1번

(1) 코시의 평균값 정리를 서술하여라

함수 f, g 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 개구간 (a, b) 에서 미분 가능하다고 하자. 그리고 $g'(x) \neq 0$ 이다. 그렇다면 다음 식을 만족하는 c 가 (a, b) 에서 존재한다.

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

※ 추가적으로 $g(b) - g(a) \neq 0$ 임을 보이기 위해서 $g(a) \neq g(b)$ 라는 것을 보일 필요가 있다. 귀류법을 사용하면, 만약에 $g(a) = g(b)$ 가 성립한다면 이 역시 롤의 정리에 의해 $g'(d) = 0$ 인 d 가 (a, b) 에서 존재하는데 이는 $g'(x) \neq 0$ 에 모순이다.

(2) 상수 변수화를 이용하여 코시의 평균값 정리를 증명하여라

$k = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$ 라고 두고 이 식을 간단히 하면

$$k[g(b) - g(a)] = f(b) - f(a)$$

이고 이 식에서 a 를 x 로 변수화 하면

$$k[g(b) - g(x)] = f(b) - f(x)$$

이고 넘겨서 새로운 함수를 잡아 주면

$$F(x) = k[g(b) - g(x)] - f(b) + f(x)$$

이고 이 함수를 탐구하면

$$F(a) = F(b) = 0$$

이 나오므로 롤의 정리에 의하여 $F'(c) = 0$ 인 c 가 (a, b) 에서 존재하고, 이때 $F'(c)$ 를 구해보면

$$F'(c) = -kg'(c) + f'(c) = 0$$

이므로 정리하면

$$k = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

인 c 가 (a, b) 에서 존재하므로 증명이 완료된다.

2번

미분가능한 함수 $f(x)$ 에 대하여

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(a) + \frac{(b-a)^2}{2}f'(c)$$

인 c 가 (a,b) 에서 존재함을 보여라

역시 상수변수화를 이용한다. $f'(c) = k$ 라고 먼저 두는 것은 이제 자명해진다. 그리고 b 를 x 라고 변수화하면

$$\int_a^x f(t)dt = (x-a)f(a) + \frac{(x-a)^2}{2}k$$

이식을 넘겨서 정리해주면

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt - (x-a)f(a) - \frac{(x-a)^2}{2}k$$

여기서 $F(a) = F(b) = 0$ 이므로 롤의 정리에 의해 $F'(c) = 0$ 인 c 가 (a,b) 에서 존재한다. 따라서

$$\begin{aligned} F'(x) &= f(x) - f(a) - (x-a)k \\ F'(c) &= f(c) - f(a) - (c-a)k = 0 \end{aligned}$$

따라서 $k = \frac{f(c) - f(a)}{c - a} = f'(d)$ 인 d 가 평균값정리에 의해 c 와 a 사이에 존재한다. 따라서 증명이 완료되었다.

※결국은 $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(a) + \frac{(b-a)^2}{2}f'(d)$ 인 d 가 (a,b) 에서 존재함을 보인 것이다.

3번

(1) 두 번 미분 가능한 함수 $f(x)$ 위의 세 점 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), P_3(x_3, y_3)$ 에 대하여

$$\frac{1}{x_3 - x_1} \left(\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) = \frac{1}{2} f''(c)$$

인 c 가 구간 (x_1, x_3) 에서 반드시 존재함을 보여라. ($x_1 < x_2 < x_3$)

역시 상수변수화를 이용한다. 이 경우에는 우변의 $\frac{1}{2} f''(c)$ 를 통째로 k 라고 치환하면 된다.

$$\frac{1}{x_3 - x_1} \left(\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) = k$$

의 식을 정리하면

$$(y_3 - y_2)(x_2 - x_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_2) = k(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_2 - x_1)$$

이고 이 중 x_1 을 x 로 변수화 하면

$$(y_3 - y_2)(x_2 - x) - (y_2 - f(x))(x_3 - x_2) = k(x_3 - x)(x_3 - x_2)(x_2 - x)$$

이 되고 이를 넘겨서 정리하면

$$F(x) = \frac{(y_3 - y_2)(x_2 - x) - (y_2 - f(x))(x_3 - x_2)}{k(x_3 - x)(x_3 - x_2)(x_2 - x)}$$

여기서 $F(x_1) = F(x_2) = F(x_3)$ 가 성립하고, 결과적으로 평균값 정리를 두 번 쓴다면 $F''(c) = 0$ 인 c 가 존재하게 된다.

$$F''(x) = f''(x)(x_3 - x_2) - 2k(x_3 - x_2)$$

$$F''(c) = f''(c)(x_3 - x_2) - 2k(x_3 - x_2) = 0$$

에서

$x_2 \neq x_3$ 이므로 $k = \frac{1}{2} f''(c)$ 인 c 가 존재하는 것이다.

따라서 두 번 미분 가능한 함수 $f(x)$ 위의 세 점 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), P_3(x_3, y_3)$ 에 대하여

$$\frac{1}{x_3 - x_1} \left(\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) = \frac{1}{2} f''(c)$$

인 c 가 구간 (x_1, x_3) 에서 반드시 존재한다.

(2) 두 번 미분 가능한 함수 $y = f(x)$ 에 대하여

$$\frac{f(x_1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + \frac{f(x_3)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} = \frac{1}{2}f''(c)$$

인 c 가 구간 (x_1, x_3) 에서 반드시 존재함을 보여라. ($x_1 < x_2 < x_3$)

역시 상수변수화를 이용한다. 이 경우에는 우변의 $\frac{1}{2}f''(c)$ 를 통째로 k 라고 치환하면 된다.

$$\frac{f(x_1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + \frac{f(x_3)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} = k$$

의 식을 정리하면

$$f(x_1)(x_2 - x_3) - f(x_2)(x_1 - x_3) + f(x_3)(x_1 - x_2) = k(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_1 - x_3)$$

이고 이중 x_1 을 x 로 변수화 하면

$$f(x)(x_2 - x_3) - f(x_2)(x - x_3) + f(x_3)(x - x_2) = k(x - x_2)(x_2 - x_3)(x - x_3)$$

이 되고 이를 넘겨서 정리하면

$$F(x) = f(x)(x_2 - x_3) - f(x_2)(x - x_3) + f(x_3)(x - x_2) - k(x - x_2)(x_2 - x_3)(x - x_3)$$

여기서 $F(x_1) = F(x_2) = F(x_3)$ 가 성립하고, 결과적으로 평균값 정리를 두 번 쓴다면 $F''(c) = 0$ 인 c 가 존재하게 된다.

$$F''(x) = f''(x)(x_2 - x_3) - 2k(x_2 - x_3)$$

$$F''(c) = f''(c)(x_2 - x_3) - 2k(x_2 - x_3) = 0$$

에서 $x_2 \neq x_3$ 이므로 $k = \frac{1}{2}f''(c)$ 인 c 가 존재하는 것이다

따라서 두 번 미분 가능한 함수 $y = f(x)$ 에 대하여

$$\frac{f(x_1)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + \frac{f(x_2)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + \frac{f(x_3)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{1}{2}f''(c)$$

인 c 가 구간 (x_1, x_3) 에서 반드시 존재한다.