적분법

차례

<소개 및 주의사항>

본 자료는 말 그대로 '적분법'에 해당하는 내용입니다. 따라서 '적분을 이용한 성질'이나 '적분을 포함하는 응용된 문제'등은 잘 다루지 않습니다. 허나 알아두면 분명 도움될 내용은 있겠지요. 그리고 이 자료는 수능, 논술, 심층, AP 과정의 내용이 조금씩 나누어져 들어가 있습니다. 그래서 어느 부분은 보면 좋고, 또 어느 부분은 아닐 겁니다. 나누어 본다면

	수능	논술	심층면접	AP
step1	1, 3	1, 2, 3, 5, 6	1, 2, 3, 4, 5, 6	1, 2, 3, 4, 5, 6
step2	2	1, 3, 4, 5	1, 2, 3, 4, 5	1, 3, 4

등이 되겠네요.

또 몇가지 말씀드리자면, 우선 step2의 2, 즉 라이프니츠 적분법은 참 어떻게 보면 헷갈리는 부분입니다. 바로 t, x변수를 잘 구분하고 헷갈리면 안되기 때문입니다. 예를 들어 보통의 경우라면 $\int_a^x f(t)dt$이렇게 나오겠지만 분명 t와 x를 다르게 보아 $\int_a^t f(x)dx$로도 쓸 수 있습니다. 이런 경우 변수 구분을 잘 해야만 합니다. 특히 함수가 이변수 함수 $f(x,t)$가 된다면 더욱더 그렇겠지요. 게다가 이 방식을 쓰다가 잘못쓰거나, 일부 까먹어서 끙끙거리며 다시 기억해내려 하다가 시간 잡아먹는 것 만큼 추한게 없습니다. 사용할거면, '완벽히' 알고 숙지하며 빠르게 사용할 수 있음이 전제되어야 합니다.

논술 / 심층면접과 같은 경우에는 이 자료가 거의 대부분 도움이 될 거라고 생각합니다. 일단 그만큼 많이 알아두면 좋다는 뜻이겠지요. 다다익선이라는 말은 이럴 때 쓰는게 아닐까 싶습니다. 그리고 처음에 이 파일에 넣을까 생각했던 몇몇 주제는 빼기도 하고, 또 새로운 주제를 첨가하기도 했습니다. 예를 들어 트레페조이달/심프슨 근사적분과 같은 경우에는, AP과정에만 도움이 될 뿐만 아니라 그림을 일일이 그려야 하는데 그리기가 어렵고, 또 가져오자니 저작권이 우려되어 결국 빼기로 결정했습니다.

그리고 step2의 5, 부분적분의 숨겨진 뜻은 모르는 분들이 많을 거라고 생각합니다.
간단하고, 너무다 당연히 여겼던 부분적분이지만, 라이프니츠의 표현(dx, dy등)을 사용함으로써 부분적분이 어떻게 그 형태가 변하는지 관찰하는게 핵심입니다. 실제로 종종 변화율과 관련된 논술 / 심층문제에서 많이 등장하곤 합니다.

그리고 본문에 많은양의 예시를 담으려고 노력했습니다. 하지만 대부분 저작권이 문제가 되더군요. 저에게 허락된건 아마도, 논구술 기출문제 / 수능기출 / 아이디어만 딴 변형문제 등등이 아닐까 싶습니다. 시간이 된다면 제가 직접 더 다양한 문제를 고안하고 생각해 보여드리고 싶었지만 그럴 여유는 없는게 현실이라 아쉽습니다.

참고로, 쪽수가 너무 길어져서 상하좌우의 여백을 대폭 줄였습니다. 그래도 내용이 좀 많아 보일 수 있겠지만, 이 자료가 분명 도움이 될 '어느 분들'을 위해 잘 쓰였으면 좋겠습니다.

26빌런 Altair

STEP 1. 적분법의 응용

1. 연속부분적분(순간부분적분)

다음과 같은 적분을 보았을 때 우리는 어떻게 대처하는가?

$\int x^3 e^{2x} dx$　　　$\int x^2 \sin x dx$　　　$\int e^{ax} \sin bx dx$

바로 부분적분을 이용한다는 사실을 알고 있을 것이다. 예를 들어 다음 몇가지 적분을 해 보자

$$\int e^x x^2 dx = e^x x^2 - \int e^x (2x) dx = e^x x^2 - [e^x(2x) - \int e^x (2) dx] = e^x (x^2 - 2x + 2) + C$$

$$\int x^2 \sin x dx = -\cos x (x^2) + \int \cos x (2x) = -x^2 \cos x + [\sin x (2x) - \int \sin x (2) dx]$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + C$$

그러나 이렇게 일일이 차례대로 문제를 풀면 상대적으로 시간이 많이 걸릴 뿐 아니라 부호나 값등의 실수를 할 위험이 있다. 따라서 지금부터는 이런 적분들을 '일련의 방법'을 취하여 쉽고 빠르게 공식화할 것이다. 아래의 유형이 우리가 지금부터 볼 유형들이다

type1. $\int f(x) e^{ax} dx$꼴의 적분식. 이때 $f(x)$는 다항식이며 a는 상수

type2. $\int x^n \sin(ax) dx$혹은 $\int x^n \cos(ax) dx$꼴의 적분식. 이때 a는 상수

type3. $\int e^{ax} \cos bx dx$ 혹은 $\int e^{ax} \sin bx dx$꼴의 적분식. 이때 a와 b는 상수

tupe1. $\int f(x)e^{ax}dx$꼴의 적분식. 이때 $f(x)$는 다항식이며 a는 상수

$\int f(x)e^{ax}dx$을 연속적으로 부분적분해서 나오는 형태에 주목한다.

$$\int f(x)e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax}f(x) - \frac{1}{a}\int e^{ax}f'(x)dx = \frac{1}{a}e^{ax}f(x) - \frac{1}{a^2}e^{ax}f'(x) + \frac{1}{a^2}\int e^{ax}f''(x)dx \ldots$$

등으로 이어나가는 형태에 주목한다. (-1도 번갈아 나온다) 계속적으로 뒤에 남는 적분항을 살펴보면 $\frac{1}{a^n}\int e^{ax}f^{(n)}(x)dx$인데(여기서 $f^{(n)}(x)$는 $f(x)$를 n번 미분한 n계 도함수이다.) 생각해보면 n이 커지다 보면 언젠간 $f^{(n)}(x)=0$이 되지 않겠는가? $f(x)$가 다항식이므로 말이다.
(즉 $\lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x)=0$)

이를 이용해서 규칙성을 파악한다. 그리고 결과를 지어내면 다음과 같은 방법으로 쉽게 적분을 할 수 있다.

$f(x)$은 계속 미분	$f(x)$(처음)	$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	$f''''(x)$	$\cdots$
e^{ax}은 계속 적분	$\frac{1}{a}e^{ax}$(바로)	$\frac{1}{a^2}e^{ax}$	$\frac{1}{a^3}e^{ax}$	$\frac{1}{a^4}e^{ax}$	$\frac{1}{a^5}e^{ax}$	$\cdots$

처음 곧바로 e^{ax}를 적분해 나가고 / $f(x)$는 처음에는 그냥 그대로 남겨 두고 두 번째부터 계속 미분해 나간다

즉 처음 e^{ax}를 적분하면 $\frac{1}{a}e^{ax}$이고 $f(x)$는 처음에는 그냥 그대로 남겨 두므로 $f(x)$가 나오게 된다. 그리고 이를 곱한 값을 취한다. 그러면 $\frac{1}{a}e^{ax}\times f(x)$를 처음 선택할 수 있다.

그 다음은 다시 $\frac{1}{a}e^{ax}$를 적분하면 $\frac{1}{a^2}e^{ax}$인데 이제부터는 $f(x)$를 미분한다. 그러면 $f'(x)$가 나오는데 이를 곱해서 $\frac{1}{a^2}e^{ax}\times f'(x)$를 취하고 여기에 -1을 곱한다

계속 이런식으로 끝이 날때까지 값들을 취해주고 합산해 주면 된다. 근데 이 과정은 암산이 가능하다. 즉 다음 사고과정대로 문제를 풀 수 있다는 뜻이다.

예제: $\int x^3 e^{2x} dx$ 구하기

사고: 아는 형태이므로 빠르게 부분적분을 해 보자.

어차피 e^{2x}는 계속 나올테니 앞으로 묶어 빼 주면...

$e^{2x}\left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{6}{8}x - \frac{6}{16}\right) + C$이 나오겠다

결과: 종이에는 지금 답인 $e^{2x}\left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{6}{8}x - \frac{6}{16}\right) + C$만 써 있다. 이를 약분해서 정리하면 $e^{2x}\left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{3}{8}\right) + C$이 된다.

예제: $\int x^4 e^{-2x} dx$ 구하기

위와 같은 방법으로 풀어서 결과를 내보면 다음과 같이 표현 가능하다

$\int x^4 e^{-2x} dx = -e^{-2x}\left(\frac{1}{2}x^4 + x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}\right) + C$ <이런 계산이 암산 가능하다는 것이 핵심.>

이것은 끝이 더 예쁘게 나오는데, 그 이유는 바로 $-$가 앞으로 빠져 나오면서 괄호 내부의 항들이 모두 +항이 되었기 때문이다. 따라서 이처럼 e위에 달린 지수가 음의 정수인 경우에는 더욱 쉽게 정리된다는 사실을 알아두면 좋다.

예제

x에 관한 함수 $I(x)$를 다음과 같이 정의한다.

$$I(x)=\int_{2}^{x}\frac{e^{-t}t^5-e^{-t}}{t-1}dt$$

(1) 수학적 귀납법을 이용해서 임의의 자연수 n에 대해 $x>0$일 때 $e^x>1+x+\frac{1}{2}x^2+....+\frac{1}{n!}x^n$가 성립함을 보여라

(2) $\lim_{x\to\infty}I(x)=m$이라고 할 때, me^n이 자연수가 되는 n의 값과 m을 더하면 무엇이 나오는가

카이스트 변형문제

간략 해설

(1)선행을 했다면 $e^x > 1+x+\frac{1}{2}x^2+....+\frac{1}{n!}x^n$이 테일러 급수와 연관되어 있다는 것을 알 수 있으나 논술에서는 이렇게 설명하면 안된다. 따라서 다른 증명법, 예를 들면 수학적 귀납법으로 구해야 한다.(문제에서 귀납법 쓰라는 말 없어도 쓸 줄 알아야 한다)

$n=1$이면 $e^x > 1+x$성립. 이는 그림으로도 쉽게 보일 수 있다

$n=k$ 성립가정. 그러면 $e^x > 1+x+\frac{1}{2}x^2+....+\frac{1}{k!}x^k$이다 이를 아래줄에서 이용한다.

$n=k+1$: $f(x)=e^x-\left(1+...+\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\right)$잡고 그럼 $f'(x)=e^x-(1+x+\frac{1}{2}x^2+....+\frac{1}{k!}x^k)>0$이다.

그럼 f는 증가함수이다. 그리고 $f(0)$은 0이므로 따라서 $x>0$에서 $f(x)>0$이다: 증명 완료

(2) $0<x<1$의 범위에서 $I(x)=\int_2^x \frac{e^{-t}t^5-e^{-t}}{t-1}dt=\int_2^x e^{-t}\left(t^4+t^3+t^2+t+1\right)$

$=[-e^{-t}\left((t^4+t^3+t^2+t+1)+(4t^3+3t^2+2t+1)+(12t^2+6t+2)+(24t+6)+24\right)]_2^x$

$=[-e^{-t}\left(t^4+5t^3+16t^2+33t+34\right)]_2^x=-\frac{x^4+5x^3+16x^2+33x+34}{e^x}+\frac{220}{e^2}$이다

$\lim_{x\to\infty} I(x)=m$을 보자. 우선 (1)번 문제에 의해 $\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+5x^3+16x^2+33x+34}{e^x}+\frac{220}{e^2}=0+\frac{220}{e^2}$이 된다.

[그 이유는 $e^x > 1+x+\frac{1}{2}x^2+....+\frac{1}{n!}x^n$에서 보면 된다.

그러면 $e^x > 1+x+\frac{1}{2}x^2+....+\frac{1}{(n+1)!}x^{n+1}$에서 $\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$을 증명할 것이다

$x>0$에서 $0<\frac{x^n}{e^x}<\frac{x^n}{1+x+\frac{1}{2}x^2+....+\frac{1}{(n+1)!}x^{n+1}}$인데 우변은 $x\to\infty$로 가면 0으로 간다

따라서 샌드위치 정리에 의해 $\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}$이다]

그러면 $\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+5x^3+16x^2+33x+34}{e^x}+\frac{220}{e^2}=0+\frac{220}{e^2}$에서 $m=\frac{220}{e^2}$, $n=2$면 되는 상황이므로2+220=222이다.

※ 간단한 경우의 정리

(1) $\int x^n e^x dx = e^x(x^n-nx^{n-1}+n(n-1)x^{n-2}-...)$

(2) $\int x^n e^{-x} dx = -e^x(x^n+nx^{n-1}+n(n-1)x^{n-2}+...)$

tupe2. $\int x^n \sin(ax)dx$혹은 $\int x^n \cos(ax)dx$꼴의 적분식. 이때 a는 상수

tupe1과 마찬가지로 이런 적분은 부분적분을 이용한다는 사실을 알 수 있다.
어떻게 부분적분하는가는 아래 나와있다.

$$\int x^n \sin axdx = x^n(-\frac{1}{a}cosax)+nx^{n-1}(\frac{1}{a^2}sinax)+n(n-1)x^{n-2}(\frac{1}{a^3}cosax)+...$$

$$\int x^n \cos axdx = x^n(\frac{1}{a}sinax)+nx^{n-1}(\frac{1}{a^2}cosax)+n(n-1)x^{n-2}(-\frac{1}{a^3}sinax)+...$$

하지만 이 역시 일일이 계산하기는 벅차다 따라서 역시 공식화 해 보려고 한다.

x^n미분	$f(x)$(처음)	$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	$f''''(x)$	...
삼각함수 처음적분후 -1곱해가기						...

예시를 따라 가면서 설명하려고 한다.
예를 들어 $\int x^2 \sin 2x dx$를 구하려고 한다. 그러면 이 상황은 $f(x)=x^2$이고 삼각함수 $\sin 2x$가 붙어 있는 형태이다.

우선 삼각함수 $\sin 2x$를 '처음 적분'한다. 그러면 $-\frac{1}{2}cos2x$가 나옴을 확인할 수 있다. 이 값과, $f(x)=x^2$를 취해 곱한다. 그러면 $-\frac{1}{2}cos2x(x^2)$가 나오고 이는 첫 번째 항이 된다.

/ 그 다음부터는 계속 $f(x)$를 미분해간다. /
그리고 삼각함수도 마찬가지로 계속 적분해간다. 그러나 매 항마다 -1을 곱해야 한다.

이를 이렇게 보면 무슨말일지 이해하기가 힘드니 예를 계속 들어 보자.
일단 우리는 $-\frac{1}{2}cos2x(x^2)$를 첫째 항으로 채택하였다. 그리고 둘째 항을 구해야 한다.
일단 $f(x)$는 x^2이었으니 이것을 미분한 $2x$가 두 번째 항이 맞을 것이다.

그럼 삼각함수는? $-\frac{1}{2}\cos 2x$를 다시 적분하면 $-\frac{1}{4}sin2x$이다. 그리고 여기에 -1을 곱해서 $\frac{1}{4}sin2x$ 를 취한다. 따라서 둘째항은 결국 $\frac{1}{4}sin2x$ 곱하기 $2x$가 된다.

그러면 첫째항이 $-\frac{1}{2}cos2x(x^2)$였고 둘째항은 $\frac{1}{4}(\sin 2x)(2x)$가 된다. 즉 이는 $\frac{1}{2}xsin2x$이다.

그러면 셋째항은 무엇일까? 둘째항 $\frac{1}{2}xsin2x$에서 다시 구해보면 $\frac{1}{4}cos2x\,(1)$가 된다.

즉 계속 $\frac{1}{2}$을 곱해가면서 계수를 구해 내고, '부호'만 따로 -1을 곱해 구해내는 것이다.

어쨌거나 적분 결과는 $\int x^2 \sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}cos2x(x^2)+\frac{1}{2}xsin2x+\frac{1}{4}cos2x+C$이다.

예를 하나 더 보자. $\int x^3 \cos\left(\frac{1}{3}x\right)dx$를 구해 보려고 한다.

그럼 바로 종이에 다음과 같이 쓰는 것이다!

$$x^3\left(3\sin\left(\frac{1}{3}x\right)\right)+3x^2\left(9\cos\left(\frac{1}{3}x\right)\right)+6x\left(-27\sin\left(\frac{1}{3}x\right)\right)+6\left(-81\cos\left(\frac{1}{3}x\right)\right)+C$$

1. 첫 번째 항은 다항식 그대로와 삼각함수항을 적분한 것을 곱해주고
2. 두 번째 항부터는 계속 나오는 $\frac{1}{a}$을 하나씩 곱해주며, 부호만 신경써서 체크한다.

※ 간단한 경우의 정리

(1) $\int x^2 \sin x dx$ = $x^2 \cos x - 2xsinx - 2\cos x + c$

(2) $\int x^2 \cos x dx$ = $x^2 \sin x + 2xcosx - 2\sin x + c$

type3. $\int e^{ax}\cos bx dx$ 혹은 $\int e^{ax}\sin bx dx$꼴의 적분식. 이때 a와 b는 상수

이는 쉽게 유도된다.

1. $I=\int e^{ax}\cos bx dx=\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx dx$

근데 $\int e^{ax}\sin bx dx$는 다시 부분적분하면 $\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx dx$, 즉 다음식

$\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a}I$가 된다.

그러면 결국 $I=\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a}(\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a}I)$이므로 정리하면

$$\int e^{ax}\cos bx dx=\frac{a^2}{a^2+b^2}[\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx-\frac{1}{a^2}e^{ax}(-bsinbx)]+C$$

2. 마찬가지로 $\int e^{ax}\sin bx dx$를 구해보면

$$\int e^{ax}\sin bx dx=\frac{a^2}{a^2+b^2}[\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{1}{a^2}e^{ax}(bcosbx)]+C$$

※ 간단한 경우의 정리

$\int e^{x}\cos x dx=\frac{1}{2}e^{x}[\cos x+\sin x]$, $\int e^{x}\sin x dx=\frac{1}{2}e^{x}[\sin x-\cos x]$

※ 참고 $\int \ln(ax+b)dx=\frac{1}{a}(ax+b)\ln(ax+b)-x+C$ 도 알아두면 좋다.

최소한 $\int \ln x dx=xlnx-x+C$라도 알아두자.

2. 헤비사이드 공식과 빠른 일차항 전개

헤비사이드 공식은 다음과 같은 상황에서 사용 가능하다.

1. 유리함수에서 분모의 인수가 모두 일차함수여야 한다.
2. 분자의 차수가 분모의 차수보다 작아야 한다.

그런 상황에서 좀더 빠르게 분수 전개를 할 수 있는 방법을 소개하겠다.

※ $\dfrac{x+4}{x^3+3x^2-18x}$를 분수로 전개해보면서 예를 들어보자.

1) 인수분해

$\dfrac{x+4}{x(x-3)(x+6)}$ … 준식. 이 준식은 위의 조건 1과 2를 모두 만족하고 있다.

2) 미지수 상수가 포함된 전개. 이제부터 분수 전개를 해 보도록 하자

분수 전개 예측: $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x-3}+\dfrac{c}{x+6}$ →이제 a,b,c만 구하면 끝난다

3) a,b,c 미지수 구하기

(1) a: 준식 $\dfrac{x+4}{x(x-3)(x+6)}$에서 x를 없애고 0대입$\left(\dfrac{x+4}{(x-3)(x+6)}\right)$

$\dfrac{0+4}{(0-3)(0+6)}=-\dfrac{2}{9}\quad=a$

(2) b: 준식 $\dfrac{x+4}{x(x-3)(x+6)}$에서 $x-3$를 없애고 3대입$\left(\dfrac{x+4}{(x)(x+6)}\right)$

$\dfrac{3+4}{3(3+6)}=\dfrac{7}{27}\quad=b$

(3) c: 준식 $\dfrac{x+4}{x(x-3)(x+6)}$에서 $x+6$를 없애고 -6대입$\left(\dfrac{x+4}{(x)(x-3)}\right)$

$\dfrac{-6+4}{-6(-6-3)}=-\dfrac{1}{27}\quad=c$

그러면 이렇게 쉽게 a,b,c를 구할 수 있다. 즉

$\dfrac{x+4}{x^3+3x^2-18x}=\dfrac{x+4}{x(x-3)(x+6)}=-\dfrac{2}{9}\dfrac{1}{x}+\dfrac{7}{27}\dfrac{1}{x-3}+\left(-\dfrac{1}{27}\right)\dfrac{1}{x+6}$이다.

그럼 $\displaystyle\int\frac{x+4}{x^3+3x^2-18x}dx=-\frac{2}{9}ln|x|+\frac{7}{27}ln|x-3|-\frac{1}{27}ln|x+6|+C$로 적분 가능하다.

3. 기본 삼각치환 정리 및 공식

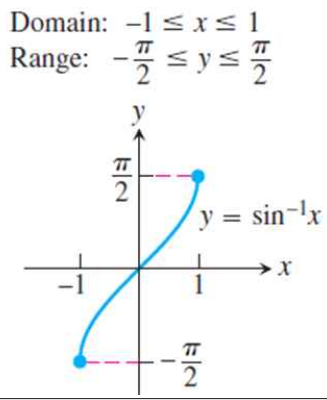
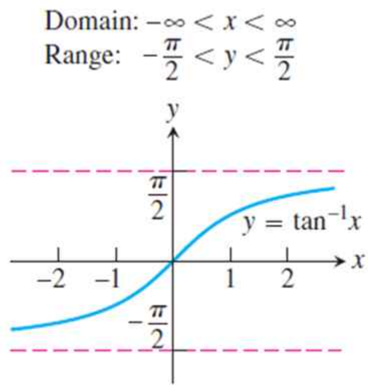
삼각치환을 할 줄 아는 것은 당연한 것이다.
그러나 여기선 한걸음 더 나아가 삼각치환을 보다'정확'하고 '빠르게' 할 수 있는 사실들을 기술하고자 한다.

※ 삼각치환의 기본

식에서의 표현	치환
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x=a\sin\theta$
$\sqrt{a^2+x^2}$	$x=a\tan\theta$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x=a\sec\theta$

이렇게 치환하면 된다는 사실은 누구나 알고 있는 내용이다.
하지만 여기서 문제가 생기는데
1. θ의 범위는 어디서부터 어디까지인가
2. 첫 번째 경우를 보면 치환을 통해 $\sqrt{a^2-x^2}$가 $a|\cos\theta|$로 치환되는데 이때 $\cos\theta$의 범위는 어디인가

와 같은 문제가 생긴다. 그래서 우리는 보다 정확하게 θ의 범위를 설정해 줄 필요가 있는 것이다. 그래서 일반적으로 다음 범위를 선택해 주게 된다

치환	범위	역함수의 그래프
$x=a\sin\theta$	$-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$	
$x=a\tan\theta$	$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$	
$x=a\sec\theta$	경우에 따라 다름	-

위에서 저렇게 θ의 범위를 정해주면 편한데 그 이유는 다음과 같다.

예를 들어서 다음 적분 $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$를 한다고 하자.

그러면 $x=asin\theta$로 당연히 치환을 할 것이다. 그러면 준 적분의 식은

$\int \frac{acos\theta}{a|\cos\theta|}d\theta$ 로 표현되게 된다. 그러면 여기서 $|\cos\theta|$를 어떻게 처리하는가?

바로 여기서 아까 우리가 정한 '범위'를 이용한다.

우리는 범위를 $-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$로 설정했는데 이 범위에서 $\cos\theta > 0$이므로 다시 적분식은

$\int \frac{acos\theta}{a|\cos\theta|}dtheta = \int 1\, d\theta$가 된다고 할 수 있다. 즉 이렇게 범위가 주어져 있어야 성공적으로 적분을 $\theta + C$라는 결론으로 끝맺음 할 수 있다는 것이다.

그러면 다음 삼각치환 공식도 유도해 낼 수 있을 것이다.

※ 기본 삼각치환 공식. 암기가 바탕이 되면 좋음

1. $\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}tan^{-1}(\frac{x}{a}) + c$ ($\frac{1}{a}\theta + c$에서 유래)

2. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \sin^{-1}(\frac{x}{a}) + c$ ($\theta + c$에서 유래)

3. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \int \sec\theta d\theta$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \int \sec\theta d\theta$ (결과가 같음)

4. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}}dx = \frac{1}{a}sec^{-1}|\frac{x}{a}| + c$ <안외워도 됨>

5. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = a^2\int \cos^2\theta d\theta$ <안외워도 됨>

4. 특수한 경우 삼각치환법으로 강제 치환하기

다음과 같은 적분을 어떻게 수행해야 하는가?

$$\int \sqrt{\frac{4-x}{x}}\, dx$$

가장 먼저 생각나는 것은 $\sqrt{x}$ 나 $\sqrt{4-x}$ 등을 어떻게 치환 하는등의 생각일 것이다.
하지만 이 경우에도 '삼각치환'으로 문제를 성공적으로 풀어 낼 수 있다.

삼각치환의 point는 바로 $\sqrt{4-x}$ 인데, 여기서 $\sqrt{x}=2\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$로 치환하는 것이다.

그러면 우리가 바라보아야 할 $\sqrt{4-x}$는 바로 $\sqrt{4-(\sqrt{x})^2}$ 에서 $\sqrt{4-(2\sin\theta)^2}$가 된다는 것.
그러면 좀더 이쁘게 식을 정리할 수 있다. 한번 이 방법으로 결론을 맺어 보자.

$\int \sqrt{\frac{4-x}{x}}\, dx = 4\int 2|\cos\theta|\cos\theta\, d\theta = 8\int \cos^2\theta\, d\theta = 8[\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}sin2\theta] + C$로 적분 가능하다.

※ 다음 적분도 외우면 좋다

$$\int \sin^2 ax dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4a} sin2ax + c,\quad \int \cos^2 ax dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4a} sin2ax + c$$

<$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$를 이용>

그러면 추가적으로 더 이런 특수 삼각함수 치환이 가능한 예제를 보도록 하자.

예제

(1) $\int \sqrt{\frac{x}{1-x^3}}\, dx$를 구하여라

(2) $\int \sqrt{x-x^2}\, dx$를 구하여라

(1) $\int \sqrt{\frac{x}{1-x^3}}\,dx$를 구하여라

이 문제에서는 $x^{\frac{3}{2}}=\sin\theta$로 치환하면 된다. 그러면 $1-x^3$이 $\cos^2\theta$로 예쁘게 변하기 때문이다.

그리고 $\frac{3}{2}\sqrt{x}\,dx=\cos\theta\,d\theta$이므로 이것을 이용하면

$\int \sqrt{\frac{x}{1-x^3}}\,dx=\frac{2}{3}\int \frac{\cos\theta}{|\cos\theta|}d\theta$인데 $x^{\frac{3}{2}}=\sin\theta$로 치환할 때 $\left(-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$로 셋팅 했으니

$=\frac{2}{3}\int \frac{\cos\theta}{|\cos\theta|}d\theta=\frac{2}{3}\int 1d\theta=\frac{2}{3}\theta+C=\frac{2}{3}\sin^{-1}\left(x^{\frac{3}{2}}\right)+C$가 나오게 된다.

(2) $\int \sqrt{x-x^2}\,dx$를 구하여라

문제를 조금 정리하면 $\int \sqrt{x-x^2}\,dx=\int \sqrt{x}(\sqrt{1-x})dx$이다. 여기서 $\sqrt{1-x}$에 주목해서

$\sqrt{x}$를 $\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$라고 치환한다.

그러면 준식은 $\int \sqrt{x}(\sqrt{1-x})dx=\int \sin\theta|\cos\theta|(2\sin\theta\cos\theta)d\theta$

$=2\int \sin^2\theta\cos^2\theta\,d\theta$이다. 정리하려고 보니 딱 형태가 $\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta$를 이용하기 좋아

보인다. 왜냐하면 $\sin^2\theta\cos^2\theta=\frac{1}{4}sin^2 2\theta$이기에.

그러면 준식은 $\frac{1}{2}\int \sin^2 2\theta d\theta$인데 이는 다음과 같이 공식화 할 수 있다고 언급했다.

$$\int \sin^2 axdx=\frac{x}{2}-\frac{1}{4a}sin2ax+c,\quad \int \cos^2 axdx=\frac{x}{2}+\frac{1}{4a}sin2ax+c$$

그러면 준식은 $\frac{1}{2}\int \sin^2 2\theta d\theta=\frac{1}{2}[\frac{1}{2}\theta-\frac{1}{8}sin4\theta]+C$로 정리 가능하고, $\sqrt{x}$를 $\sin\theta$로

치환했었으니 $\theta=\sin^{-1}(\sqrt{x})$를 이용해 다시 대입해 준다. 그러면 준 식은

$\frac{1}{4}sin^{-1}(\sqrt{x})-\frac{1}{16}sin(4(\sin^{-1}(\sqrt{x})))+C$가 된다.

5. 월리스 적분법

$I_n = \int (\sin x)^n dx$는 정말 유명한 식이다. 애초에 이런 삼각함수에 대한 점화식이 딱 풀어내기 좋을 뿐 아니라, 그중에서도 사인이나 코사인은 활용 비율이 높기 때문이다. 일단 이 식을 부분적분을 통해 풀어내면 다음과 같다. (과정은 생략)

$$I_n = \int \sin^n x dx = -\frac{1}{n} sin^{n-1} x cos x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

그렇다면 만약에 정적분을 할 때, 아래끝을 $\frac{t}{2}\pi$, 위끝을 $\frac{m}{2}\pi$꼴로 하면 어떻게 될까?

$(t, m \in Z$(정수))바로 위 식에서의 $-\frac{1}{n} sin^{n-1} x cos x$ 항이 사라지고 결국 다음만 남을 것이다

$$I_n = \int_{\frac{t}{2}\pi}^{\frac{m}{2}\pi} (\sin x)^n dx \text{일 때 } I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

그렇다면 이것을 계속 곱해주면 어떻게 되는가? 예를 들어서 I_6, I_7와 같은 경우

$$I_6 = \frac{5}{6} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times I_0 \qquad I_7 = \frac{6}{7} \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} \times I_1$$

와 같이 매우 간단하게 나올 것이다.

특히 t가 0이고 m이 1인 경우, 즉 $I_n = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin x)^n dx$ 인 경우 특히 더 I_n을 쉽게 구할 수 있는데 그 이유중 하나가 I_0이 $\frac{1}{2}\pi$이고 I_1은 1로 간단히 나오기 때문이다.

그리고 이와 같은 곱 방식을 월리스 곱이라고 한다

<참고>

$$I_n = \int \sin^n x dx = -\frac{1}{n} sin^{n-1} x cos x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

$$I_n = \int \cos^n x dx = \frac{1}{n} cos^{n-1} x sin x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

$$I_n = \int \sec^n x dx = \frac{1}{n-1} sec^{n-2} x tan x + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}$$

$$I_n = \int \csc^n x dx = -\frac{1}{n-1} csc^{n-2} x cot x + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}$$

$$I_n = \int \tan^n x dx = \frac{1}{n-1} tan^{n-1} x - I_{n-2}$$

$$I_n = \int \cot^n x = -\frac{1}{n-1} cot^{n-1} x - I_{n-2}$$

그리고 앞에서 $I_n=\int_{\frac{t}{2}\pi}^{\frac{m}{2}\pi}(\sin x)^n dx$일 때 $I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$라고 설명했는데

생각해 보면 이는 $\cos$에 대해서도 마찬가지이다. 왜냐하면

$$I_n=\int \sin^n x dx=-\frac{1}{n}sin^{n-1}xcosx+\frac{n-1}{n}I_{n-2}$$

이식 말고도 다음식

$$I_n=\int \cos^n x dx=\frac{1}{n}cos^{n-1}xsinx+\frac{n-1}{n}I_{n-2}$$

이 그대로 성립하기 때문에,

$I_n=\int_{\frac{t}{2}\pi}^{\frac{m}{2}\pi}(\cos x)^n dx$일 때 역시 마찬가지로 $\frac{1}{n}cos^{n-1}xsinx$항이 사라지고 $I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$가

남기 때문이다.

그러면 이제 다음과 같은 형태의 정적분은 어떤 경우라도 쉽게 할 수 있을 것이다.

$$I_n=\int_{\frac{t}{2}\pi}^{\frac{m}{2}\pi}(\sin x)^n dx \ / \ I_n=\int_{\frac{t}{2}\pi}^{\frac{m}{2}\pi}(\cos x)^n dx$$

예시는 다음과 같다.

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^4 xdx=\frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\pi, \ \int_{-\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\cos^3 xdx=\frac{2}{3}\int_{-\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\cos xdx=\frac{2}{3}(-1)$$

→이처럼 계산을 매우 빠르고, 간단히 할 수 있는 것이 point이다.

예제

$a_{2n}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}xdx$라고 할 때, $a_{2n}<\frac{1}{2}$가 성립하는 가장 작은 자연수 n을 구하시오

2013 성균관대학교 수시 심층면접

예제

다음 물음에 답하여라

(1) 다음 등식이 성립함을 보여라

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$$ (n은 0 이상의 정수이다)

(2) $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$에 대하여 다음이 성립함을 보여라

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} (n \geqq 2)$$

(3) 음아닌 정수 n에 대하여 $I_{2n+2} \leqq I_{2n+1} \leqq I_{2n}$이 성립함을 증명하여라

(4) 극한값 $\lim_{n \to \infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}$의 값을 구하여라

(5) $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2} \frac{2}{3} \frac{4}{3} \frac{4}{5} \frac{6}{5} \cdots \frac{2n}{2n-1} \frac{2n}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$임을 보여라

이화여대 2017 논술 변형

간략 해설

1. 월리스 곱에 의해 a_{2n}은 $\frac{2n-1}{2n}\frac{2n-3}{2n-2}\cdots\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)$이고 이 값이 $\frac{1}{2}$보다 작으면 된다. 그리고 a_n은 감소함수이다.

몇가지를 구해보면 $a_2=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}>\frac{1}{2}$이다.

$a_4=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{16}>\frac{1}{2}$이다 ($\because 3\pi>8$)

$a_6=\frac{5}{6}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{32}<\frac{1}{2}$ ($\because 32>10\pi$)

따라서 가장 작은 자연수 n은 3이다.

2.

(1) $x+t=\frac{\pi}{2}$를 대입하여 치환적분하면 된다.

참고로 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx$가 성립한다.

(2) $I_n=\int\sin^n x=-\frac{1}{n}sin^{n-1}xcosx+\frac{n-1}{n}I_{n-2}$을 이용하면 쉽게 $I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$임을 알 수 있다.

그리고 $n-2\geqq 0$에서 $n\geqq 2$이다. ($I_0=\frac{\pi}{2}$)

(3) $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx$에서 $0\leqq\sin x\leqq 1$이고, 결국 $0<I_n<\frac{\pi}{2}$은 알 수 있다.(등호는 항등적으로 $\sin x$가 0이나 1이어야 하므로 성립하지 않는다)

그리고 $0\leqq\sin x\leqq 1$에서 이것을 n승한 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx$에서 피적분 함수는 점점 작아지므로 결국 I_n은 감소함수이다. 따라서 $I_{2n+2}\leqq I_{2n+1}\leqq I_{2n}$
가 성립한다.

(4) $1>\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}>\frac{I_{2n+2}}{I_{2n}}=\frac{2n+1}{2n+2}$이고

$\lim_{n\to\infty}1=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n+2}=1$이므로 샌드위치 정리에 의해

$\lim_{n\to\infty}\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}=1$이 된다.

(5) $\lim_{n\to\infty}\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n-1}{2n+1}\frac{2n-3}{2n-1}\frac{2n-5}{2n-3}\cdots\frac{2}{3}\times 1}{\frac{2n-1}{2n}\frac{2n-3}{2n-2}\frac{2n-5}{2n-4}\cdots\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}}=1$

에서 정리하면 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{5}\cdots\frac{2n}{2n-1}\frac{2n}{2n+1}=\frac{\pi}{2}$.

6. 역삼각함수 적분

역삼각함수의 적분: 역삼각함수와 다항식등이 결합된 적분등을 의미한다.

예를 들면 $\int x^2\sin^{-1}xdx$등과 같은 적분을 의미한다.

사인함수의 역함수 말고, '하이퍼볼릭 삼각함수'의 역함수또한 가능하다. 이는 step2에서 볼 수 있다.

풀이방법 ① 치환

$\int x^2\sin^{-1}xdx$를 예로 본다면 $\sin^{-1}x=t$로 치환하는 것이다.

그러면 $\sin t=x$가 되므로 이 적분은 $\int tsin^2t$로 표현 가능하다.

그러면 반각공식을 통해 정리하면 $\int t\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)dt=\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{2}\int tcos2tdt$이다.

앞서 보았던 순간부분적분, 혹은 연속부분적분을 이용한다면

$$\int tcos2tdt=\frac{t}{2}sin2t-\frac{1}{4}cos2t+C$$

이 성립함을 '바로' 알 수 있으므로 정리하면 답을 구할 수 있다.

풀이방법 ② 부분적분

$\int x^2\sin^{-1}xdx$에서 부분적분을 사용한다.

예를 들면 여기서$y=\sin^{-1}x$라 두면, $\frac{d}{dx}sin^{-1}x=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$이 성립하므로

$\int x^2\sin^{-1}xdx=\frac{1}{3}x^3\sin^{-1}x-\frac{1}{3}\int\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$가 된다. 그러면 여기선 $\int\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$를 구해야 한다는 문제점이 있다. 일단 $x=\sin t$로 치환하면 될 것 같은 느낌이 드므로

$\int\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\sin^3tdt$가 나온다. 그리고 이는 다시 부분적분을 이용해 풀어낼 수 있다.

이는 앞서 본 '윌리스 적분'에서 나온 형태라고 볼 수 있다.

※ 참고: 역삼각함수의 미분(쉽게 하는 방법은 뒤에서 다시 소개함)

1. $\frac{d}{dx}sin^{-1}x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	4. $\frac{d}{dx}cot^{-1}x=-\frac{1}{1+x^2}$
2. $\frac{d}{dx}cos^{-1}x=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	5. $\frac{d}{dx}sec^{-1}x=\frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$
3. $\frac{d}{dx}tan^{-1}x=\frac{1}{1+x^2}$	6. $\frac{d}{dx}csc^{-1}x=-\frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$

STEP 2. 적분법의 심화

1. 바이어슈트라스 치환

바이어슈트라스 치환은, 다음과 같은 적분을 할 수 있도록 고안된 치환법이다.

$$\int \frac{1}{\sin x + \cos x} dx$$

이 적분은 일반적인 치환 방법으론 적분하기가 힘들다. 그때 바이어 슈트라스 치환을 사용하는데 이 치환법의핵심은 삼각함수 sinx cosx tanx, 3개의 삼각함수를 '분수식'으로 바꿀 수 있다는 것이다.

이 치환법의 시작은, $t = \tan(\frac{x}{2})(-\pi < x < \pi)$으로 치환하는 것으로부터 시작한다.

그러면 우리는 $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$를 t를 이용한 식으로 표현할 수 있을 것이다.

예를 들면 $\tan x = \dfrac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \dfrac{2t}{1-t^2}$가 성립한다.

$\cos x$를 구해보면 $\cos x = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)^2 - 1$이고 $t^2+1 = \tan\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1 = \sec^2\left(\frac{x}{2}\right)$에서

$\dfrac{1}{1+t^2} = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$이 성립한다 그러면 결국 $\cos x = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)^2 - 1 = \dfrac{2}{1+t^2} - 1 = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$이다

$\sin x$를 구해보면 $\tan x$곱하기 $\cos x$이므로 $\dfrac{2t}{1+t^2}$이다

이를 정리하면 다음과 같다

$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	dx
$\dfrac{2t}{1+t^2}$	$\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$	$\dfrac{2t}{1-t^2}$	$\dfrac{2}{1+t^2}dt$

※ 표에서는 dx도 t와 dt에 관한 이변수 함수로써 나타내었다. 그래야 완벽히 나중에 t에 대한 함수로 순수히 적분을 할 수 있기에.

이러면 이제 삼각함수로 이루어진 적분식을 분수식으로 바꿀 수 있지 않겠는가?

※ TIP 논술에서는 제시문을 주어주거나 아니면 단계별로 증명을 유도하고 충분히 시험에 나올 수 있다

예제

다음 적분을 바이어 슈트라스 치환을 이용해서 적분하여라

(1) $\int \frac{\sin 2x}{2+\cos x}dx$

(2) $\int \frac{1}{\sin x+\cos x}dx$

(3) $\int \frac{\cos x}{\sin x cos x+\sin x}dx$

간략해설

(1) $\int \frac{\sin 2x}{2+\cos x}dx$

이같은 경우는, 그냥 일반적인 치환법을 이용해도 쉽게 해결 가능하다. $\cos x = t$라고 치환하면 그만이기에.

그러나 문제에서 바이어슈트라스 치환을 쓰라고 했으므로 써 보자. 먼저 $\tan\left(\frac{x}{2}\right)=t$로 치환하면

$$\int \frac{\sin 2x}{2+\cos x}dx = \int 2\frac{\sin x \cos x}{2+\cos x}dx = 2\int \frac{\frac{2t}{1+t^2}\frac{1-t^2}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}dt = 4\int \frac{t(1-t^2)}{(t^2+3)(1+t^2)^2}dt$$

$$=4\int\left(\frac{2}{3}\frac{1}{t^2+3}+\frac{1}{3}\frac{1}{(t^2+1)^2}-\frac{2}{3}\frac{1}{t^2+1}\right)dt$$ 이므로 적분 가능해진다.

왜냐하면 $\int \frac{1}{t^2+3}dt = \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)+C$, $\int \frac{1}{t^2+1}dt = \tan^{-1}(t)+C$이기에.

문제는 $\int \frac{1}{(t^2+1)^2}dt$인데 이를 구하는 방법은 다음과 같이 두가지 방법을 생각해 볼 수 있다.

※ $\int \frac{1}{(t^2+1)^2}dt$ 구하기

$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}tan^{-1}(\frac{x}{a})+c$은 이미 알고 있는 정보,

$= \frac{x}{x^2+a^2}+\int \frac{2}{x^2+a^2}dx - \int \frac{2a^2}{(x^2+a^2)^2}dx$는 부분적분을 통해서 다르게 구한 적분.

따라서 이 두가지 방법으로 구해낸 값은 결국 같아야 하므로

$$\frac{1}{a}tan^{-1}(\frac{x}{a})+c = 2a^2\int \frac{1}{(x^2+a^2)^2}dx - \frac{x}{x^2+a^2}$$

따라서 $\int \frac{1}{(x^2+a^2)^2}dx = \frac{1}{2a^2}[\frac{x}{x^2+a^2}+\frac{1}{a}tan^{-1}(\frac{x}{a})]+C$이다

a에 1을 대입한 경우에는

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx = \frac{1}{2}[\frac{x}{x^2+1}+\tan^{-1}x]+C$$

→공식을 외우는 것도 괜찮지만, 그냥 이런 방법을 암기해서 필요한 경우에 사용하여 유도하는 방식도 나쁘지 않다.

따라서 이를 이용해서 1번 적분을 마무리할 수 있다.
다시 말하지만, 이 경우는 이런 치환이 훨씬 복잡해지는 경우이다.
그냥 $\cos x = t$로 치환하는게 훨씬 쉬우므로.

(2) $\int \frac{1}{\sin x + \cos x} dx$

$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	dx
$\frac{2t}{1+t^2}$	$\frac{1-t^2}{1+t^2}$	$\frac{2t}{1-t^2}$	$\frac{2}{1+t^2}dt$

위 표를 이용해서 치환하면

$$\int \frac{1}{\sin x + \cos x} dx = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{1}{1+t^2} dt = \int \frac{1}{2t+1-t^2} dt = \int \frac{1}{2-(t-1)^2} dt$$

$t-1 = X$치환하면 $\int \frac{1}{2-X^2} dX = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sqrt{2}-X} + \frac{1}{\sqrt{2}+X} dX = \frac{1}{2\sqrt{2}} ln\left(\frac{\sqrt{2}+X}{X-\sqrt{2}}\right) + C$

그리고 다시 X자리에 $t-1$을 대입하고, 다시 t자리에 $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$대입시 마무리된다.

(3) $\int \frac{\cos x}{\sin x cosx + \sin x} dx$

$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	dx
$\frac{2t}{1+t^2}$	$\frac{1-t^2}{1+t^2}$	$\frac{2t}{1-t^2}$	$\frac{2}{1+t^2}dt$

위 표를 이용해서 치환하면

$$\int \frac{\cos x}{\sin x cosx + \sin x} dx = \int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{\frac{t}{1+t^2}(1-t^2)+t} dt$$

$$= \int \frac{1-t^2}{t-t^3+t+t^3} dt = \int \frac{1-t^2}{2t} dt = \frac{1}{2} ln|t| - \frac{1}{4}t^2 + C$$

다시 t자리에 $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$대입시 마무리된다.

2. 라이프니츠 적분공식

이번에는 라이프니츠 적분공식을 알아보자. 함수 f가 연속일 때 라이프니츠 공식을 간략히 공식화하면 다음과 같다.

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)dt\right)=b'(x)\times f(x,b(x))-a'(x)\times f(x,a(x))+\int_{a(x)}^{b(x)}\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)dt$$

이 공식을 잘 이해하기 위해 먼저 기초로 돌아가 보자.
다음과 같은 미분의 결과는, 미적분학의 기본정리에 의해 너무나도 당연하다.

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$$

그리고 이를 응용하면 다음식도 성립한다는 것을 알 것이다.($b(x)$는 x에 관한 함수)

$$\frac{d}{dx}\int_a^{b(x)} f(t)dt=b'(x)f(b(x))$$

이를 일반화시키면 (상수 a를, x에 관한 함수 $a(x)$로 변환)

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt=b'(x)f(b(x))-a'(x)f(a(x))$$

이 성립한다. 근데 만약에, 피적분함수 $f(t)$가 아닌, x와 t가 혼합된 어떠한 이계도 함수이면 어떡하는가? 즉 다음과 같은 경우에 말이다.

$$\frac{d}{dx}\int_a^x (x-t)f(t)dt$$

교과서에서 볼 수 있는 정석적인 풀이는, 변수를 아래식과 같이 분리하는 것이다.

$$\int_a^x (x-t)f(t)dt=x\int_a^x f(t)dt-\int_a^x tf(t)dt$$

$$\frac{d}{dx}\int_a^x (x-t)f(t)dt=\int_a^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=\int_a^x f(t)dt$$

근데 여기서 문제가 있다.

1. x와 t가 서로서로 분리가 안된다면? 예를 들어 $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x \ln(x-3t)dt$와 같은 경우.

2. x와 t를 분리해서 적분하는 경우가 가능하긴 한데 복잡해서 시간이 많이 걸리는 경우.

수능이나 논술 같은 경우에는 1번 유형을 걱정할 필요가 없다.
왜냐하면 저런 함수의 미분은 교육과정 내에서 배우지 않은, 즉 '교육과정 외' 과정으로 해결해야 하므로 당연히 저렇게 나올일이 없기 때문이다.

그러면 2번 유형의 문제를 분석해 보자면, 분명 t와 x가 분리 가능해서 문제를 풀 수는 있다. 그래서 얼마든지 시험에 나올 수 있다. 하지만 문제는 계산이 복잡한 경우이다. 그럴 때 바로 이 '라이프니츠 적분법'을 이용할 수 있다. 공식을 다시 보면 다음과 같다.

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)dt\right) = b'(x)\times f(x,b(x)) - a'(x)\times f(x,a(x)) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)dt$$

먼저 공식을 잘 이해해 보자. $a(x)$와 $b(x)$는 x에 대한 함수 두 개일 것이고, $f(x,t)$는 x와 t를 변수로 하는 이변수 함수이다. 즉 예를 들어 $f(x,t) = x + \ln\left(\frac{t}{2x-t}\right)$와 같은 함수 말이다.
이때 $\frac{d}{dx}\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)dt\right)$를 구해 보는 것이다.

우선 우변의 $b'(x)\times f(x,b(x)) - a'(x)\times f(x,a(x))$를 이해해보자. 이 과정은 변수가 하나일때의 상황인 $\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt = b'(x)f(b(x)) - a'(x)f(a(x))$, 이 공식과 너무나도 유사하다!
내부 피적분 함수에 dt가 붙어 있고, 나는 x로 미분하는 이 상황에서
피적분 함수의t자리에 $b(x)$와 $a(x)$를 그대로 넣어준다는 사실이 말이다.
그리고 앞에 튀어 나오는 속미분의 결과까지 똑같다고 할 수 있다.

하지만 여기서 끝이 아니다. 만약 여기서 공식이 끝났다면, 그러니까 즉 만약 공식이

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)dt\right) = b'(x)\times f(x,b(x)) - a'(x)\times f(x,a(x))$$

로 끝났다면 $\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt = b'(x)f(b(x)) - a'(x)f(a(x))$와 다를 것이 없다.

실제로 다시 라이프니츠 공식을 보면, 우변에 $\int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)dt$이 추가로 붙어 있다는 것을 알 수 있다. 여기서 ∂ 기호는 편미분 기호인데, 전혀 어려울 것이 없다. 이 뜻은 이변수 함수 $f(x,t)$에 대해서 t를 '상수'로 보고 'x'에 대해서만 미분하는 것이다.

예를 들면 $f(x,t) = 3x - 2t$라고 했을 때 $\frac{\partial}{\partial x} f(x,t)$는 3이다.

$f(x,t) = x^2 t - 2x$라고 했을 때 $\frac{\partial}{\partial x} f(x,t)$는 $2xt - 2$이다.

그러면 이제 공식의 의미는 설명이 다 된 것으로 알고 예를 들어보겠다.

먼저 앞에서 본 $\int_a^x (x-t)f(t)dt$를 미분해 보자.

공식을 이용하면 $\frac{d}{dx}\int_a^x (x-t)f(t)dt = \int_a^x f(t)dt$가 곧바로, 그냥 바로 나와서 종이에 적을 수 있음을 확인하라. 사고 과정은 다음과 같다

1. 이변수 함수가 들어있고 라이프니츠 법칙을 쓸 수 있음을 확인
2. 먼저 t자리에 x대입. 결과는 0
3. 인테그랄의 밑이 a, 즉 상수이므로 이 부분에 대해서는 생각할 필요 없음
4. $\int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)dt$를 구해야 함. 즉 $\frac{d}{dx}\int_a^x (x-t)f(t)dt$에서 $(x-t)f(t)$를 x에 대해 미분해야 한다는 뜻이다. 근데 미분하면 바로 $f(t)$가 쉽게 나옴을 확인할 수 있다.

그러면 $\int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)dt$는 $\int_a^x f(t)dt$로 나오게 되고 앞의 과정과 합쳐주면 0그냥 이게 답이다

예시) 2013 경찰대 문제

14. 다음을 만족시키는 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)$의 값은?

$$\int_1^x (x-t)f(t)\,dt = x^4 + ax^2 - 10x + 6$$

① 18 ② 21 ③ 24 ④ 27 ⑤ 30

물론 교과서 과정의 정식 풀이대로 풀어도 시간이 그렇게 많이 걸리지는 않는다

예시) 2010년 9월 모의고사

21. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 양수 x에 대하여

$$\int_0^x (x-t)\{f(t)\}^2 dt = 6\int_0^1 x^3(x-t)^2 dt$$

를 만족시킨다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $x=1$, x축, y축으로 둘러싸인 도형을 x축의 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피를 $a\pi$라 할 때, a의 값을 구하시오. [4점]

물론 교과서 과정의 정식 풀이대로 풀어도 시간이 그렇게 많이 걸리지는 않는다

※ 간단한 경우의 예시

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^b f(x,t)dt\right) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)dt$$

가 됨을 확인할 수 있다.

예제

30. 함수

$$f(x)=\begin{cases} e^{x} & (0 \le x < 1) \\ e^{2-x} & (1 \le x \le 2) \end{cases}$$

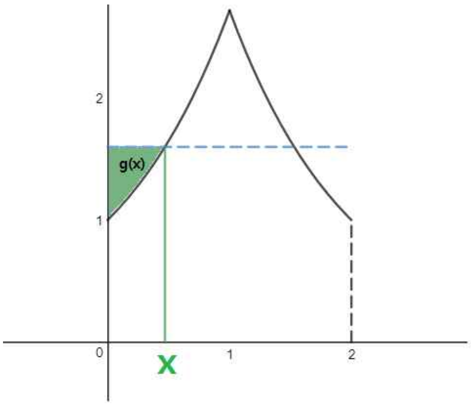
에 대하여 열린 구간 $(0,\ 2)$에서 정의된 함수

$$g(x)=\int_{0}^{x} |f(x)-f(t)|\,dt$$

의 극댓값과 극솟값의 차는 $ae+b\sqrt[3]{e^2}$이다. $(ab)^2$의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이다.) [4점]

2018 고3 3월 모의고사 30번

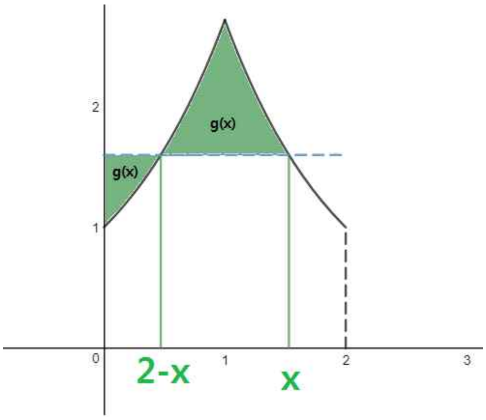
1. $0 \leqq x \leqq 1$



$$g(x)=\int_0^x [e^x - e^t]dt$$

$$g'(x)=\int_0^x e^x dt = xe^x$$

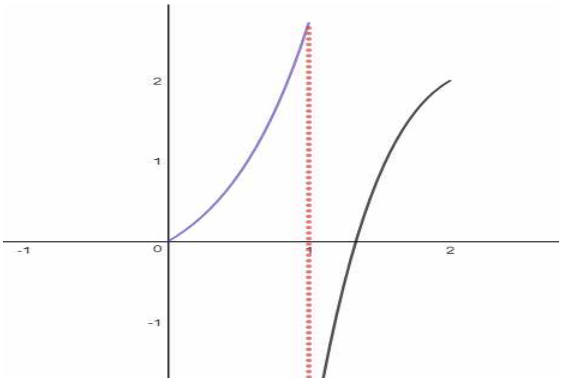
2. $1 \leqq x \leqq 2$



$$g(x)=\int_0^{2-x}[e^{2-x}-e^t]dt+2\int_{2-x}^1 [e^t - e^{2-x}]dt$$

$$g'(x)=\int_0^{2-x}(-e^{2-x})dt+2\int_{2-x}^1 e^{2-x}dt=e^{2-x}(3x-4)$$

$g'(x)$의 그래프를 그리면



극값을 어디에서 가질지 확인 가능하다.

바로 이 $g'(x)$의 그래프와, $g(x)$가 연속하다는 조건을 통해서 말이다. (g가 연속한 이유는 그래프의 넓이가 연속적으로 변함을 통해 확인해도 됨)

우선 $x=\dfrac{4}{3}$에서 극솟값을 가짐은 자명하고

$x=1$위치에서 보아야 한다.

$g(x)$가 연속함을 이용하면 $x=1$에서 $g(x)$가 극대를 가짐도 확인 가능하다.

근데 짜증나게도 $g(1)$과 $g(4/3)$을 구해야 한다. $g(0)=0$을 이용하면

1. $0 \leqq x \leqq 1$**에서** $g'(x)=xe^x \rightarrow g(x)=e^x(x-1)+1$ $,g(1)=1$ **<이런 적분은 바로 가능해야함>**

2. $1 \leqq x \leqq 2$**에서** $g'(x)=e^{2-x}(3x-4) \rightarrow g(x)=-e^{2-x}(3x-1)+2e+1$

그럼 $g(1)-g\left(\dfrac{4}{3}\right)=3e^{\frac{2}{3}}-2e$**에서** $a=-2$, $b=3$**이다. 답은 36.**

예제

30. 실수 t에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} 1-|x-t| & (|x-t|\le 1) \\ 0 & (|x-t|>1) \end{cases}$$

이라 할 때, 어떤 홀수 k에 대하여 함수

$$g(t)=\int_{k}^{k+8} f(x)\cos(\pi x)dx$$

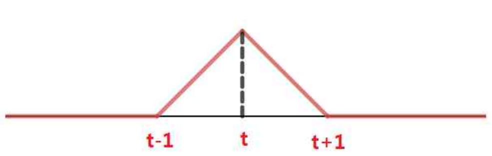
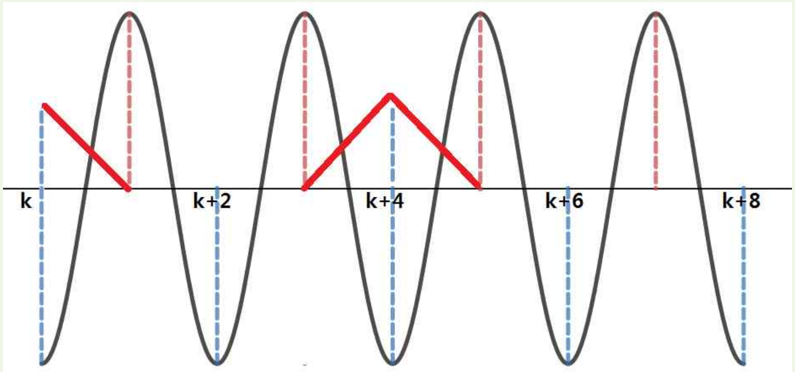
가 다음 조건을 만족시킨다.

> 함수 $g(t)$가 $t=\alpha$에서 극소이고 $g(\alpha)<0$인 모든 α를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_m$ (m은 자연수)라 할 때, $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i=45$이다.

$k-\pi^2\sum_{i=1}^{m}g(\alpha_i)$의 값을 구하시오. [4점]

2017 수능 30번

다음 그래프는 기본적으로 떠올려 준다. 우선 $g(x)$는 $x=k+4$에 대한 선대칭임을 추론 가능.

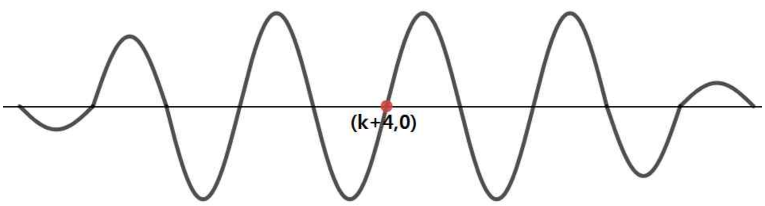
$f(x)$	$\cos(\pi x)$
	

그리고 다음 적분식까지는 쓸 수밖에 없다. 어차피 $g(t)$는 선대칭일테니 다음 3개만 한다.

범위	$g(t)$
$k-1 \leqq t \leqq k$	$g(t)=\int_{k}^{t+1}(-x+t+1)\cos\pi x dx$
$k \leqq t \leqq k+1$	$g(t)=\int_{k}^{t}(x-t+1)\cos\pi x dx+\int_{t}^{t+1}(-x+t+1)\cos\pi x dx$
$k+1 \leqq t \leqq k+7$	$g(t)=\int_{t-1}^{t}(x-t+1)\cos\pi x dx+\int_{t}^{t+1}(-x+t+1)\cos\pi x dx$

범위	극값을 찾기 위해 미분: $g'(t)$
$k-1 \leqq t \leqq k$	$g'(t)=\int_{k}^{t+1}\cos\pi x dx=[\frac{1}{\pi}sin\pi t]_{k}^{t+1}=-\frac{1}{\pi}sin\pi t$
$k \leqq t \leqq k+1$	$g'(t)=\cos\pi t+\int_{k}^{t}-\cos\pi x dx-\cos\pi t+\int_{t}^{t+1}\cos\pi x dx$ $=[\frac{1}{\pi}sin\pi t]_{t}^{t+1}$-$[\frac{1}{\pi}sin\pi t]_{k}^{t}=-\frac{3}{\pi}sin\pi t$
$k+1 \leqq t \leqq k+7$	$g'(t)=\cos\pi t+\int_{t-1}^{t}-\cos\pi x dx+(-\cos\pi t)+\int_{t}^{t+1}\cos\pi x dx$ $=$-$[\frac{1}{\pi}sin\pi t]_{k}^{t}$+$[\frac{1}{\pi}sin\pi t]_{t}^{t+1}=-\frac{4}{\pi}sin\pi t$

선대칭함수를 미분하면 점대칭이 됨을 이용한다. 왜냐면 만약 $f(x)=f(a-x)$이면 $f'(x)+f'(a-x)=0$에서 이 함수는 $(a/2,0)$을 기준으로 점대칭이 된다. 이제 $g'(x)$를 그리면 된다



$(k+4,0)$을 기준으로 점대칭이다. 이렇게 하면 극솟값이 $t=k,k+2,k+4,k+6,k+8$에서 나옴을 확인 가능하므로 더해주면 $k=5$이다

그럼 구해야할 값은 이제 $g(k)+g(k+2)+g(k+4)+g(k+6)+g(k+8)$이다. 근데 $g(k+2)=g(k+4)=g(k+6)=2g(k)$와 $g(k+8)=g(k)$임을 확인 가능하다. 그 이유는 맨 위 그림에서 단순히 넓이로 파악 가능하다. 반만 걸쳐있는 $g(k)$나 $g(k+8)$의 상황에 비해, $g(k+2,4,6)$은 두 개가 같이 걸쳐있기 때문이다. 그럼 구하고자 하는 답은 5-$\pi^2 8g(5)$이다. 그러면 $g(5)$를 찾자.

$g(5)=\int_{5}^{6}(6-x)\cos\pi x dx=-\int_{5}^{6}x\cos\pi x dx=-[\frac{1}{\pi^2}cos\pi x]_{5}^{6}=-\frac{2}{\pi^2}$. 그럼 답은 $5+16=21$이다.

지금까지 몇가지 예시를 살펴 봤는데 여기서의 공통점은 바로
'계산을 줄일 수 있다' 라는 것이다.

실제로 이전페이지에 기술된 풀이는, 저게 다이다. 그러니까

기타 계산이 필요 없이 바로 종이에 저렇게 적을 수 있다

라는 것이다. 하지만 이렇게 풀기 위해선 몇가지 주의할 점이 있다.

1. 여러 가지 적분 계산을 암기해야 한다
예를 들어 다음 계산

$$g(5)=\int_5^6(6-x)\cos\pi x dx=-\int_5^6 x\cos\pi x dx=-[\frac{1}{\pi^2}\cos\pi x]_5^6=-\frac{2}{\pi^2}$$

을 바로 종이에 다른 계산 없이 써 내려갈 줄 알아야 한다. 이렇게 할 수 있기 위해서는 암산도 적절히 필요하고 또 앞서 소개한 step1의 적분들을 잘 알아 두어야 한다.

실제로 저 계산을 할때의 사고 흐름은 다음과 같다

사고 흐름	종이에 쓰는 것
$g(k)$즉, $g(5)$를 구해야 하겠다	$g(5)=\int_5^6(6-x)\cos\pi x dx$
$\int_5^6(6-x)\cos\pi x dx$중에서 $6\int_5^6\cos\pi x dx$=0이잖아!	$=-\int_5^6 x\cos x\pi x dx$
이 계산은 step1의 순간 부분적분법이네	$=-[\frac{x}{\pi}\sin\pi x+\frac{1}{\pi^2}\cos\pi x]_5^6$
$\sin 5\pi=\sin 6\pi=0$이니 걍 이값은 $-\frac{2}{\pi^2}$구나	$=-\frac{2}{\pi^2}$

근데 이 과정을 빠르고 잘 할 수 있기 위해서는, 많은 연습과 익숙함이 필요하다

2. 헷갈림
일단 라이프니츠 적분을 사용할 때 t와 x의 변수 구분을 잘 해야 한다는 것이 먼저 헷갈리는 점이다. 따라서 어줍짢게 이 공식을 대충 맛만 보려고 한다면, 오히려 더 헷갈리는 악영향을 낳을 수 있다.
그리고 순간 부분적분법 등의 공식을 사용할 때 부호를 잘못본다거나, 혹은 계수를 틀린다거나 하는 등의 실수를 할 수 있다. 다시 말하지만, 어줍짢에 공식을 암기해서 실수를 통해 틀리는 것 만큼 추한게 없다. 할거면 뭐든 제대로 하는 것이 좋다.
그런데 이런 걸 제대로 하기에는 시간이 좀 부족하다거나, 혹은 다른걸 하는게 현재로 봤을 때 더욱 효율적인 사람도 있을 것이기에, 알아서 취사선택 하기를 바란다.

3. 덧
위의 두가지 모의고사 / 수능 문제의 예시는 단편적인 것이다. 단지 내가 올해 문제만을 확인했을 때 저 두 문제가 라이프니츠 적분법을 통해 풀린다는 것을 확인한 것이다. 더 많은 문제들이 저 방식으로 풀릴 수도, 아닐 수도있다.

※ 기타 심화) 라이프니츠 적분법으로 본격적인 적분하기: 라이프니츠 공식을 이용한 특수'적분'
다른 예시들은 너무 교육과정을 벗어나서 제외. 더 알아보고 싶은 분들은 위키백과 참조.

예제

$\int_0^{2\pi} \ln(1+\alpha\cos x)dx = 2\pi\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{2}\right)$임을 증명하여라

$\int_0^{2\pi} \ln(1+\alpha\cos x)dx = 2\pi\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{2}\right)$를 α에 대한 함수로 보고 양변을 미분해서 같음을 확인하고 논리를 전개한다. 참고로 과정중에 바이어슈트라스 치환법이 필요하다.

※ 참고: 라이프니츠 공식의 증명

$\frac{d}{dx}\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)dt\right) = b'(x) \times f(x,b(x)) - a'(x) \times f(x,a(x)) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)dt$을 증명해보자.

어떤 함수의 미분이든, '기초로 돌아가서' 정의를 사용한다.

여기서는 $g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$라는 정의를 이용할 것이다.

$\frac{d}{dx}\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)dt\right) = \lim_{h \to 0} \frac{\int_{a(x+h)}^{b(x+h)} f(x+h,t)dt - \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)dt}{h}$이다.

여기서 분자를 조금 정리할 것이다.

$$\int_{a(x+h)}^{b(x+h)} f(x+h,t)dt - \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)dt$$

$$= \int_{a(x)}^{b(x)} [f(x+h,t) - f(x,t)]dt + \int_{a(x+h)}^{b(x+h)} f(x+h,t)dt - \int_{a(x)}^{b(x)} f(x+h,t)dt$$

$$= \int_{a(x)}^{b(x)} [f(x+h,t) - f(x,t)]dt + \int_{a(x+h)}^{b(x)} f(x+h,t)dt + \int_{b(x)}^{b(x+h)} f(x+h,t)dt$$

$$+ \int_{b(x)}^{a(x+h)} f(x+h,t)dt + \int_{a(x+h)}^{a(x)} f(x+h,t)dt$$

$= \int_{a(x)}^{b(x)} [f(x+h,t) - f(x,t)]dt + \int_{b(x)}^{b(x+h)} f(x+h,t)dt - \int_{a(x)}^{a(x+h)} f(x+h,t)dt$이다.

그러면 $\lim_{h \to 0} \frac{\int_{a(x+h)}^{b(x+h)} f(x+h,t)dt - \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)dt}{h} = \lim_{h \to 0} \int_{a(x)}^{b(x)} [\frac{f(x+h,t) - f(x,t)}{h}]dt +$

$\lim_{h \to 0} \frac{b(x+h) - b(x)}{h} f\left(x+h, t_1^*\right) - \lim_{h \to 0} \frac{a(x+h) - a(x)}{h} f\left(x+h, t_2^*\right)$ <적분의 평균값 정리 사용.>

그리고 이때 t_1^*은 $b(x)$와 $b(x+h)$사이, t_2^*는 $a(x)$와 $a(x+h)$에 존재한다.

그러면 h가 0으로 갈 때 각각 t_1^*은 $b(x)$, t_2^*는 $a(x)$으로 수렴한다. 그러면 정리하면

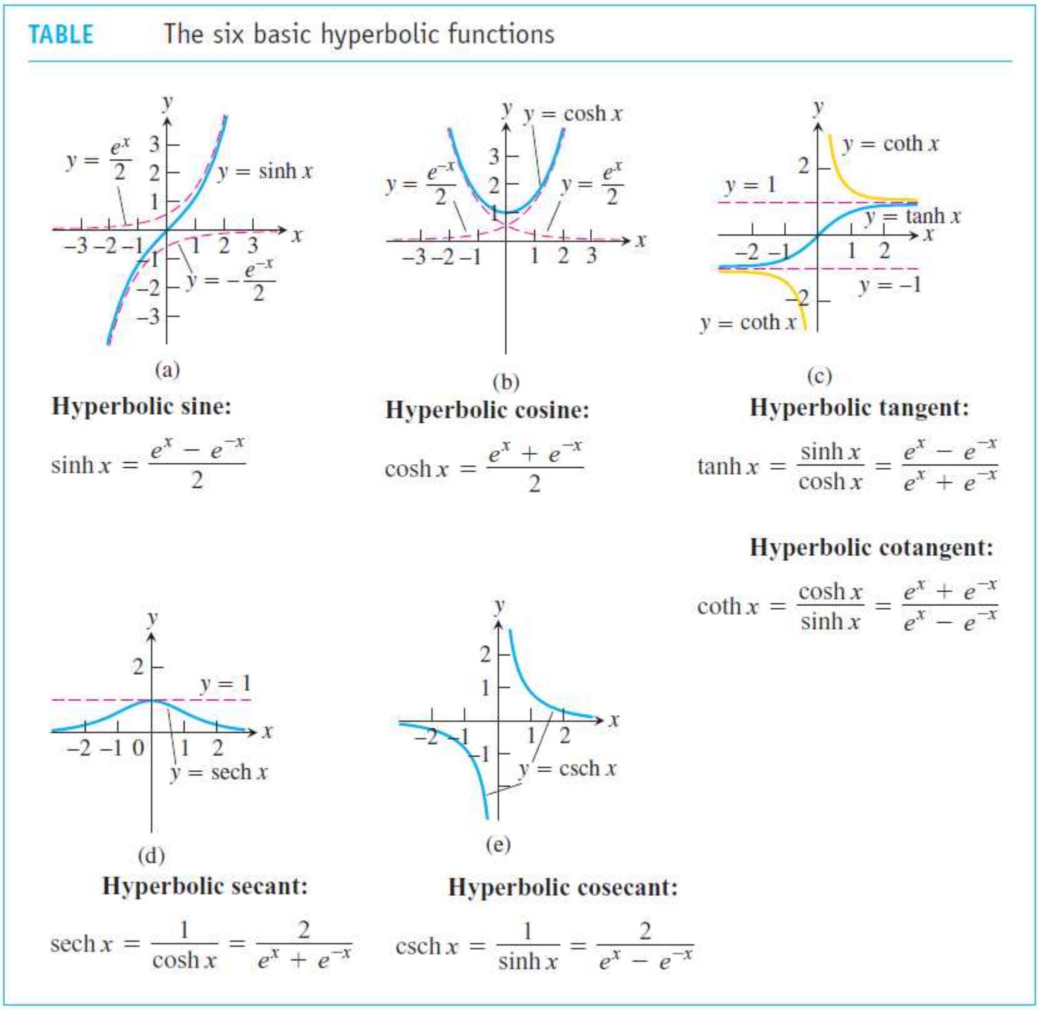
$$\lim_{h \to 0} \frac{\int_{a(x+h)}^{b(x+h)} f(x+h,t)dt - \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)dt}{h} = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)dt + b'(x)f(x,b(x)) - a'(x)f(x,a(x))$$

가 나오고 순서만 약간 바꿔 주면 결국 다음식이 유도된다.

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)dt\right) = b'(x) \times f(x,b(x)) - a'(x) \times f(x,a(x)) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)dt$$

3. 하이퍼볼릭함수를 이용한 치환

1. 하이퍼볼릭함수의 소개



하이퍼볼릭 함수는 위와 같이 정의하게 된다.

예를 들어 $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$인 것이다. 그렇게 하면 $\sinh^{-1}x$도 쉽게 구할 수가 있다.

한번 역함수를 구해 보도록 하자. 우선 $\sinh x$가 일대일 대응이므로 역함수가 존재한다.

$y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$에서 x, y를 바꿔 보면 $x = \dfrac{e^y - e^{-y}}{2}$가 나온다. $e^y = t > 0$로 치환하면

$2x = t - \dfrac{1}{t}$가 나오고 정리하면 $t^2 - 2xt - 1 = 0$이다. 근의공식을 써서 정리하면

$t = x \pm \sqrt{x^2+1}$인데 $t > 0$라는 조건에서 $t = x + \sqrt{x^2+1}$이다.

그러면 결국 $e^y = x + \sqrt{x^2+1}$이므로 $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$이다.

즉 $\sinh^{-1}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$인 것이다.

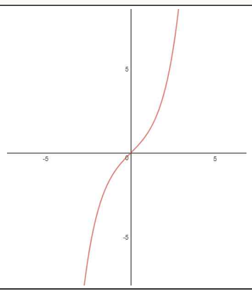
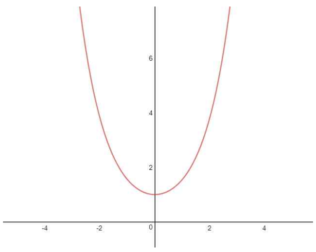
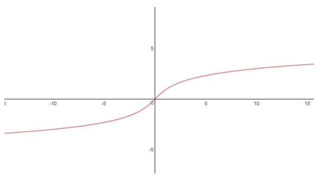
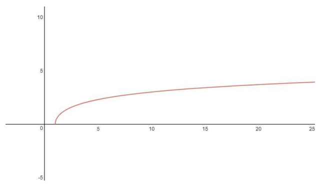
마찬가지로 $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$도 역함수를 구할 수 있다. 그런데 일단 이 함수는 일대일 대응이 아니므로 정의역을 제한시켜야 한다. 그래서, 가장 편한 $\{x | x \geq 0\}$으로 정의역을 제한시킨다. 그러면 그 구간에서는 $\cosh x$가 일대일 대응이 되고, 치역은 $\{y | y \geq 1\}$이 된다. 그러면 역함수의 정의역이 $\{x | x \geq 1\}$이 됨을 예상할 수 있다.

$y=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}\{x|x \geqq 0\}$에서 x,y를 바꿔 주면 $x=\dfrac{e^{y}+e^{-y}}{2}$이다. 그리고 이때 $\{x|x \geqq 1\},\{y|y \geqq 0\}$이 성립한다. 그리고 $e^{y}=t \geqq 1$로 치환하게 되면

$2x=t+\dfrac{1}{t}$, $t^{2}-2xt+1=0$이다. 그러면 $t=x \pm \sqrt{x^{2}-1}$이 된다. 그리고 $\{y|y \geqq 0\}$로부터

$t \geqq 1$이라는 조건을 생각하면 $t=x-\sqrt{x^{2}-1}$은 안됨을 예상할 수 있다. 엄밀한 논의를 해 보면 $x-\sqrt{x^{2}-1} \geqq 1$으로 가정해 보면 $x-1 \geqq \sqrt{x^{2}-1}$, $x \geqq 1$이다. $\sqrt{x-1} \geqq \sqrt{x+1}$이 되어 모순이다.

따라서 $t=x+\sqrt{x^{2}-1}$에서 결국 $e^{y}=x+\sqrt{x^{2}-1}$에서 $y=\ln\left(x+\sqrt{x^{2}-1}\right)$이다.
즉 $\cosh^{-1}x=\ln\left(x+\sqrt{x^{2}-1}\right)$인 것이다. 이들을 그림으로 나타내면 다음과 같다

$\sinh x$	$\cosh x$	$\sinh^{-1}x$ $=\ln\left(x+\sqrt{x^{2}+1}\right)$	$\cos^{-1}x$ $=\ln\left(x+\sqrt{x^{2}-1}\right)$
			

2. 하이퍼볼릭함수의 성질

① $\cosh x$미분시 $\sinh x$, $\cosh x$적분시 $\sinh x$ / $\sinh x$미분시 $\cosh x$, $\sinh x$적분시 $\cosh x$

② $\cosh^{2}x=\sinh^{2}x+1$

③ $\sinh 2x=2\sinh x cosh x$

→모두 직접 정의를 대입해 유도 가능하다

④ $\cosh^{2}x=\dfrac{\cosh 2x+1}{2}$

⑤ $\sinh^{2}x=\dfrac{\cosh 2x-1}{2}$

→모두 직접 정의를 대입해 유도 가능하다

3. 적분법에 활용

① $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx\,(a>0)$

이 적분을 보통 우리는 삼각치환을 통해 했지만 이제 하이퍼볼릭함수 치환을 통해 더욱 쉽게 구할 수 있다.

$x=asinht$이라고 치환한다. 그 이유는 그렇게 치환하면 $x^2+a^2=a^2(1+\sinh^2 t)=a^2\cosh^2 t$으로 정리가 간편해 지기 때문이다.

그러면 준식은 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx=\int \frac{acosht}{acosht}dt=t+C=\sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C$이다.

앞서 $\sinh^{-1}x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$임을 구했으니 대입하면

$\sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)=\ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}\right)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)-\ln a$을 대입한다

그러면 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx=\sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C\;=\;=\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)-\ln a+C$

인데 어차피 C나 $-\ln a+C$나 어떠한 상수이므로 그냥 C로 퉁치면

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx=\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C$$

로 표현할 수 있다.

② $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx\,(a>0)$

이번에는 마찬가지로 $x=acosht$를 대입한다. 그러면 역시 결과는 $\cos^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C$가 나오고

$\cosh^{-1}x=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$을 다시 이용하면 이 식은 $\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)+C$로 곧바로 치환 가능하다

③ $\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx\,(a>0)$

마찬가지로 $x=asinht$를 대입한다. 그러면 준식은 $a^2\int \cosh^2 t dt$이다. 그럼

$\cosh^2 t=\frac{\cosh 2t+1}{2}$에서 $a^2\int \cosh^2 t dt=a^2\left(\frac{t}{2}+\frac{1}{2}sinhtcosht\right)+C$

$=\frac{a^2}{2}ln\left(a+\sqrt{x^2+a^2}\right)+\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+C$가 나오게 된다. 이렇게 증명하기 싫으면 다음

부분적분을 사용해도 된다. $I=\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx=x\sqrt{x^2+a^2}-I+\int \frac{a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx$에서 정리.

④ $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx\,(a>0)$

마찬가지로 정리하면 $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx=\frac{a^2}{2}ln\left(a+\sqrt{x^2-a^2}\right)+\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}+C$

예제

다음 제시문을 보고 물음에 답하여라

히이퍼볼릭 사인함수와 코사인함수를 다음과 같이 정의한다.

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ \mathrm{sech}\, x = \frac{1}{\cosh x}$$

그리고 하이퍼볼릭 탄젠트 함수를 다음과 같이 표현할 수 있다고 한다

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x},\ 1 - \tanh^2 x = \mathrm{sech}^2 x$$

(1) $\tanh x$의 도함수를 구하고 $\mathrm{sech}\, x$로 표현하시오

(2) $y = \tanh^{-1}(x)$의 도함수를 구하시오

(3) 다음 적분의 값을 구하시오

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sec^2 x\, tanh^{-1}(\sin x)\, dx$$

풀이

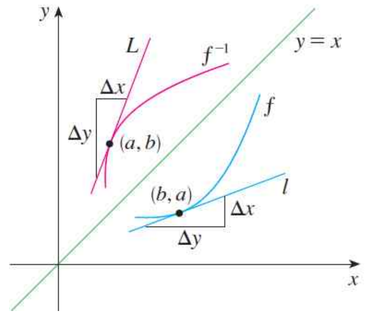
1. $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$에서 곱의 미분법을 사용하면

$\dfrac{d}{dx} tanh x = \dfrac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x = \text{sech}^2 x$이다.

2. $y = \tanh^{-1}(x)$의 도함수를 구해야 하니 역함수 미분법이다.

그러면 바로 1번에서부터 $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\sec^2 y} = \dfrac{1}{1 - \tanh^2 y} = \dfrac{1}{1 - x^2}$임을 알 수 있다.

<역함수 미분법 특강>



Theorem If f is a one-to-one differentiable function with inverse function f^{-1} and $f'(f^{-1}(a)) \neq 0$, then the inverse function is differentiable at a and

$$(f^{-1})'(a) = \frac{1}{f'(f^{-1}(a))}$$

그림, 표출처: stweart 8/e

다음식을 반드시 기억하자

- -

<흔히 역함수 미분시에 헷갈리는 경우>

첫 번째 학생: $y = \sin x$에서.... x와 y를 바꾸어야 역함수겠지? 그러면 $x = \sin y$인가. 흠 역함수 미분이니까 지금 미분을 해야 하나? 해 보자 어 근데 x로 미분해야 하나 y로 미분해야 하나... 모르겠네 바꿨으니까 y로 미분해야 하나? 아님 그냥 함수니까 하던대로 x로 미분해야 하나? 바뀌었으니 y로 해 보자.

어 그러면 $\dfrac{dx}{dy} = \cos y$가 나오네 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}$인가? 근데 여기서 $\dfrac{dy}{dx}$가 뭐지? 무슨 도함수지 $\sin x$의 도함수인가 $\sin^{-1} x$의 도함수인가.....

두 번째 학생: $(\sin^{-1} x)' = \dfrac{1}{\cos y}$이네 끝

방법: $\sin x$을 미분하면 $\cos x$이다. 이 때 x자리에 y를 대입하고 역수취한다. 그럼 $\dfrac{1}{\cos y}$가 바로 나온다.

이때 $y = \sin^{-1} x$이며 이 방법이 그냥 ***역함수 미분의 '정의'*** 라고 생각하자

3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sec^2 x tanh^{-1}(\sin x) dx$ 구하기

(2)에서 탄젠트 하이퍼볼릭 역함수의 미분을 써 먹으라고 준 것일테니 $\dfrac{d}{dx} tanh^{-1}(\sin x)$

$= \dfrac{1 \times \cos x}{1 - \sin^2 x} = \sec x$이다. 그럼 이를 부분적분에 활용해 볼 수 있다.

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sec^2 x tanh^{-1}(\sin x) dx = [\tan x \times \tanh^{-1}(\sin x)]_0^{\pi/6} - \int_0^{\frac{\pi}{6}} \tan x sec x dx$$

$= \dfrac{\tanh^{-1}(1/2)}{\sqrt{3}} - [\sec x]_0^{\pi/6}$에서 $\tanh^{-1}(1/2) = x$로 두면 $\tanh x = 1/2 = (e^x - e^{-x})/(e^x + e^{-x})$이고

이를 풀면 $x = \dfrac{1}{2} ln 3$이다. 이를 대입하면 답은 $\dfrac{\sqrt{3}}{6} ln 3 - \dfrac{2}{\sqrt{3}} + 1$이 나온다.

4. CYCLE 적분

① 불가능하거나 어려운 적분형태가 상쇄되어 없어지는 유형

예제[서울과학고 내신 기출]) $\int (2x^2+x+1)e^{x^2+x}dx$를 어떻게 구해주면 좋을까? 문제 형태상 치환이나 부분적분을 해야 한다는 느낌이 올 것이나, 시작을 하기가 조금 버겁다.

결론부터 말하자면 풀이 방법은 다음과 같다.

$\int (2x^2+x+1)e^{x^2+x}dx = \int x(2x+1)e^{x^2+x}dx + \int e^{x^2+x}dx$이다. 첫 번째 항 $\int x(2x+1)e^{x^2+x}dx$에서 $(2x+1)e^{x^2+x}$의 적분 형태가 딱 e^{x^2+x}이므로 부분적분하기가 딱 좋은 형태이다.

그러면 이것은 $xe^{x^2+x} - \int e^{x^2+x}dx$로 표현 가능하다.

근데 두 번째 항이 $\int e^{x^2+x}dx$이므로 더해주면

$xe^{x^2+x} - \int e^{x^2+x}dx + \int e^{x^2+x}dx$으로 항이 상쇄되어 소거되는 것을 볼 수 있다.

근데 그렇다고 해서 답을 xe^{x^2+x}로 쓰면 안된다. 부정적분이었기 때문에 상수 C를 붙여서, $xe^{x^2+x}+C$로 답을 내야 완벽하다.

예제[stewart8/e 7.5절 46]) $\int \frac{(x-1)e^x}{x^2}dx$와 같은 적분도 마찬가지이다.

이것을 풀어주면 $\int \frac{1}{x}e^x - \frac{1}{x^2}e^x dx$가 나오고 분해하면 $\int \frac{1}{x}e^x dx - \int \frac{1}{x^2}e^x$이다.

$\int \frac{1}{x}e^x dx$를 부분적분해 보자. 그러면 이것은 $\frac{1}{x}e^x + \int \frac{1}{x^2}e^x dx$이다.

그러면 두 항을 합쳐주면 $\frac{1}{x}e^x + \int \frac{1}{x^2}e^x dx - \int \frac{1}{x^2}e^x$가 나오고 적분하기 까다로운 항이 소거되는 것을 볼 수 있다.

그러면 역시 적분상수를 붙여서, 답은 $\frac{1}{x}e^x + C$로 나타낼 수 있다.

② 적절한 치환을 통해서 정적분 값을 뽑아내는 유형

흔한 몇가지 예시를 통해 설명하도록 하겠다

$\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3}{8}\pi}\frac{dx}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}}$와 같은 적분값을 어떻게 구하면 좋을까?

결론부터 말하자면, $x+t=\frac{\pi}{2}$라는 수식과 더불어 t를 이용해 치환하는 것이다.

그러면 이 식은 $I=\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3}{8}\pi}\frac{dx}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}}=\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}}\frac{1}{1+\tan^{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}dt$

그런데 $\tan\left(\frac{\pi}{2}-t\right)$는 공식을 사용하면 $\frac{1}{\tan t}$이므로 대입하면

$I=\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}}\frac{(\tan t)^{\sqrt{2}}}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}}dt$이다. 따라서 $I+I=2I=\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}}\frac{(\tan t)^{\sqrt{2}}}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}}dt+\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3}{8}\pi}\frac{dx}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}}$

$=\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}}1dt=\frac{\pi}{4}$이다. 따라서 $I=\frac{\pi}{8}$이고 답이 나온다.

이와 같은 예시는 종종 논술이나 심층문제에서 나오곤 하니 잘 익혀두도록 하자.

특히 $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx$와 같은 경우는 언제나 $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)dx$와 동일하다는 것도 역시 익혀두자.

이는 $x+t=\frac{\pi}{2}$로 쉽게 증명할 수 있다.

예제

(1) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)dx$를 구하여라

(2) $\int_{0}^{\pi} \frac{x sin x}{1+\cos^2 x}dx$를 구하여라

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)dx$

이때 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)dx$라고 두고 $x+t=\frac{\pi}{2}$라고 치환하면 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)dx$이다.

이때 $I+I$를 생각하면 $2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x cos x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\ln(\sin 2x)-\ln 2]\,dx$이다

그러면 $2I=\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin x)dx-\frac{\pi}{2}ln2$이다.

이때 $\int_0^{\pi} \ln(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin x)dx=I+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin x)dx$이다.

이때 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin x)dx$를 구하기 위해 $t=x-\pi$로 치환해 주면 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin x)dx$는

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \ln(-\sin t)dt=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \ln(\sin(-t))dt$이니 $-t=p$로 치환하면 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin p)dp$이다.
그러면 이 값은 I와 같아진다.

그러면 식은 $2I=\frac{1}{2}(I+I)-\frac{\pi}{2}ln2$이므로 결국 $I=-\frac{\pi}{2}ln2$이다.

※ 의견
이 과정이 모두, '발상적'이지 않고 '필연적으로' 연결되야 한다.
일단 이 문제를 처음보자마자 '적절한 치환을 통해서 정적분 값을 뽑아내는 유형'이라는 것을 느껴야 하고, 그에 따라 적절한 치환 방법을 생각해야 한다. 그리고 정적분의 범위를 통해 $x+t=\frac{\pi}{2}$로 치환할 수 있는 것이겠고, 그에 따라 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)dx$가 나온 것이다.

그러면 이제 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)dx$와 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)dx$을 조합해야 하는데, 우리는 식을 계속 만들어 이끌어 나가야 한다는 생각 하에 이 두 개식을 더하는 것이다. 왜냐하면 이 두식을 더하게 되면 합쳐져서 $2\sin x$가 나오기 때문이다. 그러면 $\sin x$라는 연결고리를 통해 I를 다시 뽑아낼 생각을 하는 것이다. 우리는 계속 식을 이어나가야 한다는 것, 그 사실을 염두해 두고 곳곳에 남겨진 단서를 조합할 줄 알아야 한다.

(2) $\int_0^{\pi} \frac{xsinx}{1+\cos^2 x}dx$

$I=\int_0^{\pi} \frac{xsinx}{1+\cos^2 x}dx$로 두고 역시 치환을 생각한다. 그러면 $x+t=\pi$라고 생각 가능하며 그러면 결과는 $I=\int_0^{\pi} \frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t}dt$이니 $2I=\int_0^{\pi} \frac{\pi \sin x}{1+\cos^2 x}dx$이고 이는 치환을 통해 쉽게 결과를 얻어낼 수 있을 것이다.

5. 부분적분의 숨겨진 뜻

기존의 부분적분 $\int f(x)g'(x)dx$을 라이프니츠 표현을 통해서 살펴보자.

그러면 준식은 $\int f\frac{dg}{dx}dx$이고 이것은 $\int fdg$가 아닌가?

다시 처음으로 돌아가 $\int fdg$를 보자. 그리고 이 식을 실전에서 처음 보았다고 가정하자.

이것을 어떻게 해결해야 하는가?

먼저 드는 생각은, f는 x의 함수이지 당장 g에 대한 함수가 아니라는 것이다.
그래서 적분변수 dx를 잡아주는 생각을 한다. 즉

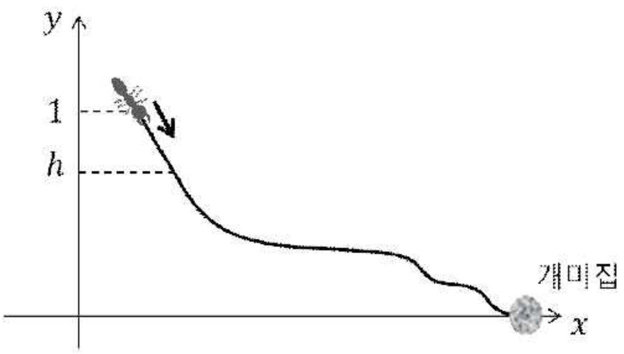
$\int fdg = \int f\frac{dg}{dx}dx = \int f(x)g'(x)dx$에서 부분적분이 가능해지는 것이다.

예를 들어, $\int \frac{1}{h+1}dV$를 보았다고 해 보자. (h는 높이함수 V는 부피함수)

이때 이 준식은 $\int \frac{1}{h+1}\frac{dV}{dh}dh$가 되고 이때 $\frac{dV}{dh}=u'$로 잡고 $\frac{1}{h+1}=v$로 하면

$[V\frac{1}{h+1}]+\int V\frac{1}{(h+1)^2}dh$등으로 식을 바꿀 수 있다.

예제



위 그림과 같이 좌표평면 위의 곡선을 따라 개미가 집으로 가고 있다. 이 곡선은 x에 대해 미분가능한 감소함수의 그래프이며 x축과 한 점(개미집)에서 만난다. 개미는 시각 $t=0$일 때 곡선의 y좌표가 1인 점에서 집을 향해 이동하기 시작하고, 집에 도착할 때까지 멈추지 않는다. 개미의 y좌표가 h인 점에서 집까지 곡선의 길이를 $S(h)$라고 하자.

시각 $t>0$일 때 개미의 y좌표 $y(t)$는 미분가능하며, $s(t)=(S\circ y)(t)$라고 하자. 개미의 운동에너지를 계산한 결과, 개미가 집에 도착할 때까지 다음 등식

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=y(t)^2-3y(t)+2$$

가 성립한다는 것을 알게 되었다.

$$A(\alpha,\beta)=\int_\alpha^\beta S(1-y)\frac{2y+1}{(y^2+y)^{3/2}}dy$$

일 때, 개미가 $y=\frac{1}{3}$인 위치에서부터 집에 도착할 때까지 걸리는 시간을 $S(h)$와 $A(\alpha,\beta)$의 함숫값으로 나타내시오.

2016 서울대학교 심층면접 6번 제시문제(일반전형)

매우 어려운 문제이다. 실제로 이 문제는 서울대 자연과학부(수리, 통계, 사범 수학교육과)와 공과대학에서 나왔는데 공과대학 수준에서는 풀지 못해도 된다고 생각된다.

※ 그러나 이런 말이 이 문제를 못풀어도 된다는 뜻이 아니다. 만약 이 문제를 풀면 그보다 더 쉬운 문제는 더욱 잘 풀 수 있지 않겠는가? 그리고 일종의 모래주머니 효과도 고려할 수 있겠다. 그러나 무엇보다 중요한 것은, 일관된 수학적 기술과 원리가 어려운 문제든, 응용된 문제든, 쉬운 문제든 간에 모두 공통적으로 성립할 수 있다는 사실이다. 즉 이문제도 앞서 배운 기술들을 차례대로 따라오면서 숙지하고 있었다면 어려움 없이 해결할 수 있을 것이라는 것이다.

사실 전혀 어려움이 없지는 않은데, 그 이유는 문제에서 주어진 조건과, 우리가 구해가야 할 것등을 비교하면셔 결국 무엇을 해 나가고 어떻게 식을 변형시킬 것인지 등에 대한 감각, 즉 센스와 직관을 갖추어야 하기 때문이다. 하지만 이런 능력은 어느 정도 문제를 많이 풀면 느는 영역이기도 하다.(물론 기본은 다 되어 있고, 또 탄탄해야 한다. 무작정 많이 풀며 경험을 쌓는 것은 그 이후의, 별개의 과정이라는 것을 숙지하자.)

- -

먼저 문제에서 준 것은 $s(t)=S(y(t))$와 다음식

$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=y(t)^2-3y(t)+2$ 이다. 이제부터 편의상 $y(t)=y$라고 쓰겠다.

※ $V=\int_0^h S(h)dh$를 $V=\int_0^h Sdh$라고 쓰는 것과 마찬가지이다.

그러면 문제에서 $\frac{ds}{dt}$를 주었으니 이를 이용해야 하지 않겠는가? 따라서 $s(t)=S(y(t))$를 t로 미분한다. 이는 매우 자연스러운 사고적 의식의 흐름이다.

그러면 $\frac{ds}{dt}=\frac{dS}{dy}\frac{dy}{dt}$이므로 $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=y(t)^2-3y(t)+2$을 이용 가능하겠다. 근데 $\frac{ds}{dt}=\frac{dS}{dy}\frac{dy}{dt}$에서, $\frac{dS}{dy}$는 양수이고 $\frac{dy}{dt}$는 음수이니 결국 $\frac{ds}{dt}$는 음수이겠다.

그러면 $\frac{ds}{dt}=\frac{dS}{dy}\frac{dy}{dt}=-\sqrt{y(t)^2-3y(t)+2} = -\sqrt{y^2-3y+2}$이다.

이제 딱히 할 게 없으니 고개를 들어 문제를 다시 본다.

그러면 시간을 구하라고 나와 있으니 역시 이 문제에서도 $T=\int_0^T dt$를 쓴다.

※ 보통 이런 '변화율'과 관련된 논술 / 심층문제에서 t를 구하라고 하면 $T=\int_0^T dt$로 식을 쓰고 여기서부터 논리를 전개시키면서 식을 전개시키는 경우가 많다.

그러면 다음식

$\frac{ds}{dt}=\frac{dS}{dy}\frac{dy}{dt}=\frac{dS}{dt}=-\sqrt{y^2-3y+2}$ 이므로 결국

$dt=-\frac{1}{\sqrt{y^2-3y+2}}dS$이다. 따라서 우리는

$T=\int_0^T dt=\int_\alpha^\beta -\frac{1}{\sqrt{y^2-3y+2}}dS$ 를 얻을 수 있다. 그리고 이는 ***부분적분을 이용하기 위해 변형***하면 다음과 같다.

$$T=\int_0^T dt=\int_0^{\frac{1}{3}}\frac{1}{\sqrt{y^2-3y+2}}\left(\frac{dS}{dy}\right)dy$$

이는 완벽한 부분적분의 꼴이므로, 정리하면

$T=[S\frac{1}{\sqrt{y^2-3y+2}}]_0^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{3}}S\frac{3-2y}{(y^2-3y+2)^{-\frac{3}{2}}}dy$

이고 이는 결국 $\frac{3}{\sqrt{10}}S\left(\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{2}A\left(\frac{2}{3},1\right)$이다.

※ $y=1-x$로 치환시 보일 수 있다. S는 $S(y)$니깐.