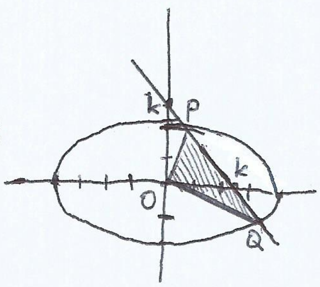
타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$과 직선 $x+y=k$ $(k>0)$이 만나는 서로 다른 두 점을 P, Q라 하고, 삼각형 OPQ의 넓이를 S라 하자. $k=a$일 때 S의 최댓값은 M이다. a^2+M^2의 값을 구하시오.
(단, O는 원점이다.)

2016 수능완성 문제...

문제 그림으로 나타내면



요 검은 부분 넓이 최대로

근데... 계산 귀찮아

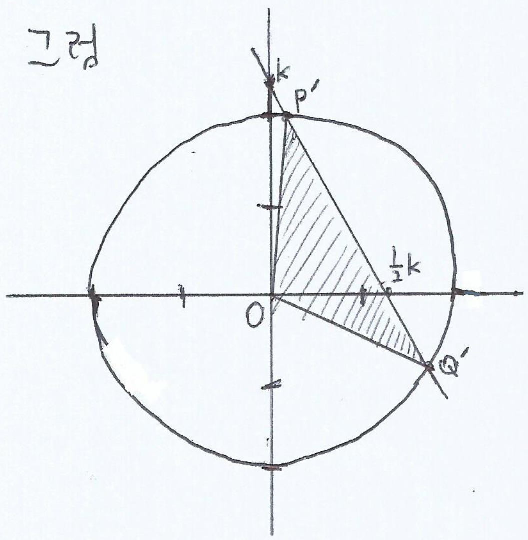
타원 아니고 원이었으면 편했을텐데

그럼 원으로 만들죠

??? 어떻게???

가로 길이에 $\frac{1}{2}$배를 해줍시다

그럼



요렇게 됩니다.

부가 설명하자면

직선 $x+y=k$ 는 $2x+y=k$가 되었고

타원은 원이 되었으며 (반지름 2인)

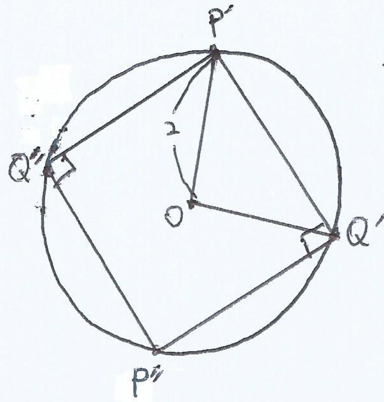
검은부분 넓이는 절반이 되지만

최댓값을 가지는 k는 일정합니다.

(좌표축을 축소해도)

자 그럼 이 상황에서 최댓값을 구해보죠

$\overline{P'P''}$의 중점이 O가 되고 $\overline{Q'Q''}$의 중점이 O가 되도록 P'', Q''을 찍읍시다.



그리고 이렇게 그리면 △OP'Q'의 크기는 □P'Q'P''Q''의 크기의 $\frac{1}{4}$입니다.

□P'Q'P''Q''의 크기가 최대일 때?

정사각형이죠.

따라서 O와 P'Q' 사이 거리는 $\sqrt{2}$ 입니다.

k를 구합시다

P'Q'의 중점을 M이라 두면

$\overline{OM}=\sqrt{2}$, OM의 기울기는 $\frac{1}{2}$

즉 M의 좌표는 $\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)$

M은 $2x+y=k$를 지나므로

$k=2\cdot\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\sqrt{10}$ 입니다당

이때 △OP'Q' 넓이는? $\frac{1}{2}\sqrt{2}\times2\sqrt{2}=2$ 이죠.

그럼 △OPQ의 넓이는?

△OP'Q'의 두배죠! 따라서 4

따라서 문제의 답은 $10+16=26$

참 쉽죠? :)

이렇게 푸는 사람도 있답니다