

제 2 교시

수학 영역(가형)

5지선다형

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 12x}{e^{3x} - 1}$ 의 값은? [2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2. 두 벡터 $\vec{a} = (-2, 3)$, $\vec{b} = (7, 9)$ 에 대하여 $|\vec{a} + \vec{b}|$ 의 값은?
[2점]

- ① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

3. 함수 $f(x) = \ln(2x + 2)$ 에 대하여 $f'(3)$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

4. 두 사건 A 와 B 는 서로 독립이고

$P(A^C) = \frac{1}{6}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{2}$

일 때, $P(A \cap B^C)$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{36}$ ② $\frac{1}{24}$ ③ $\frac{1}{12}$ ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

5. $\sum_{k=1}^6 {}_8C_k$ 의 값은? [3점]

- ① 240 ② 242 ③ 244 ④ 246 ⑤ 248

6. 양의 실수 a 에 대하여 구간 $[2, 3)$ 에서 정의된 함수

$f(x) = a^{x-1} + 1$ 가 최솟값을 갖지 않고 최댓값 $\frac{4}{3}$ 을 가질 때,

$\log_3 a$ 의 값은? [3점]

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

7. 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 단축의 길이가 6이고, 두 초점 F_1, F_2

사이의 거리가 8이다. 타원 위의 점 P 에 대하여

$\overline{F_1P} + \overline{F_2P}$ 의 값은? [3점]

- ① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

8. $\int_0^1 2x^3 \ln(x^2 + 1) \, dx$ 의 값은? [3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

9. $0 \leq x \leq a$ 일 때, 방정식

$$\cos x (2\cos^2 x + \sin x - 2) = 0$$

의 모든 해의 합이 $\frac{5}{2}\pi$ 이 되도록 하는 양수 a 의 최솟값은?

[3점]

① $\frac{\pi}{2}$ ② π ③ $\frac{3\pi}{2}$ ④ 2π ⑤ $\frac{5}{2}\pi$

10. 이산확률변수 X 의 확률질량함수 $P(X=x) (x=1, 2, 3, 4)$ 가 다음과 같다.

$$P(X=x) = kx \quad (k \text{는 상수이다.})$$

$V(X)$ 의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

11. 군포고등학교 학생들의 오른손 엄지손톱의 온도가 정규분포 $N(30, 2^2)$ 를 따른다. 군포고 학생들 중 임의추출한 4명의 오른손 엄지손톱 온도의 합을 확률변수 X 라 하자. $P((X - 124)(X - 128) \leq 0)$ 의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용해 구한 것은? (단, 온도의 단위는 $^{\circ}\text{C}$ 이다.) [3점]

- ① 0.092
- ② 0.136
- ③ 0.149
- ④ 0.153
- ⑤ 0.241

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.192
1.0	0.341
1.5	0.433
2.0	0.477
2.5	0.494

12. 좌표평면 위의 곡선 $y = |2^x - 2|$ 와 직선 $y = \frac{2}{3}$ 의 서로 다른 두 교점을 A, B라 하자. 직선 $x = k$ 와 곡선 $y = |2^x - 2|$ 의 교점을 C라 할 때, 삼각형 ABC의 넓이가 $\frac{1}{2}$ 이 되도록 하는 모든 실수 k 의 합을 M 이라 하자. 2^M 의 값은? [3점]

- ① $\frac{7}{9}$
- ② $\frac{8}{9}$
- ③ 1
- ④ $\frac{10}{9}$
- ⑤ $\frac{11}{9}$

13. 집합 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 를 홀수와 짝수를 각각 하나 이상
원소로 갖는 서로소인 부분집합으로 분할하는 모든 경우의
수는? [3점]

- ① 21 ② 23 ③ 25 ④ 27 ⑤ 29

14. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 의 역함수가
존재한다. 좌표평면 위의 곡선 $y=f(x)$ 와,
매개변수 t 로 표현된 곡선

$$\begin{cases} x = t^3 \\ y = 2tf(t) + 3t \end{cases}$$

가 점 $(1, f(1))$ 에서 접한다. $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 하자.
 $g(k)=1$ 일 때, $g'(k)$ 의 값은? (단, k 는 상수이다.) [4점]

- ① $-\frac{1}{6}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $-\frac{2}{3}$ ⑤ $-\frac{5}{6}$

15. 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 에 대해 다음이 성립한다.

$$f(x) = \int_1^x (t^2 + 2t - 1)e^t dt$$

$$g(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{f(x+h)}$$

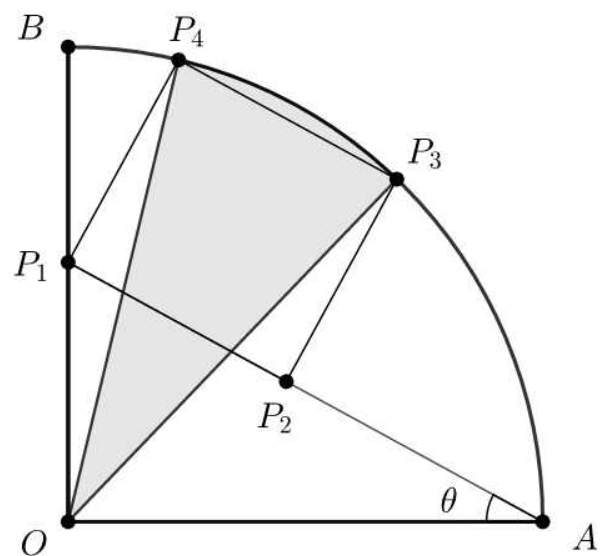
함수 $g(x)$ 의 서로 다른 극값의 개수를 n , 모든 극값의 합을 k 라 할 때, $n \times k$ 의 값은? (단, 극값의 값이 같으면 서로 같은 극값이라 한다.) [4점]

- ① $\frac{3(1-e^2)}{4e}$ ② $\frac{1-e^2}{e}$ ③ $\frac{5(1-e^2)}{4e}$
 ④ $\frac{3(1-e^2)}{2e}$ ⑤ $\frac{7(1-e^2)}{4e}$

16. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$ 인

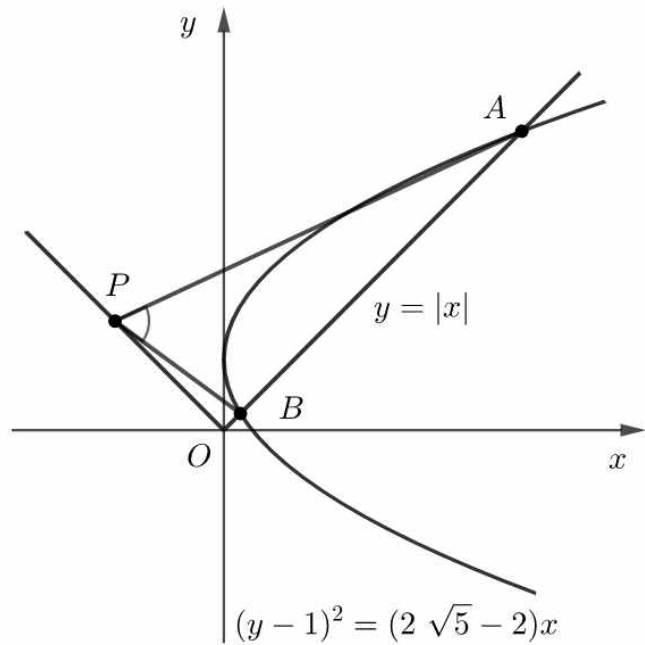
부채꼴 OAB 가 있다. 선분 OB 위에 점 P_1 을 $\angle OAP_1 = \theta$ 가 되도록 잡는다. 한 꼭짓점이 P_1 이고 한 변이 선분 AP_1 위에 있으면서 호 AB 에 두 꼭짓점에서 접하는 직사각형의 세 꼭짓점을 P_2, P_3, P_4 라 하자. O 를 중심으로 하는 부채꼴 OP_3P_4 의 넓이를 $S(\theta)$ 라 할 때, $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{\theta^2}$ 의 값은? (단,

$0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ 이고, 점 P_2 는 선분 AP_1 위에 있다.) [4점]



- ① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$
 ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

17. 그림과 같이 포물선 $(y-1)^2 = (2\sqrt{5}-2)x$ 와 $y = |x|$ 의 두 교점을 A, B라 한다. $y = |x|$ ($x < 0$)위를 움직이는 한 점 P에 대하여 $\tan(\angle APB)$ 의 최댓값은? [4점]



- ① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2
④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

18. 한 개의 주사위를 두 번 던질 때 나오는 눈의 수를 차례로 a, b 라 하자. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x) = \sin\left(\frac{a\pi}{b+e^x}\right)$$

의 서로 다른 극값의 개수를 확률변수

X 라 할 때, $E(X)$ 의 값은? (단, 극값의 값이 같으면 서로 같은 극값이라 한다.) [4점]

- ① $\frac{17}{18}$ ② $\frac{35}{36}$ ③ 1 ④ $\frac{37}{36}$ ⑤ $\frac{19}{18}$

19. 좌표공간에 세 점 A_1, A_2, A_3 가 있다. 점 A_1 을 지나고 $\overrightarrow{OA_i} (i=1, 2, 3)$ 를 법선벡터로 하는 평면을 α_i 라 하자.

$$|\overrightarrow{OA_i}| = i (i=1, 2, 3)$$

일 때, <보기>에서 항상 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
(단, O 는 원점이다.) [4점]

—<보 기>—

ㄱ. α_2 와 α_3 가 일치하면 점 O 가 선분 A_2A_3 를
2:3으로 외분한다.

ㄴ. α_2 와 α_3 가 만나 교선 l_{23} 을 만들고 l_{23} 와 직선
 OA_1 이 수직으로 만날 때, 평면 OA_2A_3 위에 점
 A_1 가 있다.

ㄷ. α_1 과 α_2 가 만나 교선 l_{12} 를 만들고 α_1 과 α_3 가 만나
교선 l_{13} 을 만들 때, l_{12} 와 l_{13} 이 서로 수직으로
만나면

$$\overrightarrow{OA_2} \cdot \overrightarrow{OA_3} = (\overrightarrow{OA_1} \cdot \overrightarrow{OA_2}) \times (\overrightarrow{OA_1} \cdot \overrightarrow{OA_3})$$

이다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

20. $6n$ 장의 카드에 각각 1부터 $6n$ 까지의 자연수가 하나씩
적혀있다. 카드를 항아리에 전부 넣고 무작위로 세 개를
뽑는다. 다음은 세 카드에 적힌 숫자를 모두 곱해 6의 배수가
나올 확률을 구하는 과정이다. (단, n 은 1보다 큰
자연수이다.)

$6n$ 이하의 자연수를 2의 배수인지 아닌지와 3의
배수인지 아닌지를 이용하여 4가지로 분류할 수 있다.
다음은 분류에 따른 자연수의 개수를 구한 것이다.

- (A) 2의 배수이면서 3의 배수인 자연수 : n
(B) 2의 배수이면서 3의 배수가 아닌 자연수 : $2n$
(C) 2의 배수가 아니면서 3의 배수인 자연수 : (가)
(D) 2의 배수도, 3의 배수도 아닌 자연수 : $2n$

세 자연수의 곱이 6의 배수가 나온다면 (i) 셋 중
하나라도 6의 배수인 경우, (ii) 6의 배수는 나오지
않고, 2의 배수와 3의 배수가 각각 하나 이상 나온
경우로 나눌 수 있다.

경우 (i) :

셋 중 하나라도 6의 배수인 사건은 세 자연수중 어떤
것도 6의 배수가 아닐 사건의 여사건이므로, 셋 중
하나라도 6의 배수일 확률은 $1 -$ (나) 이다.

경우 (ii) :

경우 (i)와 중복되는 경우를 제외하면

(B)의 자연수 2개와 (C)의 자연수 1개가 나오는 경우,
(B)의 자연수 1개와 (C)의 자연수 2개가 나오는 경우와
(B)의 자연수 1개, (C)의 자연수 1개와 (D)의 자연수
1개가 나오는 경우로 나눌 수 있다.

따라서 6의 배수가 나오지 않고 2와 3의 배수가 각각
하나 이상 나올 확률은

$$\frac{{}_{2n}C_2 \times {}_n C_1}{{}_{6n}C_3} +$$
 (다)
$$+ \frac{{}_{2n}C_1 \times {}_n C_1 \times {}_{2n}C_1}{{}_{6n}C_3}$$
 이다.

따라서 경우 (i)에서 구한 확률과 경우 (ii)에서 구한
확률을 합하면 구하고자 하는 확률이 나온다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각

$f(n), g(n), h(n)$ 이라 할 때, $\frac{f(11) \times g(2)}{h(3)}$ 의 값은? [4점]

- ① 264 ② 266 ③ 268 ④ 270 ⑤ 272

21. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x) = t\left(2^x + 2^{-x} - \frac{5}{2}\right) \quad (t > 0)$$

에 대하여

$$\int_0^k f'(x)(f \circ f)(x) dx = 0$$

이 성립하도록 하는 서로 다른 실수 k 의 개수를 $g(t)$ 라 하자.

함수 $g(t)$ 가 $t=a$ 에서와 $t=b$ 에서 불연속이다. ($a < b$)

$$a \times \left\{ g(a) + g\left(\frac{a+b}{2}\right) + g(b) + g(b+1) \right\}$$
의 값을 구하시오.

(단, a, b 는 상수이다.) [4점]

- ① 12 ② 16 ③ 20 ④ 24 ⑤ 28

단답형

22. ${}_6\text{H}_2$ 의 값을 구하시오. [3점]

23. 좌표공간의 두 점 $A(1, 0, 3)$ 와 $B(p, q, r)$ 에 대하여 선분 AB 를 1:2로 외분하는 점이 x 축 위에 있을 때, $p \times q + r$ 의 값을 구하시오. [3점]

24. 좌표평면 위의 곡선 $C: xy^2 - 3x^3y + x + 1 = 0$ 과 직선 $x = 1$ 의 서로 다른 두 교점을 A, B라 하자. C 위의 두 점 A, B에서의 접선의 기울기의 합을 구하시오. [3점]

25. 좌표공간 위의 세 점 $A(3, 0, 0)$, $B(0, 4, 0)$, $C(0, 0, k)$ 가 있다. 평면 ABC와 xy 평면이 이루는 예각의 크기를 θ 라 할 때, $\cos\theta = \frac{\sqrt{26}}{26}$ 이다. 양의 실수 k 의 값을 구하시오. [3점]

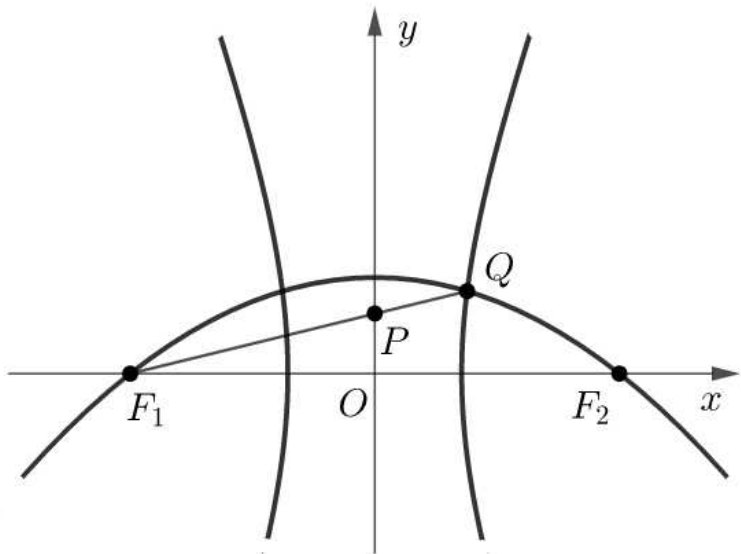
26. 임의의 자연수 n 에 대해서 n 을 3으로 나눈 나머지를 $f(n)$ 이라 하자. 하나의 주사위를 세 번 던져 나온 눈의 수를 차례대로 x, y, z 라 하였더니 $\{f(x) + f(y)\} \times f(z) = 0$ 을 만족시킨다. 이 때, $x \leq y \leq z$ 일 확률이 $\frac{q}{p}$ 이다. $p + q$ 의 값을 구하시오. (단, p, q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

27. 그림과 같이 y 축을 축으로 하고 꼭짓점의 y 좌표가 양수인

포물선과 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 이 다음을 만족시킨다.

- (가) 포물선은 쌍곡선의 두 초점 $F_1(-c, 0)$ 과 $F_2(c, 0)$ 를 지난다.
 (나) 포물선과 쌍곡선의 제 1사분면 위의 교점 Q 에 대하여 Q 의 y 좌표는 3이고, $\overline{F_1Q} = 9$ 이다.
 (다) 포물선의 초점 P 가 선분 F_1Q 위에 있다.

쌍곡선의 주축의 길이가 $p+q\sqrt{17}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.
 (단, c 는 양의 실수이고, p, q 는 유리수이다.) [4점]



28. 10^6 보다 작은 자연수 전체의 집합을 전체집합 U 라 하자.

U 의 부분집합 S 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) S 의 모든 원소는 어떤 자리의 수도 0이 아닌 자연수이다.
 (나) S 는 한 자리의 자연수와 여섯 자리의 자연수를 각각 하나 이상 원소로 가진다.
 (다) S 의 임의의 두 원소 a, b 에 대해 $a < b$ 이면 어떤 자연수 n 에 대하여 b 를 10^n 으로 나누었을 때 나머지의 값이 a 의 값과 같다.

원소의 개수가 4인 서로 다른 집합 S 의 개수가 k 이다.

$\frac{k}{9^5}$ 의 값을 구하시오. [4점]

29. 좌표공간에 구 $S: x^2 + y^2 + z^2 = 7$ 와 구 위의 점

$A(1, 2, \sqrt{2})$ 와 구 밖의 점 $B(0, 3, 0)$ 가 있다. 구 S 위의 한 점 X 가 다음 조건을 만족시키며 구 위를 움직인다.

선분 XB 를 $2:1$ 로 외분하는 점을 Y 라 할 때,
 $\overrightarrow{AX} \cdot \overrightarrow{AY} = -3$ 이다.

점 P 가 구 S 위를 움직일 때, $\overrightarrow{BX} \cdot \overrightarrow{AP}$ 의 최댓값은 $p + q\sqrt{57}$ 이다. $p \times q$ 의 값을 구하시오. (단, p, q 는 유리수이다.) [4점]

30. 구간 $[0, \infty)$ 에서 정의된 함수 $f(x)$ 가

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & (0 \leq x \leq \pi) \\ 0 & (\pi < x) \end{cases}$$

이다. 구간 $[0, t]$ 에서 정의된 함수 $g(x)$ 가 일차함수이고, 구간 $[0, t]$ 에서 $g(x) \geq f(x)$ 를 만족시킨다. 이때, 실수 $t (t > 2\pi)$ 에 대하여 $\int_0^t g(x)dx$ 의 최솟값을 $h(t)$ 라 하자.

상수 $k (k > 2\pi)$ 에 대하여 $h(k) = \frac{1}{10} k^2$ 이다.

$\frac{-5h'(k) + k}{5k^2} = \frac{q}{p} \sqrt{6}$ 이다. $p + q$ 의 값을 구하시오. (단, p, q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.