제 2 교시

수학 영역(나형)

5지선다형

1. $32^{\frac{1}{5}}+\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설 : $32^{\frac{1}{5}}+\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}=2+3=5$

2. $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3+n+5}{n^3+2}$의 값은? [2점]

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

해설 : $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3+n+5}{n^3+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n^2}+\frac{5}{n^3}}{1+\frac{2}{n^3}}$ 이고, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$이므로,

$\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n^2}+\frac{5}{n^3}}{1+\frac{2}{n^3}}=3$

3. 두 집합

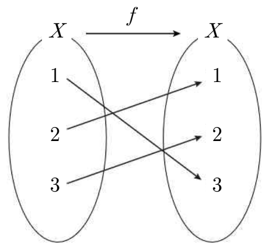
$A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B=\{2, 4, 6\}$

에 대하여 $n(A-B)$의 값은? [2점]

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설 : $A-B=\{1, 3, 5\}$이므로, $n(A-B)=3$이다.

4. 그림은 함수 $f: X\to X$를 나타낸 것이다.



$f(1)+(f\circ f)(3)$의 값은? [3점]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설 : $f(1)=3$이다.
$f(3)=2$이므로, $(f\circ f)(3)=f(2)=1$이다.
그러므로, $f(1)+(f\circ f)(3)=3+1=4$

5. 함수 $y=\sqrt{ax}$ 가 점 $(2,\ 4)$을 지날 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설 : 함수 $y=\sqrt{ax}$ 의 그래프가 점 $(2,\ 4)$을 지나므로,
$4=\sqrt{2a}$ 이고, $a=8$이다.

6. 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6},\ \mathrm{P}(A\cup B)=\frac{1}{2}$$

일 때, $\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

해설 : $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로,
$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$ 이다.

7. 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(1,\ \log_2 3)$, $\mathrm{B}(3,\ \log_2 24)$에 대하여 선분 AB의 길이는? [3점]

① $2\sqrt{3}$ ② $\sqrt{13}$ ③ $\sqrt{14}$ ④ $\sqrt{15}$ ⑤ 4

해설 :
선분 AB의 길이는 두 점 A, B 사이의 거리이므로,
$\sqrt{(3-1)^2+(\log_2 24-\log_2 3)^2}=\sqrt{4+(\log_2 8)^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$ 이다.

8. 철수와 영희가 중국집에서 짜장면, 짬뽕, 볶음밥 중 각자 하나의 메뉴를 선택해 먹으려 한다. 철수와 영희가 서로 다른 메뉴를 고를 확률은? (단, 철수와 영희가 세 개의 메뉴 중 하나를 선택할 확률은 모두 같다.) [3점]

① $\frac{7}{9}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{2}{9}$ ⑤ $\frac{1}{9}$

해설 :

solution 1)

철수와 영희가 같은 메뉴를 고를 확률은 $\frac{1}{3}$이므로,

철수와 영희가 서로 다른 메뉴를 고를 확률은 $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$이다.

solution 2)

철수가 임의로 고른 메뉴와 다른 메뉴를 영희가 고를 확률은 $\frac{2}{3}$이다.

solution 3)

철수와 영희가 3개의 메뉴 중 서로 다른 메뉴를 고르면 고르지 않을 1개의 메뉴를 고르면 된다. 이때의 확률은 $\frac{1}{3}$이다. 또, 철수와 영희가 고른 메뉴를 바꿀 수 있는 경우의 수가 2이므로,

$\frac{1}{3}\times 2=\frac{2}{3}$이다.

solution 4)

철수(영희)가 메뉴를 고르는 경우의 수는 3가지이다.

따라서 철수와 영희가 메뉴를 고르는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여 $3\times 3=9$이다.

철수와 영희가 서로 다른 메뉴를 고르기 위해서는 영희가 메뉴를 고를 때 철수가 고른 메뉴는 선택할 수 없다.

따라서 철수와 영희가 서로 다른 메뉴를 고르는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여 $3\times 2=6$이다.

따라서 철수와 영희가 서로 다른 메뉴를 고를 확률은 $\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$이다.

9. $\left(4x^2+\frac{1}{x}\right)^5$의 전개식에서 x의 계수는? [3점]

① 120 ② 160 ③ 200 ④ 240 ⑤ 280

해설 :

$\left(4x^2+\frac{1}{x}\right)^5$의 전개식에서 일반항은 ${}_5\mathrm{C}_r\left(4x^2\right)^r\left(\frac{1}{x}\right)^{5-r}={}_5\mathrm{C}_r4^rx^{3r-5}$

$3r-5=1$일 때, 즉$r=2$일 때, x의 계수는 ${}_5\mathrm{C}_2\times 4^2=160$이다.

10. 자연수 9를 자연수 1을 사용하지 않고 분할하는 방법의 수는? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설 :

자연수 9를 한 개의 자연수로 분할하는 방법의 수는 1,

자연수 9를 두 개의 자연수로 분할하는 방법의 수는 $\mathrm{P}(7,2)=3$,

자연수 9를 세 개의 자연수로 분할하는 방법의 수는 $\mathrm{P}(6,3)=3$,

자연수 9를 네 개의 자연수로 분할하는 방법의 수는 $\mathrm{P}(5,4)=1$,

자연수 9를 다섯 개 이상의 자연수로 분할하면 반드시 1이 사용되므로, 모든 1을 사용하지 않고 분할하는 방법의 수는 8이다.

11. 함수 $f(x)$에 대하여 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}f\left(1+\frac{k}{n}\right)=4$일 때, $\int_1^2 (2x-2)f(x)dx$의 값은? [3점]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

해설 :

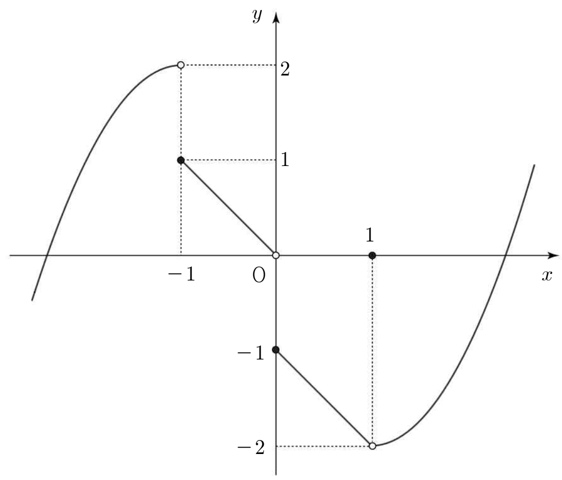
$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}f\left(1+\frac{k}{n}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left\{\left(1+\frac{k}{n}\right)-1\right\}f\left(1+\frac{k}{n}\right)$

$=\int_1^2 (x-1)f(x)dx=4$

$\int_1^2 (2x-2)f(x)dx=2\int_1^2 (x-1)f(x)dx=8$

12. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim\limits_{x\to 0}f(x^2)+\lim\limits_{x\to -\infty}f\left(\frac{1}{x}-1\right)$의 값은? [3점]

① 2 ② 1 ③ 0 ④ −1 ⑤ −2

해설 :

$t=x^2$이라 하면 $x\to 0$일 때 $t\to 0+$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}f(x^2)=\lim\limits_{t\to 0+}f(t)=-1$

$s=\frac{1}{x}-1$이라 하면 $x\to -\infty$일 때 $s\to -1-$

$\therefore \lim\limits_{x\to -\infty}f\left(\frac{1}{x}-1\right)=\lim\limits_{s\to -1-}f(s)=2$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}f(x^2)+\lim\limits_{x\to -\infty}f\left(\frac{1}{x}-1\right)=-1+2=1$

13. 등비수열 $\{a_n\}$이

$$a_1+a_2+a_3=\frac{7}{2},\ a_4+a_5+a_6=28$$

을 만족시킨다. $a_7+a_8+a_9+a_{10}$의 값은? [3점]

① 60 ② 120 ③ 240 ④ 360 ⑤ 480

해설 :

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하자.

$a_1+a_2+a_3=a_1+a_1r+a_1r^2=a_1(1+r+r^2)=\frac{7}{2}$ ······ ①

$a_4+a_5+a_6=a_1r^3+a_1r^4+a_1r^5=a_1r^3(1+r+r^2)=28$ ······ ②

①과 ②에서, $r^3=8$, 즉 $r=2$

①에 $r=2$를 대입하면, $7a_1=\frac{7}{2}$, 즉 $a_1=\frac{1}{2}$

$\therefore a_7+a_8+a_9+a_{10}=a_1r^6+a_1r^7+a_1r^8+a_1r^9$
$=a_1r^6(1+r+r^2+r^3)=\frac{1}{2}\times 2^6\times(1+2+2^2+2^3)=480$

14. 자연수 k에 대하여

$$\frac{1}{k(k+4)},\quad \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

중 작지 않은 값을 $M(k)$라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}M(k)$의 값은? [4점]

① $\frac{8}{15}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{4}{5}$ ④ $\frac{14}{15}$ ⑤ $\frac{16}{15}$

해설 :

방정식 $\frac{1}{k(k+4)}=\frac{1}{(k+1)(k+2)}$를 풀면 $k=2$

$k<2$일 때, 즉 $k=1$일 때 $\frac{1}{k(k+4)}>\frac{1}{(k+1)(k+2)}$, $\therefore M(1)=\frac{1}{5}$

$k\geq 2$일 때 $\frac{1}{k(k+4)}\leq\frac{1}{(k+1)(k+2)}$

$$\therefore M(k)=\begin{cases}\frac{1}{5} & (k=1)\\ \frac{1}{(k+1)(k+2)} & (k\geq 2)\end{cases}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}M(k)=\lim_{n\to\infty}\left\{M(1)+\sum_{k=2}^{n}M(k)\right\}$$
$$=\frac{1}{5}+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{1}{5}+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\frac{1}{5}+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{5}+\frac{1}{3}=\frac{8}{15}$$

15. 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(4,\ 3^2)$를 따르고, 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(10,\ 3^2)$를 따른다. 확률변수 X의 확률밀도함수를 $f(x)$, 확률변수 Y의 확률밀도함수를 $g(x)$라 할 때, $4 \le x \le 10$에서 x축과 곡선 $f(x)$로 둘러싸인 영역을 A, x축과 곡선 $g(x)$로 둘러싸인 영역을 B라 하자. A와 B의 공통영역의 넓이를 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1	0.3413
1.5	0.4332
2	0.4772
2.5	0.4938

① 0.0919 ② 0.1359 ③ 0.1587 ④ 0.1838 ⑤ 0.2718

해설 :
확률변수 X와 확률변수 Y가 따르는 정규분포의 표준편차가 같고, 두 확률변수의 평균이 각각 4, 10이므로 두 곡선 $f(x)$, $g(x)$의 교점의 x좌표는 $\frac{4+10}{2}=7$이다.
그러므로 두 영역 A, B의 공통영역의 넓이는
$\mathrm{P}(4 \le Y \le 7)+\mathrm{P}(7 \le X \le 10)$이다.
$\mathrm{P}(4 \le Y \le 7)+\mathrm{P}(7 \le X \le 10)$
$=\mathrm{P}(-2 \le Z \le -1)+\mathrm{P}(1 \le Z \le 2)$
$=2\mathrm{P}(1 \le Z \le 2)=2\{\mathrm{P}(0 \le Z \le 2)-\mathrm{P}(1 \le Z \le 1)\}$
$=2(0.4772-0.3413)=2\times 0.1359=0.2718$

16. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$인 사차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)f'(x)}{f(x)}=3$$

을 만족시킬 때, $f(3)$의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설 :
주어진 등식에서 $\lim_{x\to 2}(x-2)f'(x)=0$이고 $f(x)$가 다항함수이므로
$\lim_{x\to 2}f(x)=f(2)=0$
인수정리에 의하여 $f(x)=(x-2)g(x)$이다.
(단, 함수 $g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수)
이때, 주어진 등식은
$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\{g(x)+(x-2)g'(x)\}}{(x-2)g(x)}=\lim_{x\to 2}\left\{1+\frac{(x-2)g'(x)}{g(x)}\right\}=3$
$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)g'(x)}{g(x)}=2$
위와 마찬가지의 과정으로, $g(x)=(x-2)h(x)$이고,
(단, 함수 $h(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수)
$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)h'(x)}{h(x)}=1$이다.
위와 마찬가지의 과정으로, $h(x)=(x-2)i(x)$이고,
(단, 함수 $i(x)$는 최고차항의 계수가 1인 일차함수)
$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)i'(x)}{i(x)}=0$이다.
$\therefore f(x)=(x-2)^3 i(x)$
이때 $f(0)=0$이므로 $i(0)=0$
함수 $i(x)$는 최고차항의 계수가 1인 일차함수이고 $i(0)=0$이므로
$i(x)=x$
$\therefore f(x)=x(x-2)^3$, $f(3)=3$

17. 다음은 확률변수 X의 확률분포를 적은 표의 일부가 찢어진 것이다.

X	-1	0	1	합계
$\mathrm{P}(X=x)$		$\frac{5}{9}$		1

다음은 확률변수 X의 평균과 분산이 같다고 할 때, $\mathrm{P}(X=-1)$의 값을 구하는 과정이다.

> $\mathrm{P}(X=-1)=k\ \left(0 \le k \le \frac{4}{9}\right)$라 하자.
> $\mathrm{P}(X=-1)+\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)=1$이므로
> $\mathrm{P}(X=1)=\frac{4}{9}-k$이다.
> 그러므로 $\mathrm{E}(X)=\boxed{(가)}$이고, $\mathrm{E}(X^2)=\boxed{(나)}$이다.
> 따라서 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\boxed{(나)}-\{\boxed{(가)}\}^2$이다.
> 한편, 확률변수 X의 평균과 분산이 같으므로,
> $k=\boxed{(다)}$이다.

위의 (가)에 알맞은 식을 $f(k)$, (나), (다)에 알맞은 수를 각각 a, b라 할 때, $a+f(b)$의 값은? [4점]

① $\frac{7}{9}$ ② $\frac{5}{6}$ ③ $\frac{8}{9}$ ④ $\frac{17}{18}$ ⑤ 1

해설 :

이산확률변수의 기댓값(평균)에 대한 정의에 의하여

(가)$=(-1)\times\mathrm{P}(X=-1)+0\times\mathrm{P}(X=0)+1\times\mathrm{P}(X=1)=\frac{4}{9}-2k$

(나)$=(-1)^2\times\mathrm{P}(X=-1)+0^2\times\mathrm{P}(X=0)+1^2\times\mathrm{P}(X=1)=\frac{4}{9}$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{4}{9}-\left(\frac{4}{9}-2k\right)^2$

이산확률변수 X의 평균과 분산이 같으므로

$\frac{4}{9}-2k=\frac{4}{9}-\left(\frac{4}{9}-2k\right)^2$, 즉 $k=\frac{1}{18}$, $k=\frac{8}{9}$

이때 $0 \le k \le \frac{4}{9}$이므로 $k=$(다)$=\frac{1}{18}$

$\therefore a+f(b)=\frac{4}{9}+\left(\frac{4}{9}-2\times\frac{1}{18}\right)=\frac{7}{9}$

18. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+2 & (a_n\text{이 소수인 경우}) \\ a_n+1 & (a_n\text{이 소수가 아닌 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. a_n보다 작은 소수의 개수를 b_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{15}(a_n-b_n)$의 값은? [4점]

① 105 ② 106 ③ 107 ④ 108 ⑤ 109

해설 :

주어진 식에 $n=1,\ 2,\ 3$을 각각 대입하면

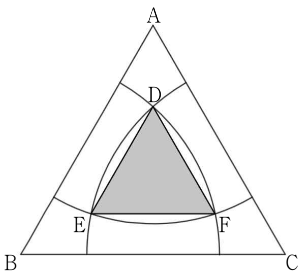
$a_1=1,\ b_1=0,\ \therefore a_1-b_1=1$
$a_2=2,\ b_2=0,\ \therefore a_2-b_2=2$
$a_3=4,\ b_3=2,\ \therefore a_3-b_3=2$
3 이상의 자연수 n에 대하여 소수가 연속으로 있는 경우가 없으므로,
a_n이 소수인 경우, $a_{n+1}=a_n+2,\ b_{n+1}=b_n+1$
a_n이 소수가 아닌 경우, $a_{n+1}=a_n+1,\ b_{n+1}=b_n$
$\therefore a_{n+1}-b_{n+1}=a_n-b_n+1\ (n \ge 3)$
$c_n=a_n-b_n$이라 하면 $c_{n+1}=c_n+1\ (n \ge 3)$
즉 3 이상의 자연수 n에 대하여 수열 $\{c_n\}$은 공차가 1인 등차수열이다.
$c_3=2$이므로, $c_n=n-1\ (n \ge 3)$이다.

$\sum_{n=1}^{2}(a_n-b_n)=1+2=3$

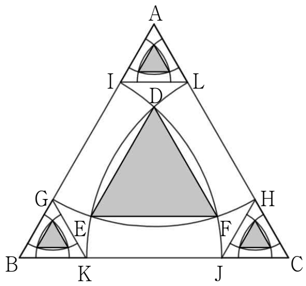
$\sum_{n=3}^{15}c_n=\sum_{n=3}^{15}(n-1)=\sum_{n=1}^{13}(n+1)=\frac{13\times14}{2}+1\times13=104$

$\therefore \sum_{n=1}^{15}(a_n-b_n)=3+104=107$

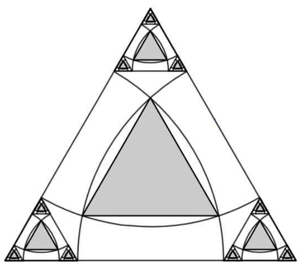
19. 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정삼각형 ABC가 있다.
중심이 A이고 선분 AB를 3 : 1로 내분하는 점을 지나는 원을 O_A, 중심이 B이고 선분 BC를 3 : 1로 내분하는 점을 지나는 원을 O_B, 중심이 C이고 선분 CA를 3 : 1로 내분하는 점을 지나는 원을 O_C, 라 하자. 두 원 O_B, O_C가 삼각형 ABC의 내부에서 만나는 점을 D, 두 원 O_A, O_C가 삼각형 ABC의 내부에서 만나는 점을 E, 두 원 O_A, O_B가 삼각형 ABC의 내부에서 만나는 점을 F라 할 때, 정삼각형 DEF를 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에 원 O_A가 두 선분 AB, CA와 만나는 점을 각각 G, H, 원 O_B가 두 선분 AB, BC와 만나는 점을 각각 I, J, 원 O_C가 두 선분 BC, CA와 만나는 점을 각각 K, L이라 하고, 세 정삼각형 AIL, BGK, CHJ에서 R_1을 얻는 과정과 같은 방법으로 만들어진 3개의 정삼각형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
그림 R_2에서 새로 만들어진 3개의 정삼각형에 각각 R_1에서 R_2를 얻는 과정과 같은 방법으로 만들어지는 9개의 정삼각형에 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



R_1



R_2

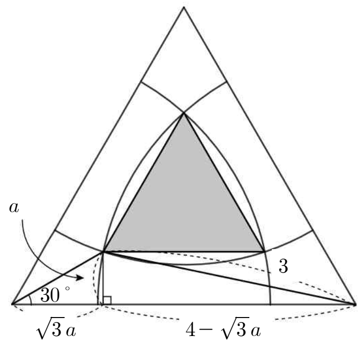

R_3

⋯

⋯

① $\frac{4\sqrt{3}}{13}(19-4\sqrt{15})$ ② $\frac{4\sqrt{3}}{15}(19-4\sqrt{15})$
③ $\frac{8\sqrt{3}}{13}(19-4\sqrt{15})$ ④ $\frac{16\sqrt{3}}{13}(19-4\sqrt{15})$
⑤ $\frac{16\sqrt{3}}{15}(19-4\sqrt{15})$

해설 :
점 E에서 선분 BC에 수선의 발 E′을 내리고 선분 EE′의 길이를 a라 하자. 각 EBE′의 크기가 30°이므로, 선분 BE′의 길이는 $\sqrt{3}a$이고, 선분 BC의 길이가 4이므로, 선분 E′C의 길이는 $4-\sqrt{3}a$이다. 그림으로 표현하면 다음과 같다.



삼각형 EE′C에서 피타고라스 정리에 의하여
$a^2+(4-\sqrt{3}a)^2=9$이므로, $a=\sqrt{3}+\frac{\sqrt{5}}{2}$ 또는 $a=\sqrt{3}-\frac{\sqrt{5}}{2}$이다.
$\sqrt{3}a<4-\sqrt{3}a$이므로, $a=\sqrt{3}-\frac{\sqrt{5}}{2}$이다.
그러므로 삼각형 DEF의 한 변의 길이는
$4-2\sqrt{3}a=4-2\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)=\sqrt{15}-2$이고,
삼각형 DEF의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{15}-2)^2=\frac{\sqrt{3}}{4}(19-4\sqrt{15})$이다.
그림 R_2에 그려진 한 개의 삼각형과 삼각형 DEF의 넓이의 비는 삼각형 GBK의 넓이와 삼각형 ABC의 넓이의 비와 같다.
삼각형 GBK의 한 변의 길이는 삼각형 ABC의 한 변의 길이의 $\frac{1}{4}$이므로, 삼각형 GBK의 넓이는 삼각형 ABC의 넓이의 $\frac{1}{16}$이다.
그러므로 그림 R_2에 그려진 삼각형들 중 한 개의 넓이는 삼각형 DEF의 넓이의 $\frac{1}{16}$이고, 이와 같은 과정이 계속되므로 계속 그려지는 삼각형의 넓이는 전에 그려진 삼각형의 넓이의 $\frac{1}{16}$이다. 그리고 각 시행마다 삼각형의 개수가 3배가 되므로, 공비는 $\frac{3}{16}$이다.
$\lim_{n\to\infty} S_n$은 첫 항이 $\frac{\sqrt{3}}{4}(19-4\sqrt{15})$이고, 공비가 $\frac{3}{16}$인 무한등비급수이므로, 값은
$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}(19-4\sqrt{15})}{1-\frac{3}{16}}=\frac{4\sqrt{3}}{13}(19-4\sqrt{15})$$이다.

20. $f(1)<0$인 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_0^x f(t)dt$$

라 하자. 다음 중 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $g(1)=0$이면 $f(a)=0$을 만족시키는 실수 a가 열린 구간 $(0, 1)$에 적어도 하나 존재한다.

ㄴ. $g(1)>0$이면 $f(b)>0$을 만족시키는 실수 b가 열린 구간 $(0, 1)$에 적어도 하나 존재한다.

ㄷ. $g(1)>0$이면 $f(c)=0$을 만족시키는 실수 c가 열린 구간 $(0, 1)$에 적어도 하나 존재한다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설 :

주어진 등식에 $x=0$을 대입하면 $g(0)=0$
함수 $f(x)$가 다항함수이므로 연속함수이다. 따라서 $g'(x)=f(x)$이다.
$\therefore g'(1)=f(1)<0$

ㄱ. (참) 함수 $g(x)$는 다항함수이고 $g(1)=g(0)=0$이므로 롤의 정리에 의하여 $g'(a)=f(a)=0$을 만족시키는 실수 a가 열린 구간 $(0, 1)$에 적어도 하나 존재한다.

ㄴ. (참) 함수 $g(x)$는 다항함수이고 $g(1)>0$, $g(0)=0$이므로 평균값 정리에 의하여 $\dfrac{g(1)-g(0)}{1-0}=g(1)=g'(b)=f(b)>0$을 만족시키는 실수 b가 열린 구간 $(0, 1)$에 적어도 하나 존재한다.

ㄷ. (참) 함수 $f(x)$는 다항함수이고 $g(1)>0$이므로 ㄴ에 의하여 $f(b)>0$을 만족시키는 실수 b가 열린 구간 $(0, 1)$에 적어도 하나 존재한다.
이때 $f(1)<0$이므로 사이값정리에 의하여 $f(c)=0$을 만족시키는 실수 c가 열린 구간 $(b, 1)$에 적어도 하나 존재한다.
따라서 $f(c)=0$을 만족시키는 실수 c가 열린 구간 $(0, 1)$에 적어도 하나 존재한다.

21. 집합 $X=\{x \mid 0 \le x \le 4\}$에 대하여 X에서 X로의 함수

$$f(x)=\begin{cases} \left|\dfrac{1}{2}x+a\right| & (0 \le x < 2) \\ \dfrac{b}{x}+c & (2 \le x \le 4) \end{cases}$$

의 역함수 $g(x)$가 존재할 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $1 \le y \le f(x)$인 두 자연수 x, y의 모든 순서쌍 (x, y)의 개수는 8이다.
>
> (나) $1 \le y \le g(x)$인 두 자연수 x, y의 모든 순서쌍 (x, y)의 개수는 9이다.

$a+b+5c$의 값은? (단, a, b, c는 상수이다.) [4점]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

해설 :

집합 $X=\{x \mid 0 \le x \le 4\}$에 대하여 함수 $f: X \to X$가 역함수가 존재하므로, 함수 f는 집합 X에서 일대일대응이다.

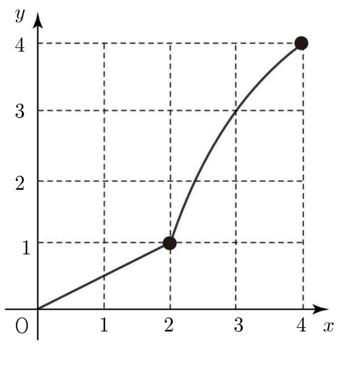
만약, $0 < f(0) < 4$이면, 함수 f는 일대일함수가 아니거나, 치역이 X가 될 수 없다.

그러므로 $f(0)=0$ 또는 $f(0)=4$이다.

i) $f(0)=0$일 때 $a=0$이고 $\left|\dfrac{1}{2}x\right|=\dfrac{1}{2}x$이다.

이때, 함수 f의 역함수가 존재하기 위해 함수 f는 두 가지의 개형이 가능하다.

①



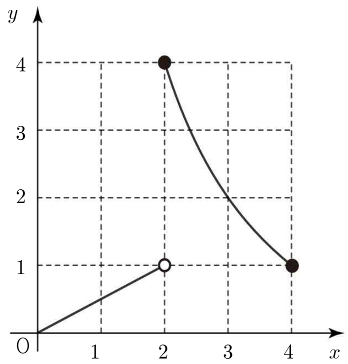
이 때, $\dfrac{b}{x}+c$는 두 점 $(2, 1)$과 $(4, 4)$를 지난다.

그러므로 $b=-12$, $c=7$이다. 그리고 $(3, 3)$을 지난다.

$0 \le x \le 4$에서 $1 \le y \le f(x)$인 두 자연수 x, y의 모든 순서쌍 (x, y)의 개수는 $0+1+3+4=8$이므로 조건 (가)를 만족시킨다.

$0 \le x \le 4$에서 이 함수의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $1 \le y \le g(x)$인 두 자연수 x, y의 모든 순서쌍 (x, y)의 개수는 $2+2+3+4=11$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

②



이 때, $\dfrac{b}{x}+c$는 두 점 $(2, 4)$과 $(4, 1)$를 지난다.

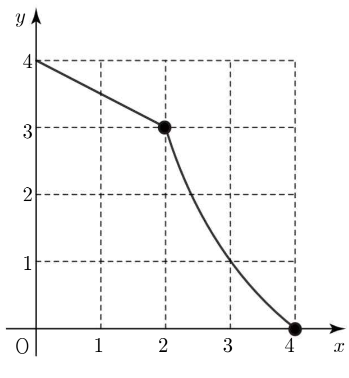
그러므로 $b=12$, $c=-2$이다. 그리고 $(3, 2)$을 지난다.

$0 \le x \le 4$에서 $1 \le y \le f(x)$인 두 자연수 x, y의 모든 순서쌍 (x, y)의 개수는 $0+4+2+1=7$이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

ii) $f(0)=4$일 때, $a=-4$이고 $\left|\dfrac{1}{2}x-4\right|=-\dfrac{1}{2}x+4$이다.

이때, 함수 f의 역함수가 존재하기 위해 함수 f는 마찬가지로 두 가지의 개형이 가능하다.

①

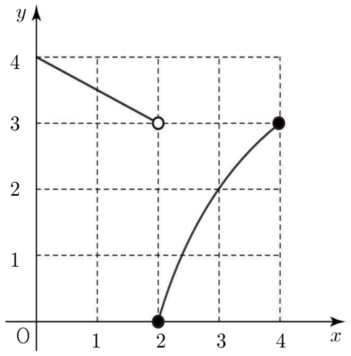


이 때, $\frac{b}{x}+c$는 두 점 $(2, 3)$과 $(4, 0)$를 지난다.

그러므로 $b=12$, $c=-3$이다. 그리고 $(3, 1)$을 지난다.

$0 \le x \le 4$에서 $1 \le y \le f(x)$인 두 자연수 x, y의 모든 순서쌍 (x, y)의 개수는 $3+3+1+0=7$이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

②



이 때, $\frac{b}{x}+c$는 두 점 $(2, 0)$과 $(4, 3)$를 지난다.

그러므로 $b=-12$, $c=6$이다. 그리고 $(3, 2)$을 지난다.

$0 \le x \le 4$에서 $1 \le y \le f(x)$인 두 자연수 x, y의 모든 순서쌍 (x, y)의 개수는 $3+0+2+3=8$이므로 조건 (가)를 만족시킨다.

$0 \le x \le 4$에서 이 함수의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $1 \le y \le g(x)$인 두 자연수 x, y의 모든 순서쌍 (x, y)의 개수는 $2+3+4+0=9$이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

그러므로 모든 조건을 만족시키는 세 수 a, b, c는 각각 -4, -12, 6이다.

$\therefore a+b+5c=-4-12+30=14$이다.

단답형

22. ${}_4\Pi_3$의 값을 구하시오. [3점]

해설 : ${}_4\Pi_3=4^3=64$

23. 함수 $f(x)=x^3-4x^2+8x+3$에 대하여 $f'(2)$의 값을 구하시오. [3점]

해설 : 함수 $f(x)$의 도함수는 $f'(x)=3x^2-8x+8$이므로,
$f'(2)=4$이다.

24. 두 집합 A, B가 $n(A)=3$, $n(B)=2$일 때, 집합 $A\cup B$의 부분집합의 개수의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 하자. $M-m$의 값을 구하시오. [3점]

해설 :
$n(A\cup B)$의 최댓값과 최솟값은 각각 $5,\ 3$이다.
따라서 $A\cup B$의 부분집합의 개수의 최댓값과 최솟값은 각각
$M=2^5=32,\ m=2^3=8$
$\therefore M-m=32-8=24$

25. 실수 x에 대하여 두 조건 p, q가

p : $|x-a|>7$
q : $|x-b|>3$

일 때, 조건 q가 조건 p이기 위한 필요조건이 되도록 하는 두 실수 a, b에 대하여 $a-b$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. M^2+m^2의 값을 구하시오. [3점]

해설 :
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자. 집합 P와 집합 Q는 각각 다음과 같다.
$P=\{x|x<7+a,\ x>-7+a\}$, $Q=\{x|x>3+b,\ x<-3+b\}$
조건 q가 조건 p이기 위한 필요조건이 되어야 하므로 $P\subset Q$
$\therefore 7+a\geq 3+b,\ -7+a\leq -3+b$
$\therefore -4\leq a-b\leq 4$
$\therefore M=4,\ m=-4$
$\therefore M^2+m^2=32$

26. 곡선 $y=x^3-6x^2+8x+2$와 이 곡선 위의 점 $(1,\ a)$에서의 접선으로 둘러싸인 영역의 넓이는 S이다. $4S$의 값을 구하시오. [4점]

해설 :

곡선 $f(x)=x^3-6x^2+8x+2$ 위의 점 $(1,\ 5)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=-1$이다.

따라서 곡선 $f(x)=x^3-6x^2+8x+2$ 위의 점 $(1,\ 5)$에서의 접선의 방정식은 $y=-x+6$이다.
두 함수의 그래프의 교점의 x좌표를 구하기 위하여 방정식의 실근을 구하자.
방정식 $x^3-6x^2+8x+2=-x+6$에서 $x^3-6x^2+9x-4=0$
$(x-1)(x^2-5x+4)=(x-1)^2(x-4)=0$, $\therefore x=1,\ x=4$
따라서 두 함수의 그래프는 점 $(1,\ 5)$에서 접하고 점 $(4,2)$에서 만난다.
따라서 구하고자 하는 넓이 S는

$$S=\int_1^4\left|(x^3-6x^2+8x+2)-(-x+6)\right|dx$$

정적분의 성질에 의하여,

$$S=\int_1^4\left|x^3-6x^2+9x-4\right|dx$$

그러므로,

$$S=\left[\frac{1}{4}x^4-2x^3+\frac{9}{2}x^2-4x\right]_1^4=\frac{27}{4},\ \therefore 4S=27$$

27. 공차가 자연수인 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $a_1 = b_1 + 41$
>
> (나) $(a_{21} - b_{21})(a_{22} - b_{22}) < 0$

$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n} = \frac{4}{3}$일 때, $a_{10} - b_6$의 값을 구하시오. [4점]

해설 :

$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n} = \frac{4}{3}$이므로, 어떤 자연수 k에 대하여 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공차는 각각 $3k$, $4k$이다.

$c_n = a_n - b_n$이라 할 때, 조건 (가)에 의해 $c_1 = 41$이다.

또, 등차수열의 차로 이루어진 수열 c_n도 등차수열이고, c_n의 공차는 a_n의 공차에서 b_n의 공차를 뺀 값이므로, c_n의 공차는 $-k$이다.

k가 자연수이므로 수열 c_n은 감소하는 수열이다.

$\therefore c_n = -kn + (k+41)$

조건 (나)에 의해 $c_{21} \times c_{22} < 0$이고, 수열 c_n은 첫항이 양수이고 감소하는 수열이므로, $c_{21} > 0$, $c_{22} < 0$이다.

$c_{21} = -20k + 41 > 0$이므로, $k < \frac{41}{20}$이다.

$c_{22} = -21k + 41 < 0$이므로, $k > \frac{41}{21}$이다.

$\frac{41}{21} < k < \frac{41}{20}$인 자연수 k는 2이므로, 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공차는 각각 6, 8이다.

그러므로 $a_{10} = a_1 + 54$, $b_6 = b_1 + 40$이고,

$a_{10} - b_6 = (a_1 - b_1) + 14 = 41 + 14 = 55$이다.

28. 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^4}$의 값이 존재한다.
>
> (나) 함수 $|(x-1)f(x)|$가 미분가능하지 않은 점의 개수는 3이고 그 점의 x좌표가 각각 -3, -1, 2이다.

$f'(-3) = 40$일 때, $f(-2)$의 값을 구하시오. [4점]

해설 :

조건 (가)에 의해 함수 $f(x)$는 4차 이하의 다항함수이다.

함수 $|(x-1)f(x)|$가 미분가능하지 않은 점은 $(x-1)f(x) = 0$이지만 x축에 접하지 않는 점에서 생긴다.

즉, $f(x) = 0$인 x 중에서, 혹은 $x = 1$에서 미분가능하지 않다.

조건 (나)에 의해 미분가능하지 않은 점의 x좌표는 -3, -1, 2뿐이므로, $f(x) = 0$의 실근이 $x = -3$, -1, 2이다.

그러므로 $f(x) = (x+3)(x+1)(x-2)(ax+b)$ 꼴이다.

그런데 $x = 1$에서 함수 $(x-1)f(x)$가 미분가능하므로 함수 $f(x)$는 $x = 1$을 지나 함수 $(x-1)f(x)$가 $x = 1$에서 x축과 접함을 알 수 있다.

그러므로 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 a라 할 때, 함수 $f(x)$는

$f(x) = a(x+3)(x+1)(x-2)(x-1)$이다.

$f'(-3) = a \times (-2) \times (-5) \times (-4) = -40a = 40$이므로, $a = -1$이다.

$f(x) = -(x+3)(x+1)(x-2)(x-1)$이므로,

$f(-2) = -(-1) \times (-4) \times (-3) = 12$이다.

29. 한 개의 주사위를 던져서 나온 눈의 수를 k라 할 때, 좌표평면 위의 원점 O에 위치한 점 P를 다음 규칙에 따라 이동시킨다.

(가) k가 짝수이면 점 P를 x축의 방향으로 나온 눈의 수만큼 평행이동시킨다.

(나) k가 1을 제외한 홀수이면 점 P를 y축의 방향으로 나온 눈의 수만큼 평행이동시킨다.

(다) k가 1이면 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동시킨다.

한 개의 주사위를 3번 던져서 위의 규칙에 따라 점 P를 (x, y)로 이동시킨다. x와 y가 모두 자연수일 때, x와 y가 서로소일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

[4점]

해설 :
x, y가 모두 자연수일 경우의 수는 한 개의 주사위를 3번 던지는 모든 경우의 수에서 세 번 연속으로 짝수가 나오거나 세 번 연속으로 1이 아닌 홀수가 나오는 경우를 제외하면 된다.
즉, x, y가 모두 자연수일 경우의 수는 $6^3-2^3-3^3=181$이다.
x, y가 모두 자연수이고 x, y가 서로소일 경우의 수를 한 개의 주사위를 3번 던지는 과정에서
(i) 1이 한 번도 나오지 않는 경우,
(ii) 1이 한 번 나오는 경우,
(iii) 1이 두 번 나오는 경우
로 나누어 살펴보자.
(단, 1이 세 번 나온다면 $x=3$, $y=3$이므로, x, y가 서로소가 아니어서 고려하지 않아도 된다.)

(i) 1이 한 번도 나오지 않는 경우 :
만약 짝수가 세 번 연속 나올 경우 $y=0$이고 1을 제외한 홀수가 세 번 연속 나올 경우 $x=0$이다. 또한 짝수가 한 번 나오고 홀수가 두 번 나올 경우, x, y 모두 2의 배수가 되므로 짝수가 두 번 나오고 1을 제외한 홀수가 한 번 나오는 경우에서
(1) 1을 제외한 홀수가 3인 경우,
(2) 1을 제외한 홀수가 5인 경우
로 나눠 살펴보자.

(1) 1을 제외한 홀수가 3인 경우 :
이때는 두 짝수를 더한 값이 3의 배수가 되어서는 안 된다.
따라서 가능한 조합을 순서를 고려하지 않고 쓰면 22, 26 44, 46가 있다.
그러므로 이때 나올 수 있는 경우의 수는 $\frac{3!}{2!}+3!+\frac{3!}{2!}+3!=18$

(2) 1을 제외한 홀수가 5인 경우 :
이때는 두 짝수를 더한 값이 5의 배수가 되어서는 안 된다.
따라서 가능한 조합을 순서를 고려하지 않고 쓰면 22, 24, 26, 44, 66이 있다.
그러므로 이때 나올 수 있는 경우의 수는 $\frac{3!}{2!}+3!+3!+\frac{3!}{2!}+\frac{3!}{2!}=21$

(ii) 1이 한 번 나오는 경우 :
짝수가 두 번 연속 나오면 $y=1$, 1이 아닌 홀수가 두 번 연속 나오면 $x=1$이므로 짝수가 두 번 연속 나오거나 1이 아닌 홀수가 두 번 연속 나오는 경우가 가능하다.
각 경우의 수는 ${}_3C_1\times3^2=27$, ${}_3C_1\times2^2=12$이다.
또한, 이 경우에 짝수가 한 번, 1 아닌 홀수가 한 번 나올 때에도 x, y가 서로소일 수 있다. 예컨대, 1, 4, 5가 나오면 서로소이다.
이 경우를
(3) 1이 아닌 홀수가 3인 경우,
(4) 1이 아닌 홀수가 5인 경우
로 나눠 살펴보자.
(3) 1이 아닌 홀수가 3인 경우:
$y=4$이므로 어떠한 짝수가 나와도 x, y는 서로소가 된다.
따라서 이때 나올 수 있는 경우의 수는 ${}_3C_1\times3!=18$
(4) 1이 아닌 홀수가 5인 경우:
$y=6$이므로 $1+k$가 3의 배수가 되지 않도록 하는 짝수 k는 $k=4$ 또는 $k=6$이다.
따라서 이때 나올 수 있는 경우의 수는 ${}_2C_1\times3!=12$

(iii) 1이 두 번 나오는 경우:
만약 짝수가 나온다면 x, y 모두 2의 배수이므로 반드시 1이 아닌 홀수가 나와야 한다.
따라서 이때 나올 수 있는 경우의 수는 $\frac{3!}{2!}\times{}_2C_1=6$

따라서 x, y가 모두 자연수이고 x, y가 서로소일 경우의 수는 $18+21+12+27+18+12+6=114$이다.
그러므로 $\frac{q}{p}=\frac{114}{181}$이고, $p+q=295$이다.

30. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> k에 대한 방정식 $\lim_{x\to k}\frac{f(x)}{x-k}=k^3-3k^2-3k+7$이 서로 다른 세 실근을 갖는다.

양의 실수 m에 대하여 함수 $g(x)$가

$$g(x)=\begin{cases} -x+2 & (x<a) \\ (x-m)^2+4 & (a\le x<b) \\ -2x+14 & (x\ge b)\end{cases}$$

일 때, 합성함수 $f\circ g$가 실수 전체 집합에서 연속이다. $m+a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) [4점]

해설 :

k에 대한 방정식 $\lim_{x\to k}\frac{f(x)}{x-k}=k^3-3k^2-3k+7$의 서로 다른 세 실근을 α, β, γ라 하자.
그러면,

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{x-\alpha}=\alpha^3-3\alpha^2-3\alpha+7$$
$$\lim_{x\to\beta}\frac{f(x)}{x-\beta}=\beta^3-3\beta^2-3\beta+7$$
$$\lim_{x\to\gamma}\frac{f(x)}{x-\gamma}=\gamma^3-3\gamma^2-3\gamma+7$$

을 만족시킨다.
모든 극한값이 수렴하고, (분모)$\to 0$이므로, $f(\alpha)=f(\beta)=f(\gamma)=0$이다. 그러므로 $f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$이다.

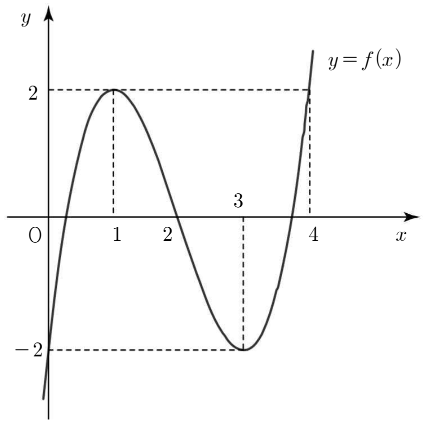
$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{x-\alpha}=f'(\alpha)=\alpha^3-3\alpha^2-3\alpha+7$$
$$\lim_{x\to\beta}\frac{f(x)}{x-\beta}=f'(\beta)=\beta^3-3\beta^2-3\beta+7$$
$$\lim_{x\to\gamma}\frac{f(x)}{x-\gamma}=f'(\gamma)=\gamma^3-3\gamma^2-3\gamma+7$$

이므로, 삼차방정식 $f'(x)=x^3-3x^2-3x+7$의 서로 다른 세 실근이 α, β, γ이다.
그러므로 $f'(x)-(x^3-3x^2-3x+7)=-(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=-f(x)$이고, $f(x)+f'(x)=x^3-3x^2-3x+7$이다.
$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$라 할 때, $f'(x)=3x^2+2ax+b$이므로,

$$\begin{aligned}f(x)+f'(x)&=x^3+(a+3)x^2+(2a+b)x+b+c\\&=x^3-3x^2-3x+7\end{aligned}$$

이다.
그러므로 $a+3=-3$, $2a+b=-3$, $b+c=7$이고,
$a=-6$, $b=9$, $c=-2$이다.
$\therefore f(x)=x^3-6x^2+9x-2$

함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



함수 $f\circ g$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로,
$\lim_{x\to a-}(f\circ g)(x)=\lim_{x\to a+}(f\circ g)(x)$이고
$\lim_{x\to b-}(f\circ g)(x)=\lim_{x\to b+}(f\circ g)(x)$이다.

방정식 $(x-m)^2+4=-x+2$의 판별식 $(2m-1)^2-4(m^2+2)$이 $m>0$일 때, 0보다 작으므로, $m>0$일 때, $y=-x+2$와 $y=(x-m)^2+4$는 만나지 않는다.
그러므로 $\lim_{x\to a-}g(x)\neq\lim_{x\to a+}g(x)$이고
$\lim_{x\to a-}f(g(x))=\lim_{x\to a+}f(g(x))$이다.
한편, $\lim_{x\to a+}g(x)\ge 4$이므로, $\lim_{x\to a-}f(g(x))=\lim_{x\to a+}f(g(x))$인 $\lim_{x\to a-}g(x)$가 존재하기 위해서는 $\lim_{x\to a+}g(x)=4$이다.
즉, $\lim_{x\to a+}g(x)=4$, $\lim_{x\to a-}g(x)=1$이고 $\lim_{x\to a}(f\circ g)(x)=2$이다.
$\lim_{x\to a-}g(x)=\lim_{x\to a-}(-x+2)=-a+2=1$이므로, $a=1$이다.
그리고 $\lim_{x\to 1+}g(x)=\lim_{x\to 1+}\{(x-m)^2+4\}=4$인 $m=1\,(m>0)$이다.

$\lim_{x\to b-}(f\circ g)(x)=\lim_{x\to b+}(f\circ g)(x)$를 만족시키기 위해
$\lim_{x\to b-}g(x)=\lim_{x\to b+}g(x)$이면 되므로, $x=b$에서 $y=(x-1)^2+4$와 $y=-2x+14$가 만난다.
그러므로 $(b-1)^2+4=-2b+14$인 $b=3$이다.

$\therefore a+b+m=1+3+1=5$이다.