

제 2 교시

수리 영역(가형)

출수형

5지선다형

1. $\log_2 \sqrt{3} \times \log_3 4$ 의 값은? [2점]
- ① $\log 2$ ② $\log 3$ ③ $\log_2 3$ ④ $\log_3 2$ ⑤ 1

2. 방정식 $x^2 + 8 = 4(x + \sqrt{x^2 - 4x + 5})$ 의 서로 다른 실근의 합은? [2점]
- ① -4 ② 0 ③ 2 ④ 6 ⑤ 8

3. 행렬 A, B 에 대하여 $AB = E$ 이고 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 일 때 행렬 BA^2 의 모든 성분의 합은? [2점]
- ① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

4. 반지름이 1인 부채꼴 OAB 내부에 임의의 점 P를 찍는다. 선분 OP의 길이를 확률변수 X 라고 할 때, X 의 평균 $E(X)$ 의 값을 구하시오. [3점]
- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ 1

5. 함수 $f(x) = |\sqrt{3}x|$ 에 대하여 $f(x)$ 와 $x^2 + y^2 = 1$ 의 두 교점 중 x 좌표가 양수인 점을 P, $f(x)$ 와 $x^2 + y^2 = 4$ 의 두 교점 중 x 좌표가 음수인 점을 Q라고 할 때, \overline{PQ} 의 값을 구하시오. [3점]

- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\sqrt{2}$ ④ $\sqrt{3}$ ⑤ 3

6. O 그릇 제조 공장에서 생산한 100개의 그릇을 검사 했더니, 20개가 판매가 불가능한 불량품이었다. 이 공장에서 생산한 전체 그릇 중 불량품의 비율을 신뢰도 90%로 추정한 모비율 p 와 표본비율 \hat{p} 에 대하여 $|p - \hat{p}| \leq 0.04$ 가 성립하기 위한 표본의 크기의 최솟값은? (단, 표준정규분포를 따르는 확률변수 Z 에 대하여 $P(0 \leq Z \leq 1.6) = 0.45$) [3점]

- ① 128 ② 256 ③ 512 ④ 1024 ⑤ 2048

7. 좌표평면 위에 점 A와 A를 원점을 중심으로 각 θ 만큼 회전 변환한 점 B가 있다. 두 점 A, B가 모두 제 1사분면 위에 있고, 일차변환 f 에 의하여 두 점이 모두 직선 $y = mx$ 위로 옮겨질 때, f 를 나타내는 행렬 $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 라고 하자. 다음 중 옳은 것을 있는 대로 고르시오? (단, $ab < 0, 0 < \theta < 2\pi$) [3점]

<보 기>

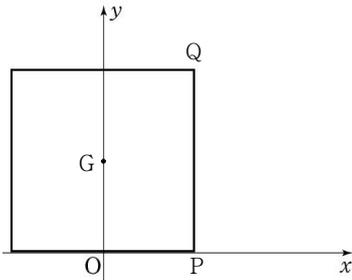
- ㄱ. $a = m, b = -1$ 일 때 $T^2 = O$ 이다.
- ㄴ. 좌표평면 위의 임의의 점 P에 대하여 $f(X) = P$ 인 점 X가 항상 존재한다.
- ㄷ. 선분 AB와 작은 부분의 호 AB가 f 에 의해 옮겨진 두 도형의 길이는 서로 같다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

8. 좌표공간에서 두 점 $A(0,0,4)$, $B(4,6,0)$ 에 대하여 점 P 가 xy 평면 위의 직선 $x=3$ 위의 점일 때 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값은?
[3점]

- ① $6\sqrt{2}$ ② $6\sqrt{3}$ ③ $7\sqrt{11}$ ④ $7\sqrt{13}$ ⑤ 10

9. 다음과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형을 무게중심 G 의 x 좌표가 0이 되도록 놓았다. 사각형의 한 꼭짓점 P 를 중심으로 다른 꼭짓점 Q 가 x 축에 닿을 때까지 시계 방향으로 굴렸을 때, 그 동안 G 의 자취를 $f(x)$ 라 하자. $f(x)$ 와 세 직선 x 축, $x=0$, $x=2$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오. [3점]



- ① $\frac{\pi}{2}$ ② $\frac{\pi}{2}+1$ ③ π ④ $\pi+1$ ⑤ 2π

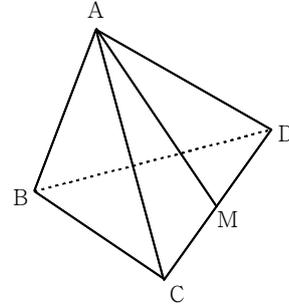
10. 매개변수 t 로 나타내어진 함수 $x(t)=t^2$, $y(t)=t^3-3t$ 가 있다. $t=1$ 일 때 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 의 값을 구하시오. [3점]

- ① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ 9

11. 주머니 안에 빨간 공 7개, 파란 공 7개, 노란 공 7개가 있다.
주머니에서 한번에 7개의 공을 뽑는 서로 다른 경우의 수는?
(단, 같은 색의 공은 서로 구별되지 않는다) [3점]

- ① 20 ② 24 ③ 28 ④ 32 ⑤ 36

12. 그림과 같은 정사면체 $A-BCD$ 에 대하여 \overline{CD} 의 중점을
 M 이라 할 때 \overline{AM} 과 $\triangle ABD$ 가 이루는 각 θ 에 대하여 $\cos\theta$
의 값을 구하시오. [3점]

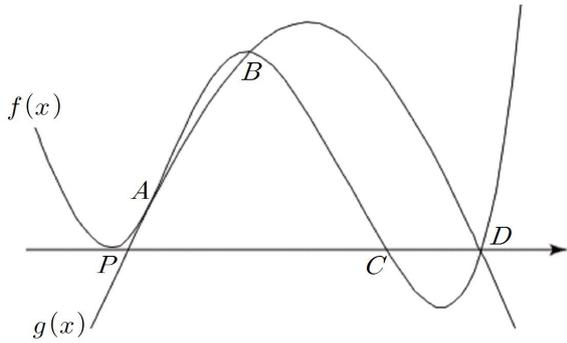


- ① $\frac{\sqrt{7}}{3}$ ② $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

13. 일차변환 $A = \begin{pmatrix} \cos^2\theta & -\sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta \end{pmatrix}$ 에 의해 중심이 $(2,0)$ 이고 반지름이 $\frac{2}{\sqrt{3}}$ 인 원 C 가 옮겨진 도형을 C_1 이라고 하면, C 와 C_1 은 접한다. 이 때 $\cos\theta$ 의 값을 구하시오. (단, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) [3점]
- ① $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{6}}{2}$

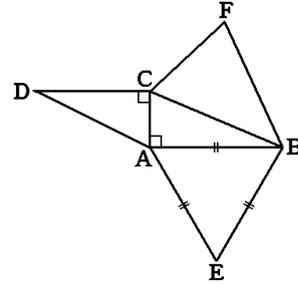
14. 모든 항이 양수인 무한수열 $\{a_n\}$ 에 대하여
- $$a_1 = \sqrt{2}, a_2 = 2, a_{n+2}^2 = a_n a_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3 \dots)$$
- 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값은? [4점]
- ① 1 ② $2^{\frac{2}{3}}$ ③ 2 ④ $2^{\frac{5}{6}}$ ⑤ 4

15. 사차함수 $f(x)$ 와 이차함수 $g(x)$ 의 그래프가 그림과 같이 세 점에서 만나고 점 A 에서는 접한다. 또한 $f(x)$ 는 점 P 에서 x 축에 접하고, A, B, C, D 의 x 좌표가 각각 $-1, 0, 2, 5$ 일 때 $f'(5) + g'(5) > 0$ 이 성립한다. $f(x)$ 와 $-g(x)$ 의 D 가 아닌 다른 세 교점을 Q, R, S 라 하면 사각형 $PQRS$ 의 무게중심의 x 좌표는 k 이다. 이 때, $36k^2$ 의 값을 구하시오. [4점]



- ① 1
- ② 4
- ③ 12
- ④ 36
- ⑤ 72

16. 다음은 $\overline{AB}=12, \overline{AC}=5, \overline{BC}=13$ 이고 $\angle DCA = 90^\circ$, $\triangle ABE$ 는 정삼각형인 사면체의 전개도이다.



이 전개도로 사면체를 만들었을 때, $\triangle ABE$ 를 $\triangle ABC$ 를 포함하는 평면에 내린 정사영의 넓이는? [4점]

- ① 17
- ② 25
- ③ 30
- ④ 42
- ⑤ 49

17. 좌표평면 상의 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위의 점 $P(a, b)$ 와 직선 $y = -\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$ 위의 점 $Q(c, d)$ 가 있다. 두 점 P, Q 에 대하여 행렬 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 의 역행렬이 존재하지 않도록 하는 P 의 자취의 길이는? (단, Q 는 제 2사분면 위에 존재한다) [4점]

- ① $\frac{\pi}{6}$ ② $\frac{\pi}{3}$ ③ $\frac{\pi}{2}$ ④ π ⑤ $\frac{3\pi}{2}$

18. 함수 $f(x), g(x)$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$f(x) = \begin{cases} \pi^2 x^2 \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ \alpha & (x = 0) \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x+2 & (x \leq -1) \\ x & (-1 < x \leq 0) \\ -x & (0 < x \leq 1) \\ (x-2)^3 & (x > 1) \end{cases}$$

<보기>에서 옳은 것을 있는 대로 고르시오. [4점]

<보 기>

- ㄱ. $f'(0)$ 이 존재하게 하는 $\alpha \neq 0$ 인 실수 α 가 존재한다.
- ㄴ. $\alpha = 0$ 일 때, $f(g(x))$ 가 미분가능하지 않은 점의 개수는 2개다.
- ㄷ. $x = \frac{1}{\pi}$ 에서 $g(f(x))$ 는 미분가능하다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
 ④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

19. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1 = 2, a_2 = 2$ 이고,
 $(n+1)a_{n+1} = 2 - \sum_{k=1}^n (k-2)a_k$ ($n \geq 2$) 를 만족시킨다.
 다음은 이 수열의 일반항 a_n 을 구하는 과정의 일부이다.

$n \geq 2$ 인 자연수 n 에 대하여

$$(n+1)a_{n+1} = 2 - \sum_{k=1}^n (k-2)a_k$$

$$= 2 - \sum_{k=1}^{n-1} \{(k-2)a_k\} - (n-2)a_n$$

$$= \boxed{(가)} \times a_n - (n-2)a_n \text{ 이므로}$$

$$a_{n+1} = \boxed{(나)} a_n \text{ 이 성립한다. 따라서 } n!a_n = \boxed{(다)}$$

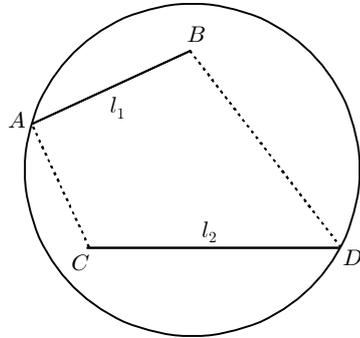
위의 (가)에 알맞은 식을 $f(n)$, (나)에 알맞은 식을 $g(n)$,
 (다)에 알맞은 식을 $h(n)$ 이라 할 때, $f(16) \times g(15) \times h(16)$ 의
 값은? [4점]

- ① 2^{15} ② 2^{17} ③ 2^{19} ④ 2^{21} ⑤ 2^{23}

20. 그림과 같이 반지름의 길이가 3인 구와 직선 l_1 이 만나는 두
 점을 A, B 라 하고, 직선 l_2 와 만나는 두 점을 C, D 라 하자. 또,
 직선 l_1 과 평행하고 점 C 를 지나는 직선을 l_3 이라 하고, 직선
 l_2 와 l_3 을 포함하는 평면을 α 라 할 때, 다음을 만족한다.

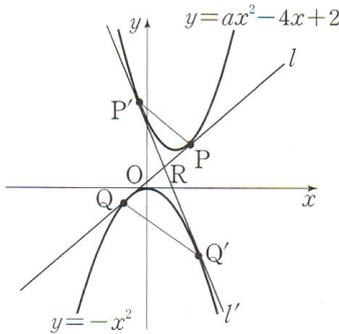
(가) $\overline{CA} \perp l_1, \overline{DB} \perp l_1$
 (나) $\overline{AD} = 6, \overline{AB} = 2\sqrt{3}, \overline{CD} = \sqrt{30}$

이 때 $\triangle BCD$ 를 포함하는 평면과 α 가 이루는 각을 θ 라 하자.
 $60 \tan^2 \theta$ 의 값을 구하시오. [4점]



- ① 30 ② 40 ③ 50 ④ 60 ⑤ 65

21. 그림과 같이 두 포물선 $y = ax^2 - 4x + 2$ ($a > 0$), $y = -x^2$ 에 동시에 접하는 두 직선 l 과 l' 의 접점을 각각 P, Q와 P', Q'라 하고 두 직선의 교점을 R이라 하자. 다음 중 옳은 것만을 <보기>에서 모두 고르면? [4점]



- <보 기>
- ㄱ. 직선 PP'과 직선 QQ'은 평행하다.
 - ㄴ. 점 R의 y좌표를 r이라 하면 $\lim_{a \rightarrow \infty} r = 2$ 이다.
 - ㄷ. $\triangle PRP' = S_1$, $\triangle QRQ' = S_2$ 라 하면 $S_1 = aS_2$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
- ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

단답형

22. 식 $\frac{\sin 15^\circ + \sin 45^\circ}{\cos 15^\circ + \cos 45^\circ}$ 의 값을 k라 할 때, $12k^2$ 의 값을 구하시오. [3점]

23. 부정적분으로 표현된 함수 $f(x) = \frac{1}{\ln 3} \int \frac{1}{x} dx$ 에 대하여 $f(1) = 0$ 일 때, $f(x) = 3$ 을 만족시키는 x의 값들의 합을 p라 하자. 이 때, $p + f(27)$ 의 값을 구하시오. [3점]

24. 포물선 $y^2 = 4x$ 에 대하여 포물선의 초점 F를 지나는 직선 l 이 포물선과 만나는 두 점을 P, Q라고 하자. $\overline{FP} = 4$ 일 때, $3\overline{FQ}$ 의 값을 구하시오. [3점]

25. 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 $5f'(x) = f(1-x)$ 이고 $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ 을 만족할 때, $\int_0^1 xf(x)dx$ 의 값을 구하시오. [3점]

26. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ 이라고 하자. S_n 을 큰 값부터 차례로 나열하였더니 40, 39, 38... 과 같이 되었다. 이 때, $\{a_{11}\}^2$ 의 값을 구하시오. (단, n 은 자연수) [4점]

27. 공수가 1, 2, 3점이 있는 과녁에 활을 쏜다고 하자. 6번을 쏘아서 12점을 얻는 방법의 수를 구하시오. (단, 과녁을 맞히지 못하는 일은 없다) [4점]

28. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$ 가 다음을 만족한다.

- (가) $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 극값을 갖는다.
- (나) 함수 $g(t)$ 를 " $|f(x)-t|$ 가 미분 불가능하게 되는 x 의 개수"로 정의하면, $g(t)$ 는 $t=-1, t=3$ 에서만 불연속이다.

이 때, 방정식 $f(x)=3$ 의 두 실근을 a, b 라 하자. $a+3b$ 의 값을 구하시오. (단, $a < b$ 이고, $f'(a)=0$ 이다) [4점]

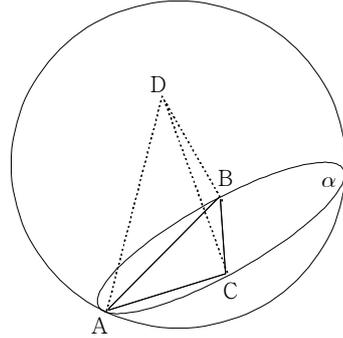
29. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족할 때, $\int_1^3 \sqrt{1+g(2x)} dx = k$ 라 하자.

(가) $f(1) = 1, f(3) = 3$

(나) $f'(x) > 0, g(x) = 4\left\{f\left(\frac{x}{2}\right)\right\}^2 \left\{f'\left(\frac{x}{2}\right)\right\}^2$

이 때, k 값의 범위는 $a \leq k < b$ 이다. $a^2 + b^2$ 의 값을 구하시오. [4점]

30. 좌표공간에서 구 $x^2 + y^2 + z^2 = 18$ 와 평면 α 가 만나서 생기는 원 위에 $\overline{AB} = \overline{AC} = 4$ 이고 $\angle ABC = 30^\circ$ 인 삼각형 ABC 가 있고, 점 B 를 지나고 평면 α 에 수직인 직선이 구와 만나는 점을 D 라 하자. $\triangle DAC$ 를 포함하는 평면과 평면 α 가 이루는 각의 크기를 θ 라고 할 때, $15 \tan^2 \theta$ 의 값을 구하시오. [4점]



* 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오. <출제 : 포만한 수리 연구소>