 나눈 나머지가 1, 2이거나 2, 3인 경우이므로
>
> $$\mathrm{P}(X=2)=\frac{\boxed{(나)}}{{}_{14}\mathrm{C}_2} = \frac{28}{91}$$
>
> (iv) $X=3$인 사건은 2장의 카드에 적혀 있는 수를 각각 4로 나눈 나머지가 1, 3인 경우이므로
>
> $$\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_{14}\mathrm{C}_2} \quad = \frac{12}{91}$$
>
> 따라서 확률변수 X의 평균은
>
> $$\mathrm{E}(X)=\sum_{k=0}^{3}\{k\times\mathrm{P}(X=k)\}=\boxed{(다)}$$

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 a, b, c라 할 때, $(a-b-1)\times c$의 값은? [4점]

① $\frac{95}{13}$ ② $\frac{97}{13}$ ③ $\frac{99}{13}$ ④ $\frac{101}{13}$ ⑤ $\frac{103}{13}$

1부터 14까지의 자연수 중 4로 나눈 나머지가 0, 1, 2, 3 개인 자연수는 각각 3개, 4개, 4개, 3개이다.

(가) (4로 나눈 나머지 중 0이 적어도 하나 있는 경우의 수)

$=$ (전체 경우의 수) $-$ (0이 없는 경우의 수)

$= {}_{14}C_2 - {}_{11}C_2 = 91-55 = \underline{36}$

(나) 4로 나눈 나머지가 1, 2인 경우의 수 : $4\times4=16$

4로 나눈 나머지가 2, 3인 경우의 수 : $4\times3=12$ 이므로

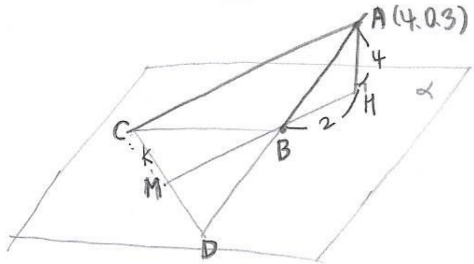
$16+12=\underline{28}$

(다) $\frac{9}{91}\times1+\frac{28}{91}\times2+\frac{12}{91}\times3=\frac{101}{91}$

$a=36$, $b=28$, $c=\frac{101}{91}$ 이므로 $(a-b-1)\times c = 7\times\frac{101}{91}=\frac{101}{13}$ 이다.

20. 좌표공간에서 점 A(4, 0, 3)을 지나는 직선 $\frac{x}{2}=z-1$, $y=0$과 평면 $\alpha : 2x-y+2z=2$가 만나는 점을 B라 하자. 평면 α 위의 두 점 C, D가 $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{AD}}=2\sqrt{11}$을 만족시키고, 삼각형 BCD는 정삼각형이다. 선분 CD의 중점 M에 대하여 $\angle\mathrm{ABM}>\frac{\pi}{2}$일 때, $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}|$의 값은? [4점]

① $2\sqrt{7}$ ② $\sqrt{30}$ ③ $4\sqrt{2}$ ④ $\sqrt{34}$ ⑤ 6



점 B는 직선 $\frac{x}{2}=z-1$, $y=0$ 위의 점이므로

$\frac{x}{2}=z-1=t$라고 하면 $B(2t,\ 0,\ t+1)$이다.

또한, 점 B는 평면 α위의 점이므로 $2(2t)-0+2(t+1)=2$,

즉 $t=0$이고 점 B의 좌표는 $B(0,0,1)$이다.

점 A와 평면 α 사이의 거리는 $d=\frac{|8-0+6-2|}{\sqrt{2^2+1+2^2}}=4$ 이다.

또한 $\overline{AB}=\sqrt{4^2+0^2+(3-1)^2}=2\sqrt{5}$ 이므로 $\overline{BH}=\sqrt{20-16}=2$이다.

삼각형 BCD는 정삼각형이므로 $\overline{CM}=k$라고 하면 $\overline{BM}=\sqrt{3}k$이다.

$\overline{AM}\perp\overline{CD}$ 이므로 $\triangle ACM$에서 $\overline{AM}^2=\overline{AC}^2-\overline{CM}^2=44-k^2$,

$\triangle AMH$에서 $\overline{AM}^2=\overline{MH}^2+\overline{AH}^2=(\sqrt{3}k+2)^2+4^2$

따라서 $44-k^2=(\sqrt{3}k+2)^2+16$

$=3k^2+4\sqrt{3}k+20$

$\Rightarrow 4k^2+4\sqrt{3}k-24=0$

$\Rightarrow (k+2\sqrt{3})(k-3)=0$ $\therefore k=\sqrt{3}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$ 이므로 $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}|=\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{CD}|^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}$

$=\sqrt{20+(2\sqrt{3})^2}$

$=4\sqrt{2}$ 이다.

21. 함수 $f(x)$가

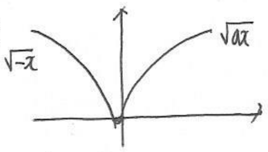
$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{-x} & (x<0)\\ \sqrt{ax} & (x\geq 0)\end{cases} \quad (\text{단, } a>0\text{인 상수})$$

이고, 함수 $g(x)$는

$$g(x)=b\times\int_{bx}^{bx+1}f(t)\,dt \quad (\text{단, } b\neq 0\text{인 상수})$$

이다. 함수 $g(x)$가 $x=-1$ 또는 $x=1$에서 최댓값 $\frac{b}{3}$를 가질 때, $a+b$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{5}{12}$ ④ $\frac{7}{12}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

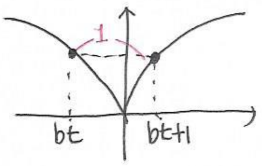
함수 f(x)의 그래프는 

이고,

$g'(x)=b^2\{f(bx+1)-f(bx)\}$ 이다.

$g'(x)=0$ 이 되는 지점을 찾아 $g(x)$의 극값을 조사하자.

$x=t$ 에서 $g(x)$가 극대 or 극소라 하면 $f(bt+1)=f(bt)$ 이므로



← 다음과 같이 한점에서만 가지게 된다.

b>0 이면

x	$\cdots$	t	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
		극소	

이므로 $g(x)$의 그래프는

 $y=g(x)$ 와 같이 그려지고 최댓값을 갖지 않는다.

b<0 이면

x	$\cdots$	t	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
		극대	

이므로 $g(x)$의 그래프는

 $y=g(x)$와 같이 그려지고 최댓값을 갖는다.

$bt<0$ 이고 $b<0$ 이므로 $t>0$ 이다. $g(x)$가 $x=1$ 또는 $x=-1$ 에서 극대(최대)이므로 $t=1$ 이다.

$\therefore g(1)=b\int_b^{b+1}f(t)\,dt=\frac{b}{3} \Rightarrow \int_b^0 f(t)dt+\int_0^{b+1}f(t)dt=\frac{1}{3}$

$\Rightarrow \int_b^0\sqrt{-x}\,dx+\int_0^{b+1}\sqrt{ax}\,dx=\frac{1}{3}$

$=\int_0^{-b}\sqrt{x}\,dx+\sqrt{a}\int_0^{b+1}\sqrt{x}\,dx$

$=\frac{2}{3}\{(-b)^{\frac{3}{2}}+\sqrt{a}(b+1)^{\frac{3}{2}}\}$

$=\frac{2}{3}\{(-b)\sqrt{-b}+\underbrace{\sqrt{a}\sqrt{b+1}}_{*\ \sqrt{-b}\ (\because ①)}(b+1)\}=\frac{2}{3}\sqrt{-b}=\frac{1}{3} \Rightarrow b=-\frac{1}{4}$

$*$ $\overset{\oplus}{f(b+1)}=\overset{\ominus}{f(b)}$ 이므로

$\sqrt{a(b+1)}=\sqrt{-b}$ …… ①

따라서 ①에 의해 $a=\frac{1}{3}$ 이고

$a+b=\frac{1}{12}$

단답형

22. 함수 $f(x)=2e^{x^2-2x}$에 대하여 $f'(2)$의 값을 구하시오. [3점]

4

$f'(x)=2e^{x^2-2x}\times(x^2-2x)'$

$=2(2x-2)e^{x^2-2x}$

$f'(2)=2\times 2=4$

23. 숫자 1, 2, 3, 4 중에서 중복을 허락하여 세 개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 모든 세 자리 자연수의 개수를 구하시오. [3점]

64

백 십 일

↑ ↑ ↑

$4\times4\times4=64$

24. 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	1	2	3	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	a	$\frac{1}{3}$	1

$\mathrm{V}(3X+1)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) [3점]

11

$\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+a+\frac{1}{3}=1$ 이므로 $a=\frac{1}{6}$

$E(X)= 1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$

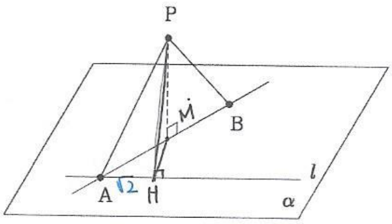
$E(X^2)= 1\times\frac{1}{3}+4\times\frac{1}{6}+9\times\frac{1}{3}=4$

$V(X)= E(X^2)-\{E(X)\}^2=4-(\frac{5}{3})^2=\frac{11}{9}$

$V(3X+1)=9V(X)=9\cdot\frac{11}{9}=11$.

25. 평면 α 위에 $\overline{\mathrm{AB}}=4$인 두 점 A, B와 점 A를 지나는 직선 l이 있고, 직선 AB와 직선 l이 이루는 예각의 크기는 $\frac{\pi}{4}$이다. 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발은 선분 AB의 중점이고, 점 P와 직선 l 사이의 거리는 $\sqrt{14}$이다. $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 값을 구하시오. [3점]

8



$\overline{AB}$의 중점을 M, 점 P에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라고 하자. 삼수선의 정리에 의해 $\overline{PH}\perp l$, $\overline{MH}\perp l$ 이다.

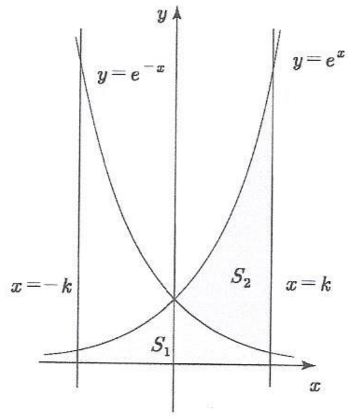
$\overline{AM}=\frac{1}{2}\overline{AB}=2$ 이고 직선 AB와 직선 l이 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$이므로 $\overline{AH}=\overline{AM}\cos 45^\circ=\sqrt{2}$ 이다.

$\triangle PAH$ 에서 $\overline{AH}=\sqrt{2}$, $\overline{PH}=\sqrt{14}$ 이므로 $\overline{PA}=\sqrt{14+2}=4$ 이다.

$\overline{PA}=\overline{PB}=4$ 이므로 $\overline{AP}+\overline{BP}=8$ 이다.

26. 좌표평면에서 상수 $k\ (k>0)$에 대하여 두 곡선 $y=e^x$, $y=e^{-x}$과 x축, 두 직선 $x=-k$, $x=k$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 두 곡선 $y=e^x$, $y=e^{-x}$, 직선 $x=k$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하자. $S_2=2S_1$일 때, e^k의 값을 구하시오. [4점]

5



$y=e^x$ 와 $y=e^{-x}$는 y축에 대하여 대칭이므로

$\int_0^k e^{-x}\,dx=\frac{S_1}{2}$ 이다.

또한, $\int_0^k e^x\,dx=\frac{S_1}{2}+S_2=\frac{5}{2}S_1$ 이므로

$5\int_0^k e^{-x}\,dx=\int_0^k e^x\,dx$ 가 성립한다.

$5\int_0^k e^{-x}\,dx=5\left[-e^{-x}\right]_0^k=5(1-e^{-k})$

$\int_0^k e^x\,dx=\left[e^x\right]_0^k=e^k-1$ 이므로

$5(1-e^{-k})=e^k-1$

$\Rightarrow e^k-6+5e^{-k}=0$

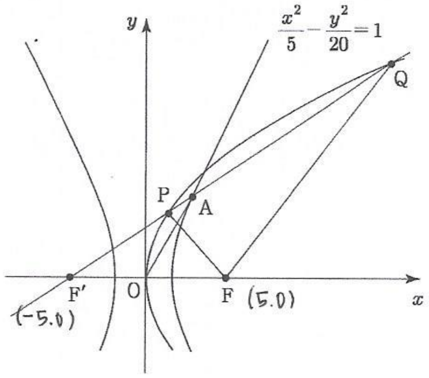
$\Rightarrow e^{2k}-6e^k+5=0$

$\Rightarrow (e^k-1)(e^k-5)=0$

$k>0$ 이므로 $e^k=5$ 이다.

27. 그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{20}=1$의 두 초점을 F, F'이라 하고, 쌍곡선 위의 제1사분면에 있는 점 A는 $\overline{FF'}=2\overline{OA}$를 만족시킨다. 원점을 지나고 점 F를 초점으로 하는 포물선과 직선 F'A가 만나는 두 점을 각각 P, Q라 할 때, $\overline{FP}+\overline{FQ}$의 값을 구하시오. (단, F의 x좌표는 양수이다.) [4점]

80



$\overline{FF'}=2\overline{OA}$ 이므로 $\overline{OF}=\overline{OF'}=\overline{OA}$ 이고 ① 점 A는 $\overline{FF'}$를 지름으로 하는 원 위에 있다. $\overline{AF}=k$ 라고 하면 점 A는 쌍곡선 $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{20}=1$ 위에 있으므로 $\overline{F'A}-\overline{FA}=2\sqrt{5}$ 이다.

즉, $\overline{F'A}=\overline{FA}+2\sqrt{5}=k+2\sqrt{5}$ 이다. ①에 의해

$(\overline{F'A})^2+(\overline{FA})^2=(\overline{FF'})^2$ 이므로

$(k+2\sqrt{5})^2+k^2=10^2 \Rightarrow 2k^2+4\sqrt{5}k-80=0$

$(k+4\sqrt{5})(k-2\sqrt{5})=0$

$\therefore k=2\sqrt{5}$

$\angle FF'A=\theta$라고 하면 $\tan\theta=\frac{\overline{FA}}{\overline{F'A}}=\frac{k}{k+2\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{4\sqrt{5}}=\frac{1}{2}$

그러므로 직선 F'A의 방정식은 $y=\frac{1}{2}(x+5)$ 이다.

점 F를 초점으로 하는 포물선은 $y^2=20x$ 이므로

점 P, Q의 x좌표는 $\begin{cases} y^2=20x \\ y=\frac{1}{2}(x+5) \end{cases}$ 의 두 근이다.

$\{\frac{1}{2}(x+5)\}^2=20x$

$\Rightarrow (x+5)^2=80x$

$\Rightarrow x^2-70x+25=0$

점 P, Q의 x좌표를 각각 x_1, x_2라고 하면 근과 계수의 관계에 의해 $x_1+x_2=70$ 이다.

점 P, Q는 초점이 F(5.0)인 포물선 위의 점이므로 $\overline{FP}=x_1+5$, $\overline{FQ}=x_2+5$ 이다.

따라서 $\overline{FP}+\overline{FQ}=(x_1+5)+(x_2+5)=80$.

28. 다음 조건을 만족시키는 0이 아닌 정수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 구하시오. [4점]

> (가) $|a|+|b|+|c|+|d|=7$
> (나) $a+b<4$

280 a, b, c, d는 0이 아닌 정수이므로 $|c|+|d|\ge 2$이고 $|a|+|b|\le 5$이다.

$|a|=A+1$, $|b|=B+1$, $|c|=C+1$, $|d|=D+1$ 라 할 때

(A, B, C, D는 음이 아닌 정수)

(가)에 의해 $(A+1)+(B+1)+(C+1)+(D+1)=7$

$A+B+C+D=3$ 이다.

따라서 (가) 조건을 만족하는 (A.B.C.D)의 경우의 수는 ${}_4H_3$이고,

(a.b.c.d)의 경우의 수는 ${}_4H_3\times 2\times2\times2\times2={}_6C_3\times16=320$

* a.b.c.d가 각각 양수 or 음수일 경우의 수

① $a+b=4$ 일 때

가능한 (a,b)는 (1.3)(2.2)(3.1)로 3가지다.

이 때 $|c|+|d|=7-4=3$ 이므로

가능한 $(|c|,|d|)$는 (1.2)(2.1)로 2가지고

가능한 (c.d)는 $2\times2\times2=8$가지다.

따라서 (a.b.c.d)의 개수는 $3\times8=24$이다.

② $a+b=5$ 일 때

가능한 (a.b)는 (1.4)(2.3)(3.2)(4.1)로 4가지다.

이 때 $|c|+|d|=7-5=2$ 이므로

가능한 $(|c|,|d|)$는 (1.1)로 1가지고

가능한 (c.d)는 $1\times2\times2=4$가지다.

따라서 (a.b.c.d)의 개수는 $4\times4=16$이다.

($a+b\le|a|+|b|\le5$ 이므로 $a+b\ge6$ 일 수 없다.)

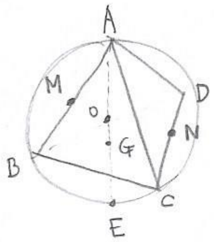
따라서 조건을 만족하는 순서쌍의 개수는 ①,②에 의해

$320-(24+16)=320-40=80$ 이다.

29. 한 모서리의 길이가 $2\sqrt{6}$ 인 정사면체 ABCD 와 중심이 O 이고 네 점 A, B, C, D 를 지나는 구 S가 있다. 직선 AO 와 구 S가 만나는 점 중 A가 아닌 점을 E 라 할 때, 정사면체 ABCD 의 한 면 BCD 위의 점 P 에 대하여

$$\overrightarrow{EP} \cdot \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{EP} \cdot \overrightarrow{AQ}$$

를 만족시키는 구 S 위의 점 Q 가 나타내는 도형의 길이는 6π 이다. 선분 AB 의 중점 M 에 대하여 사면체 CDMP 의 부피의 최댓값이 V일 때, $6V^2$ 의 값을 구하시오. (단, P 는 선분 CD 위의 점이 아니다.) [4점] 128

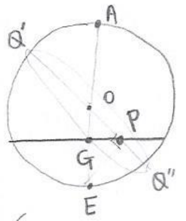


$\overline{CD}$의 중점을 N, $\overline{AE}$가 $\triangle BCD$와 만나는 점을 G라고 하자. 이 때 $\overline{AB}=2\sqrt{6}$인 정사면체에서 $\overline{AO}=3$ 이다.

$\overrightarrow{EP}\cdot\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{EP}\cdot\overrightarrow{AQ} \Rightarrow \overrightarrow{EP}\cdot(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AQ})=0$

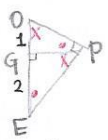
$\Rightarrow \overrightarrow{EP}\cdot\overrightarrow{QP}=0 \Leftrightarrow \underline{\overrightarrow{EP}\perp\overrightarrow{QP}}$

구 S위의 점 Q가 나타내는 도형의 길이가 6π 이고 구의 반지름은 $\overline{AO}=3$이므로 Q가 나타내는 도형은 중심이 O이고 $r=3$인 원이다.



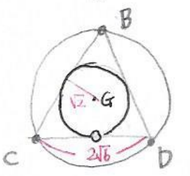
구를 점 A,E를 지나는 단면으로 자르면 직선 AE와 $\triangle BCD$를 지나는 평면은 수직이다. $\overrightarrow{EP}\perp\overrightarrow{QP}$ 이므로 직선 $\overline{OP}$와 $\overline{EP}$는 서로 수직이다.

정사면체에서 $\overline{OG}=1$ 이고 $\overline{OE}=\overline{OA}=3$이므로 $\overline{EG}=2$이다. $\overline{GP}=k$라고 하면

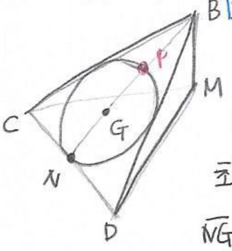


$\overline{OG}:\overline{GP}=\overline{GP}:\overline{GE}$ 즉 $1:k=k:2$, $k=\sqrt{2}$ 이

따라서 점 P는 $|\overrightarrow{GP}|=\sqrt{2}$가 성립한다.



구를 면BCD를 지나는 단면으로 자르면 점 P가 나타내는 도형은 $\triangle BCD$에 내접하는 원이다.



[풀이1] 사면체 CDMP에서 선분BM과 면CDM은 수직이고 $\overline{CD}=2\sqrt{6}$, $\overline{MN}=2\sqrt{3}$, $\overline{BM}=\frac{1}{2}\overline{BA}=\sqrt{6}$ 이다.

이 때, 점P가 선분 BN 위에 있을 때 부피가 최대이다.

$\overline{NG}=\overline{GP}=\overline{PB}$ 이므로 $\overline{NP}=\frac{2}{3}\overline{NB}$이고 점 P에서 면CDM에 내린 수선의 발을 P'라고 할 때 $\overline{PP'}=\frac{2}{3}\overline{BM}=\frac{2}{3}\sqrt{6}$이다.

따라서 $V=\frac{1}{2}\overline{CD}\times\overline{MN}\times\overline{PP'}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{6}\times2\sqrt{3}\times\frac{2}{3}\sqrt{6}\times\frac{1}{3}=\frac{8}{3}\sqrt{3}$

$6V^2=6\times\frac{64}{3}=128$ 이다.

[풀이2] 밑면이 CDP, 높이가 $\overline{MM'}$일 때

(M': 점M에서 면 BCD에 내린 수선의 발)

$\overline{MM'}$는 고정이므로 $\triangle CDP$의 넓이가 최대일 때 V 최대이다.

$\Rightarrow$ P는 B에 가까울수록 최대.

$\frac{1}{2}\times2\sqrt{6}\times2\sqrt{2}=4\sqrt{3}$ ($\triangle CDP$ 넓이 최대)

$\overline{MM'}=\frac{1}{2}\overline{AG}=2$ $\therefore V=\frac{8}{3}\sqrt{3} \rightsquigarrow 6V^2=128$

30. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$(x-a)g(x)=e^{|f(x)|}-1 \text{ (단, } a\text{는 상수)}$$

를 만족시킨다. $h(a)=0$인 이차함수 $h(x)$와 양수 b에 대하여

$$\lim_{x\to 0}\frac{|e^{|f(x)|}-h(x)|}{x},\quad \lim_{x\to 0}\frac{|e^{|f(b+x)|}-h(b+x)|}{x}$$

의 값이 모두 존재할 때, $b\times h'(0)=-pe^{q}$이다. $3(p+q)$의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이다.) [4점]

14

$(x-a)g(x)=e^{|f(x)|}-1 \Rightarrow 0=e^{|f(a)|}-1 \Rightarrow f(a)=0$

$g(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{|f(x)|}-1}{x-a} & (x\neq a)\\ g(a) & (x=a)\end{cases}$ $\Rightarrow g(x)$가 미분가능 $\Rightarrow g(x)$가 연속 $\Rightarrow \lim_{x\to a}\dfrac{e^{|f(x)|}-1}{x-a}$가 존재

따라서 함수 $e^{|f(x)|}$가 $x=a$에서 미분가능해야 한다.

$\Rightarrow \frac{d}{dx}e^{|f(x)|}=\frac{d}{dx}(|f(x)|)e^{|f(x)|}$이므로 $|f(x)|$가 $x=a$에서 미분가능 $\Rightarrow$ $f(x)$는 $(x-a)^2$을 인수로 가져야 한다.

$f(x)=(x-a)^2(x-k)$ 꼴이다.

$g'(x)=\dfrac{\frac{d}{dx}(e^{|f(x)|})(x-a)-(e^{|f(x)|}-1)}{(x-a)^2}$ $(x\neq a)$ 이고,

$g(x)$는 실수 전체 집합에서 미분 가능하므로 $x=k$에서 미분가능하다

$\frac{d}{dx}(e^{|f(x)|})=\left(\frac{d}{dx}|f(x)|\right)e^{|f(x)|} \rightarrow |f(x)|$가 $x=k$에서 미분가능!

$\Rightarrow f(x)$는 $(x-k)^2$을 인수로 가짐.

이 때, $f(x)$는 삼차함수이므로 $a=k$인 경우만 가능하다.

$\Rightarrow f(x)=(x-a)^3$

$f(x)=(x-a)^3$ 일 때,

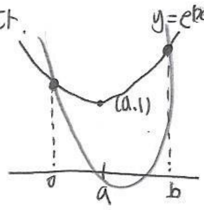
$H(x)=e^{|f(x)|}-h(x)$ 라 하면

$\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{|f(x)|}-h(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{|H(x)|}{x}$ 값이 존재하므로

$|H(0)|=0 \rightarrow \boxed{H(0)=0}$ ($\because$ (분모)$\to 0$일 때 (분자)$\to 0$)

따라서 $\lim_{x\to 0}\dfrac{|H(x)|+H(0)|}{x}$이 존재하려면 $|H(x)|$가 $x=0$에서 미분가능해야 한다. 마찬가지로, $H(b)=0$ 이고 $|H(x)|$는 $x=b$에서 미분가능해야 한다.

그래프로 해석하면, 곡선 $y=e^{|f(x)|}$와 곡선 $y=h(x)$의 교점의 x좌표에 $0, b$가 포함되어 있다.

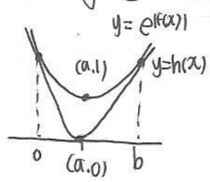


즉, $y=e^{|(x-a)^3|}$의 그래프는 다음 그림처럼 $y=h(x)$와 만나야 하는데

$|H(x)|=|e^{|f(x)|}-h(x)|$가 $x=0$, $x=b$에서 미분가능하므로 $y=e^{|f(x)|}$, $y=h(x)$가 x좌표가 $0, b$인 교점에서 각각 접해야 한다.

따라서 다음 그림과 같이 접하는 경우 밖에 없다.

($\because$ $y=e^{|f(x)|}$의 그래프가 $x=a$에 선대칭이기 때문)



$x=a$에 대하여 선대칭이므로 $\frac{0+b}{2}=a$

$\Rightarrow b=2a$ 이고 $h(x)=m(x-a)^2$ 꼴이다.

$x<a$ 일 때, $e^{|f(x)|}=e^{-f(x)}=e^{-(x-a)^3}$ 이다.

미분: $-3(x-a)^2e^{-(x-a)^3}$

즉, $h(0)=e^{-f(0)}=e^{a^3}$

$h'(0)=-3a^2e^{a^3}$

$h(0)=ma^2$, $h'(0)=-2am$ 이므로

$\begin{cases} ma^2=e^{a^3}\\ -2am=-3a^2e^{a^3}\end{cases}$

$-2am=-3a^2e^{a^3}=-3ma^4 \Rightarrow a^3=\frac{2}{3}$

$h'(0)=-2am$, $b=2a$ 이므로 $m=\frac{e^{a^3}}{a^2}$

$b\times h'(0)=-4a^2m=-4e^{a^3}=-4e^{\frac{2}{3}}$

$\therefore p=4$ $q=\frac{2}{3}$ 이므로 $3(p+q)=14$ 이다.

[참고] $(x-a)g(x)=e^{|(x-a)^3|}-1 \Rightarrow g(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{|(x-a)^3|}-1}{x-a} & (x\neq a)\\ 0 & (x=a)\end{cases}$

$\lim_{h\to 0}\dfrac{g(a+h)-g(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{e^{|h|^3}-1}{h^2}=\lim_{h\to 0}\dfrac{e^{|h|^3}-1}{|h|^3}\times\dfrac{|h|^3}{h^2}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{e^{|h|^3}-1}{|h|^3}\cdot|h|$

$=1\cdot 0=0$

이므로 $g(x)$는 $x=a$에서 미분가능하고, $g(x)$는 실수 전체 집합에서 미분가능하다.