E.T's Eight Technics.

Ver. 2019

First Technic.

# 함수 다루기

함수를 정복할 수 있다면

수학의 반은 정복했다고 할 수 있다.

- E . T -

# 함수 레시피



- E . T -

# 1. 함수, 역함수, 합성함수의 정의 및 활용방안

# Question. 01

함수 $f(x)=\ln(\tan x)$ $\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 의 역함수 $g(x)$ 에 대하여 $\lim_{h\to 0}\dfrac{4g(8h)-\pi}{h}$ 의 값을 구하시오.

[4점][2013년 9월 평가원]

# Question. 02

함수 $f(x)=x+\sin x$에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=(f\circ f)(x)$로 정의할 때, [보기]에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점][2007년 수능]

ㄱ. 함수 $f(x)$의 그래프는 개구간 $(0, \pi)$에서 위로 볼록하다.
ㄴ. 함수 $g(x)$는 개구간 $(0, \pi)$에서 증가한다.
ㄷ. $g'(x)=1$인 실수 $x$가 개구간 $(0, \pi)$에 존재한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

## 2. 새로운 함수와 친해지기

# Question. 03

함수 $f(x) = -3x^4 + 4(a-1)x^3 + 6ax^2$ $(a>0)$과 실수 $t$에 대하여, $x \leqq t$에서 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 $a$의 최댓값은?

[4점][2010년 9월 평가원]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

# Question. 04

$0 < t < 41$ 인 실수 $t$에 대하여 곡선 $y = x^3 + 2x^2 - 15x + 5$와 직선 $y = t$가 만나는 세 점 중에서 $x$좌표가 가장 큰 점의 좌표를 $(f(t),\ t)$, $x$좌표가 가장 작은 점의 좌표를 $(g(t),\ t)$라 하자. $h(t) = t \times \{f(t) - g(t)\}$라 할 때, $h'(5)$의 값은?

[4점][2016학년도 대수능]

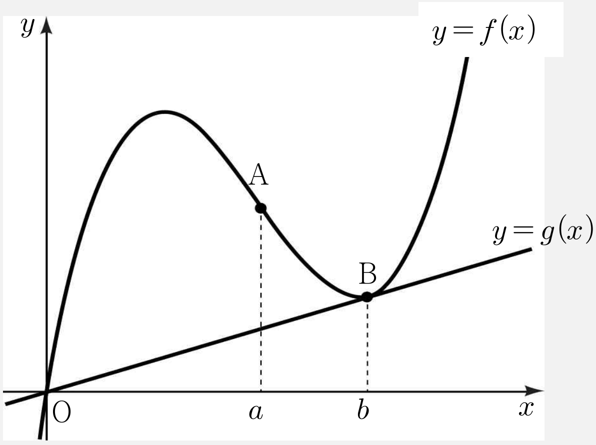
① $\frac{79}{12}$ ② $\frac{85}{12}$ ③ $\frac{91}{12}$ ④ $\frac{97}{12}$ ⑤ $\frac{103}{12}$

## 3. 다항함수의 성질 기억하기

# Question. 05

그림과 같이 좌표평면에서 최고차항의 계수가 양수이고 원점을 지나는 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 있다. 곡선 $y=f(x)$의 변곡점을 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$라 하고 원점을 지나는 직선 $y=g(x)$가 점 $\mathrm{B}(b,\ f(b))$에서 곡선 $y=f(x)$에 접할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, $0<a<b$)

[4점][2011년 4월 교육청]




**[보 기]**

ㄱ. 곡선 $y=f(x)-g(x)$의 변곡점의 $x$좌표는 $a$이다.

ㄴ. 함수 $f(x)-g(x)$는 $x=\dfrac{b}{3}$에서 극댓값을 갖는다.

ㄷ. $\dfrac{b-a}{a}=\dfrac{1}{2}$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

# 4. 연속성과 미분가능성

# Question. 06

함수 $f(x)=kx^2e^{-x}$ $(k>0)$과 실수 $t$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서 $x$축까지의 거리와 $y$축까지의 거리 중 크지 않은 값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 한 점에서만 미분가능하지 않도록 하는 $k$의 최댓값은?

[4점][2013학년도 수능]

① $\frac{1}{e}$ ② $\frac{1}{\sqrt{e}}$ ③ $\frac{e}{2}$ ④ $\sqrt{e}$ ⑤ $e$

# Question. 07

삼차함수 $f(x)=x^3+3x^2-9x$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<a) \\ m-f(x) & (a \leqq x < b) \\ n+f(x) & (x \geqq b) \end{cases}$$

로 정의한다. 함수 $g(x)$가 모든 실수 $x$에 대하여 미분 가능 하도록 상수 $a$, $b$와 $m$, $n$의 값을 정할 때, $m+n$의 값을 구하시오.

[4점][2005년 교육청]

## 5. 그래프의 개형 빠르게 그리기

# Question. 08

3 이상의 자연수 $n$ 에 대하여 함수 $f(x)$ 가

$$f(x)=x^{n}e^{-x}$$

일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[4점][2014년평가원]

[보 기]

ㄱ. $f\left(\frac{n}{2}\right)=f'\left(\frac{n}{2}\right)$

ㄴ. 함수 $f(x)$ 는 $x=n$ 에서 극댓값을 갖는다.

ㄷ. 점 $(0,\ 0)$ 은 곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

# Question. 09

정의역이 $\{x \mid 0 \le x \le \pi\}$ 인 함수 $f(x)=2x\cos x$ 에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[4점][2011년 11월 수능]

**[ 보 기 ]**

ㄱ. $f'(a)=0$ 이면 $\tan a = \dfrac{1}{a}$ 이다.

ㄴ. 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 극댓값을 가지는 $a$ 가 구간 $\left(\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{3}\right)$ 에 있다.

ㄷ. 구간 $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ 에서 방정식 $f(x)=1$ 의 서로 다른 실근의 개수는 $2$ 이다.

① ㄱ　　② ㄷ　　③ ㄱ, ㄴ　　④ ㄴ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

# 6. $|f(x)-k|$ 꼴의 해석

# Question. 10

함수 $f(x)=x+\cos x+\frac{\pi}{4}$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=|f(x)-k| \quad (k\text{는 } 0<k<6\pi\text{인 상수})$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 모든 $k$의 값의 합을 $\frac{q}{p}\pi$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, $p$와 $q$는 서로소인 자연수이다.)

[4점][2013년 04월 교육청]

## 7. 함수의 점화적 추론

# Question. 11

양의 실수 전체의 집합에서 감소하고 연속인 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 양의 실수 $x$ 에 대하여 $f(x) > 0$ 이다.
(나) 임의의 양의 실수 $t$ 에 대하여 세 점

$$(0,\ 0),\ (t,\ f(t)),\ (t+1,\ f(t+1))$$

을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이가 $\dfrac{t+1}{t}$ 이다.

(다) $\displaystyle\int_1^2 \frac{f(x)}{x}\,dx = 2$

$\displaystyle\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{11}{2}} \frac{f(x)}{x}\,dx = \frac{q}{p}$ 라 할 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, $p$ 와 $q$ 는 서로소인 자연수이다.)

[4점][14년 09월 평가원]

# [First Technic. 함수 정답 및 해설]

1) 정답 16

$f(x)=\ln(\tan x)\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$의 역함수가 $g(x)$이므로

$g(0)=a$라 하면 $f(a)=0$, $\ln(\tan a)=0$

$\therefore\ a=\dfrac{\pi}{4}$

즉, $g(0)=\dfrac{\pi}{4}$이다.

$$\lim_{h\to0}\frac{4g(8h)-\pi}{h}=\lim_{h\to0}\frac{4\left\{g(8h)-\frac{\pi}{4}\right\}}{8h}\times8=32g'(0)$$

…… ㉠

한편 $f(g(x))=x$에서 $f'(g(x))\times g'(x)=1$이므로 $x=0$을 대입하면

$f'(g(0))\times g'(0)=1$. $g'(0)=\dfrac{1}{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)}$

$f(x)=\ln(\tan x)$에서 $f'(x)=\dfrac{\sec^2x}{\tan x}$

$f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=2$이므로 $g'(0)=\dfrac{1}{2}$이다.

㉠에서 $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{4g(8h)-\pi}{h}=32g'(0)=16$

[다른 풀이]

$y=\ln(\tan x)$이면 역함수가 $g(x)$이므로 $x=\ln(\tan y)$

$\therefore\ \tan(g(x))=e^x$, $g(0)=\dfrac{\pi}{4}$

$4g(8h)-\pi=4\{g(8h)-g(0)\}$이므로

$$\lim_{h\to0}\frac{4\{g(8h)-g(0)\}}{h}=\lim_{h\to0}\frac{32\{g(8h)-g(0)\}}{8h}=32\times g'(0)$$

$\sec^2(g(x))g'(x)=e^x$ $\quad\therefore\ \sec^2(g(0))g'(0)=1$ $\quad\therefore$

$g'(0)=\dfrac{1}{2}$

$\therefore$ 16

2) 정답 ⑤

ㄱ. $f'(x)=1+\cos x$

$f''(x)=-\sin x$

개구간 $(0,\ \pi)$에서 $f''(x)<0$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 위로 볼록이다. $\therefore$ 참

ㄴ. $g'(x)=f'(f(x))\cdot f'(x)$

$=\{1+\cos(x+\sin x)\}(1+\cos x)$

개구간 $(0,\ \pi)$에서 $g'(x)>0$이므로 함수 $g(x)$는 증가한다. $\therefore$ 참

ㄷ. $g(0)=f(f(0))=f(0)=0$

$g(\pi)=f(f(\pi))=f(\pi)=\pi$

$\dfrac{g(\pi)-g(0)}{\pi-0}=1$이고 $g(x)$는 미분가능이므로 평균값 정리에 의해 $g'(x)=1$인 $x$가 구간 $(0,\ \pi)$에 존재한다.

$\therefore$ 참

3) 정답 ①

$f'(x)=-12x^3+12(a-1)x^2+12ax$

$=-12x\{x^2-(a-1)x-a\}$

$=-12x(x+1)(x-a)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1,\ 0,\ a$

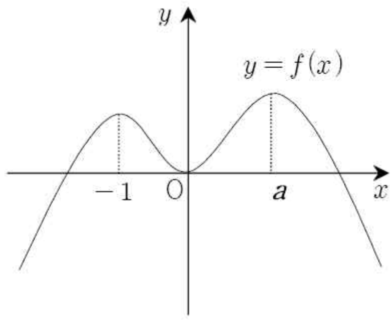
| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $a$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | - | 0 | + | 0 | - |
| $f(x)$ | ↗ | | ↘ | | ↗ | | ↘ |

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.

$f(-1)=2a+1$, $f(a)=a^4+2a^3$이고,

$f(a)-f(-1)=a^4+2a^3-2a-1$

$=(a+1)^3(a-1)$




이므로

$0<a<1$이면 $f(a)<f(-1)$

$a\geqq1$이면 $f(a)\geqq f(-1)$이다.

(ⅰ) $0<a<1$인 경우

$t<-1$이면

$g(t)=f(t)=-3t^4+4(a-1)t^3+6at^2$

$t\geqq-1$이면

$g(t)=f(-1)=2a+1$

따라서,

$$g'(t)=\begin{cases}-12t^3+12(a-1)t^2+12at & (t<-1)\\ 0 & (t>-1)\end{cases}$$

이고, $\displaystyle\lim_{t\to-1-0}g'(t)=\lim_{t\to-1+0}g'(t)=0$

이므로 $g(t)$는 $t=-1$에서 미분가능하다.

그러므로 $0<a<1$일 때 함수 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

(ⅱ) $a\geqq1$인 경우

$f(-1)=f(\alpha)$ $(0<\alpha\leqq a)$이라 하자.

$t<-1$이면

$g(t)=f(t)=-3t^4+4(a-1)t^3+6at^2$

$-1\leqq t<\alpha$이면

$g(t)=f(-1)=2a+1$
$\alpha \leqq t < a$이면
$g(t)=f(t)=-3t^4+4(a-1)t^3+6at^2$
$t \geqq a$이면
$g(t)=f(a)=a^4+2a^3$
따라서,

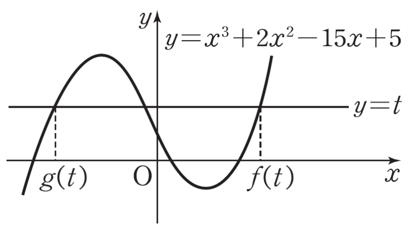
$$g'(t)=\begin{cases}-12t^3+12(a-1)t^2+12at & (t<-1)\\ 0 & (-1<t<\alpha)\\ -12t^3+12(a-1)t^2+12at & (\alpha<t<a)\\ 0 & (t>a)\end{cases}$$

$\lim_{t\to-1-0} g'(t)=\lim_{t\to-1+0} g'(t)=0$이므로
$g(t)$는 $t=-1$에서 미분가능하다.
$\lim_{t\to a-0} g'(t)=\lim_{t\to a+0} g'(t)$이어야 하므로
$-12a^3+12(a-1)a^2+12a^3=0$에서
$12(a-1)a^2=0 \quad \therefore\ a=1$
$a=1$이면 $f(x)=-3x^4+6x^2$이므로
$f(-1)=f(1) \quad \therefore\ \alpha=a=1$

$$\therefore\ g'(t)=\begin{cases}-12t^3+12t & (t<-1)\\ 0 & (-1<t<1)\\ -12t^3+12t & (t>1)\end{cases}$$

$g'(-1)=0$, $g'(1)=0$이므로
$a=1$일 때, $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
(ⅰ),(ⅱ)에서 함수 $g(t)$가 수 전체의 집합에서 미분가능하기 위한 $a$의 값의 범위는 $0<a\leqq 1$이므로
구하는 $a$의 최댓값은 $1$이다.

4) 정답 ④
$h(t)=t\times\{f(t)-g(t)\}$에서
$h'(t)=\{f(t)-g(t)\}+t\times\{f'(t)-g'(t)\}$이고
$h'(5)=\{f(5)-g(5)\}+5\{f'(5)-g'(5)\}$ ……㉠
곡선 $y=x^3+2x^2-15x+5$와 직선 $y=5$가 만나는 점의 $x$좌표는




$x^3+2x^2-15x+5=5$
$x(x+5)(x-3)=0$
$x=-5$ 또는 $x=0$
또는 $x=3$
따라서 $f(5)=3$, $g(5)=-5$

$0<t<41$에서 $x=f(t)$, $x=g(t)$의 역함수가 $t=x^3+2x^2-15x+5$이고, $\dfrac{dt}{dx}=3x^2+4x-15$이므로

$$f'(5)=\frac{1}{(f^{-1})'(3)}=\frac{1}{3\cdot3^2+4\cdot3-15}=\frac{1}{24}$$

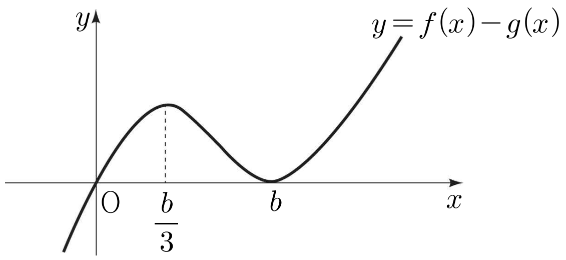
$$g'(5)=\frac{1}{(g^{-1})'(-5)}$$

$$=\frac{1}{3\cdot(-5)^2+4\cdot(-5)-15}=\frac{1}{40}$$

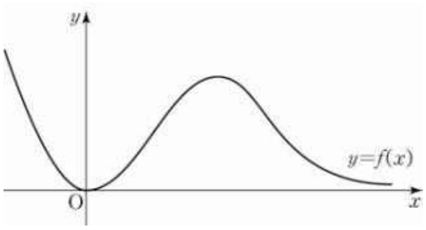
㉠에서

$$h'(5)=\{f(5)-g(5)\}+5\{f'(5)-g'(5)\}$$
$$=\{3-(-5)\}+5\left\{\frac{1}{24}-\frac{1}{40}\right\}$$
$$=8+\frac{1}{12}=\frac{97}{12}$$

5) 정답 ⑤
[출제의도] 도함수를 활용하여 추론하기
ㄱ. $f(x)=px^3+qx^2+rx\ (p>0)$라 하고
$g(x)=mx\,(m\neq0)$라 하자.
두 곡선 $y=f(x)$와 $y=f(x)-g(x)$의 변곡점의 $x$좌표는 $-\dfrac{q}{3p}$이므로 곡선 $y=f(x)-g(x)$의
변곡점의 $x$좌표는 $a$이다. (참)
ㄴ. 그림과 같이 함수 $y=f(x)-g(x)$의 그래프는 원점을 지나고 $x=b$에서 $x$축에 접하므로
$f(x)-g(x)=px(x-b)^2$이다.

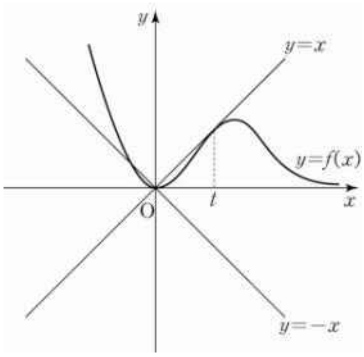



$\{f(x)-g(x)\}'=p(x-b)(3x-b)$이므로
함수 $f(x)-g(x)$는 $x=\dfrac{b}{3}$에서 극댓값을 갖는다. (참)
ㄷ. $h(x)=f(x)-g(x)=px(x-b)^2$
이라 하면 ㄱ 에서 $h''(a)=0$이다.
$\therefore\ a=\dfrac{2b}{3}$이므로 $\dfrac{b-a}{a}=\dfrac{1}{2}$ (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ
6) 정답 ⑤
$f(x)=kx^2e^{-x}\,(k>0)$에서
$f'(x)=2kxe^{-x}-kx^2e^{-x}=kx(2-x)e^{-x}$
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$




| $x$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $\dfrac{4k}{e^2}$ | $\searrow$ |

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서 $x$축까지의 거리와 $y$축까지의 거리 중 크지 않은 값을 $g(t)$라 하므로
곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$, $y=-x$와 만나는 교점을 찾는다.




이때, 미분가능하지 않은 점이 한 곳만 있으려면
$x>0$에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$가 만나지 않거나 접해야 한다.
접점의 좌표를 $(t,\ f(t))$라 하면
$kt^2e^{-t}=t$ ⋯⋯ ㉠이고
$x=t$에서 접선의 기울기가 $1$이므로
$kt(2-t)e^{-t}=1$ ⋯⋯ ㉡
㉠, ㉡에서 $2-t=1$ $\therefore\ t=1$
$\therefore\ k=e$
따라서 $k$의 최댓값은 $e$이다.

7) 정답 118
[출제의도] 함수의 연속성과 미분가능성 이해하기
함수 $g(x)$는 $x=a,\ b$에서 연속이고
$f(a)=m-f(a),\ m-f(b)=n+f(b)$ ⋯ ㉠

$$g'(x)=\begin{cases} f'(x) & (x<a) \\ -f'(x) & (a\le x<b) \\ f'(x) & (x\ge b)\end{cases}$$

함수 $g(x)$는 $x=a,\ b$미분 가능하므로
$f'(a)=-f'(a)$에서 $f'(a)+f'(a)=0$
그러므로 $f'(a)=0$
$f'(b)=-f'(b)$에서 $f'(b)+f'(b)=0$
그러므로 $f'(b)=0$이다.
따라서 $f'(x)=0$인 $x=a,\ b$이다.
$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$
따라서 극대값은 $f(-3)=27$, 극소값은 $f(1)=-5$이므로 $a=-3,\ b=1$
㉠에서 $m=2f(-3)=54$,
$n=m-2f(1)=54+10=64$이므로
$m=54,\ n=64$
$\therefore\ m+n=118$

8) 정답 ③

$$f(x)=\frac{x^n}{e^x}$$

$$f'(x)=\frac{nx^{n-1}e^x-e^xx^n}{(e^x)^2}=\frac{x^{n-1}(n-x)}{e^x}$$

ㄱ. $f\left(\dfrac{n}{2}\right)=\dfrac{\left(\dfrac{n}{2}\right)^n}{e^{\frac{n}{2}}}$ 에서

$$f'\left(\frac{n}{2}\right)=\frac{\left(\dfrac{n}{2}\right)^{n-1}\left(n-\dfrac{n}{2}\right)}{e^{\frac{n}{2}}}=\frac{\left(\dfrac{n}{2}\right)^n}{e^{\frac{n}{2}}}$$

따라서

$f\left(\dfrac{n}{2}\right)=f'\left(\dfrac{n}{2}\right)$ $\therefore$ 참

ㄴ. $f'(x)=-x^{n-1}(x-n)e^{-x}$
ⅰ) $n$이 홀수일 때

| $x$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $n$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ |

ⅱ) $n$이 짝수일 때

| $x$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $n$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ |

$\therefore$ 참

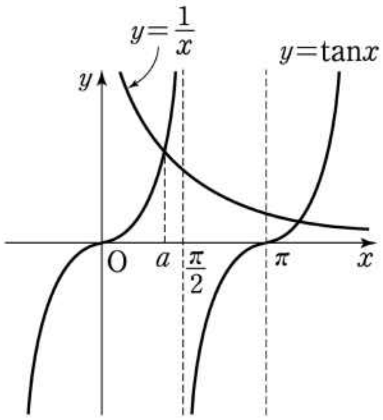
ㄷ. $f''(x)=e^{-x}x^{n-2}(x^2-2nx+n(n-1))$
$f''(0)=0$
ⅰ) $n$이 홀수일 때 $x<0\rightarrow f''(x)<0$
$x>0\rightarrow f''(x)>0$
ⅱ) $n$이 짝수일 때 $x<0\rightarrow f''(x)>0$
$x>0\rightarrow f''(x)>0$
$n$이 짝수일 때 $x=0$ 좌우에서 $f''(x)$의 부호 변화가 없다
$\therefore$ 거짓
(참고) ㄴ에서 $n$이 짝수일 때는 $x=0$에서 극솟값을 가지므로 $(0,\ 0)$에서 변곡점이 될 수 없다.

9) 정답 ⑤

ㄱ. $f(x)=2x\cos x$ 에서 $f'(x)=2\cos x-2x\sin x$

$f'(a)=2\cos a-2a\sin a=0$

$\therefore\ \tan a=\dfrac{\sin a}{\cos a}=\dfrac{\sin a}{a\sin a}=\dfrac{1}{a}$ (참)



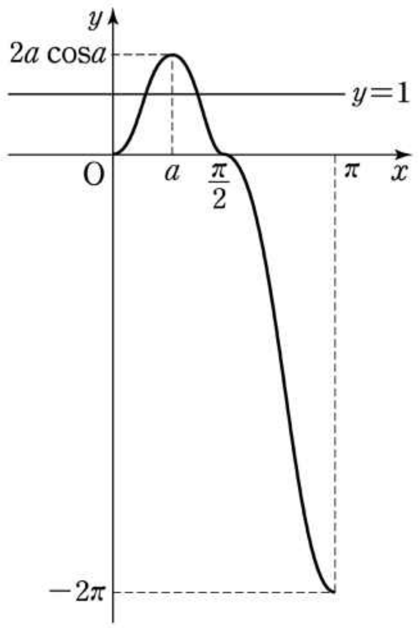

ㄴ. $f'(x)=2\cos x(1-x\tan x)=0$ 에서

$\cos x=0$ 또는 $\tan x=\dfrac{1}{x}$

$\tan x=\dfrac{1}{x}$ 의 근을 $a$ 라 하면 $0<a<\dfrac{\pi}{2}$

증감표를 그려보면

| | $0$ | | $a$ | | $\dfrac{\pi}{2}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $2$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $-$ | $-2$ |
| $f(x)$ | $0$ | ↗ | $2a\cos a$ | ↘ | $0$ | ↘ | $-2\pi$ |




$\therefore\ f(x)$ 는 $x=a$ 에서 극댓값을 가진다.

구간 $\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ 에서 $y=\dfrac{1}{x}$ 은 감소함수, $y=\tan x$ 는 증가함수이므로

$g(x)=\tan x-\dfrac{1}{x}$ 은 증가함수 $g\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1-\dfrac{4}{\pi}<0$,

$g\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}-\dfrac{3}{\pi}>0$ 이므로

중간값 정리에 의해 $\dfrac{\pi}{4}<a<\dfrac{\pi}{3}$ $\therefore$ (참)

ㄷ. $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{2}{3}\pi\cdot\dfrac{1}{2}>1$ 이므로 $f(a)>1$

$\therefore$ 구간 $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ 에서 $f(x)=1$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다. (참)

따라서, ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

10) 정답 37

[출제의도] 도함수를 활용하여 추론하기

$f'(x)=1-\sin x\geq 0$이므로 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하기 위해서는 $f(x)=k$인 $x$에서 $f'(x)=0$이어야 한다.

$f'(x)=0$의 해가 $x=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$($n$은 정수)이므로

$k=f\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)=2n\pi+\dfrac{3}{4}\pi$

$0<k<6\pi$이므로

$k=\dfrac{3}{4}\pi$ 또는 $k=\dfrac{11}{4}\pi$ 또는 $k=\dfrac{19}{4}\pi$

$\therefore$ $k$의 값의 합은 $\dfrac{33}{4}\pi$이므로 $p=4,\ q=33$

따라서 $p+q=37$

11) 127

$(0,\ 0),\ (t,\ f(t)),\ (t+1,\ f(t+1))$을 꼭짓점으로 하는

삼각형의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\mid tf(t+1)-(t+1)f(t)\mid=\dfrac{t+1}{t}$

양변을 $t(t+1)$ 로 나누면

$\dfrac{1}{2}\left|\dfrac{f(t+1)}{t+1}-\dfrac{f(t)}{t}\right|=\dfrac{1}{t^2}$

$f(t)$ 는 감소함수이고 $f(t)>0$ 이므로

$\dfrac{f(t)}{t}>\dfrac{f(t+1)}{t+1}$

$\therefore\ \dfrac{f(t)}{t}-\dfrac{f(t+1)}{t+1}=\dfrac{2}{t^2}$

$\dfrac{f(t+1)}{t+1}-\dfrac{f(t)}{t}=-\dfrac{2}{t^2}$ $\cdots$ ㈀

㈀ 은 $\displaystyle\int_t^{t+1}\frac{f(x)}{x}\,dx=\frac{2}{t}+c$ 를 양변 미분한 것이다

$t=1$ 일 때, $\int_1^2 \frac{f(x)}{x}dx=2+c=2$ 에서 $c=0$

$\therefore \int_t^{t+1} \frac{f(x)}{x}\,dx=\frac{2}{t}$

$$\begin{aligned}\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{11}{2}} \frac{f(x)}{x}\,dx &= \int_{\frac{7}{2}}^{\frac{9}{2}} \frac{f(x)}{x}\,dx + \int_{\frac{9}{2}}^{\frac{11}{2}} \frac{f(x)}{x}\,dx \\ &= \frac{4}{7}+\frac{4}{9}=\frac{64}{63}\end{aligned}$$

$\therefore\ p+q=127$