제 2 교시

수학 영역(가형) 해설

문항 번호	정답	문항 번호	정답	문항 번호	정답	문항 번호	정답	문항 번호	정답
1	⑤	7	②	13	①	19	①	25	7
2	③	8	⑤	14	①	20	②	26	9
3	④	9	③	15	④	21	④	27	61
4	②	10	②	16	③	22	64	28	48
5	③	11	④	17	④	23	3	29	401
6	①	12	⑤	18	⑤	24	6	30	30

1. 두 벡터 $\vec{a}=(-2, 3)$, $\vec{b}=(-1, 1)$에 대하여 $|\vec{a}+\vec{b}|$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설 : $\vec{a}+\vec{b}=(-3, 4)$이므로, $|\vec{a}+\vec{b}|=5$이다.

2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(3x+1)}{4x}$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

해설 : $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(3x+1)}{4x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(3x+1)}{3x}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{4}$

3. 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6},\ \mathrm{P}(A\cup B)=\frac{1}{2}$$

일 때, $\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

해설 : $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로,
$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{3}$이다.

4. 좌표공간의 두 점 $\mathrm{A}(2, a, 5)$, $\mathrm{B}(4, 1, 7)$에 대하여 선분 AB의 중점 M을 원점에 대하여 대칭이동한 점이 $(-3, -2, b)$일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① -1 ② -3 ③ -5 ④ -7 ⑤ -9

해설 : $\mathrm{M}\left(3, \dfrac{a+1}{2}, 6\right)$이고, 이 점을 원점에 대칭이동한 점은 $\left(-3, -\dfrac{a+1}{2}, -6\right)$이므로, $\dfrac{a+1}{2}=2$이고 $b=-6$이다.
그러므로 $a=3$, $b=-6$이고, $a+b=-3$이다.

5. 함수 $f(x)=2^{x+a}+b$의 점근선이 $y=5$이고, $f(0)=13$이다. $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

해설 :

$y=2^{x+a}+b$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 x축 방향으로 $-a$, y축 방향으로 b만큼 평행이동한 것이다.

$y=2^x$의 점근선은 $y=0$이므로 $y=2^{x+a}+b$의 점근선은 $y=b$이다. 따라서 $b=5$이다.

$y=2^{x+a}+5$가 $(0,\ 13)$을 지나므로 대입하면

$13=2^{0+a}+5$, $2^a=8$ 그러므로 $a=3$이다.

$a+b=3+5=8$

6. 함수 $f(x)=2x^3+2x+3$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g'(3)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{6}$ ④ $\frac{1}{8}$ ⑤ $\frac{1}{10}$

해설 :

$(g\circ f)(x)=x$이므로 양변을 미분하면,

$g'(f(x))\cdot f'(x)=1$이고, $g'(f(x))=\dfrac{1}{f'(x)}$이다.

$f(0)=3$이고, 함숫값이 3인 x는 유일하므로, $g'(3)=\dfrac{1}{f'(0)}$이다.

$f'(x)=6x^2+2$이므로, $f'(0)=2$이고, $g'(3)=\dfrac{1}{2}$이다.

7. $0\le x<2\pi$에서 방정식

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

의 두 실근을 α, β라 할 때, $\beta-\alpha$의 값은? (단, $\beta>\alpha$) [3점]

① $\frac{\pi}{6}$ ② $\frac{\pi}{3}$ ③ $\frac{\pi}{2}$ ④ $\frac{2\pi}{3}$ ⑤ π

해설 :

$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)-\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\left(\dfrac{1}{2}sinx+\dfrac{\sqrt{3}}{2}cosx\right)-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}cosx-\dfrac{1}{2}sinx\right)$

$=\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이므로, $0\le x<2\pi$에서 방정식의 두 실근은 $\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{2\pi}{3}$

이다. $\beta>\alpha$이므로, $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$이고 $\beta=\dfrac{2\pi}{3}$이다.

$\beta-\alpha=\dfrac{\pi}{3}$이다.

8. 어느 고등학교 학생들의 통학시간은 평균이 38분, 표준편차가 12분인 정규분포를 따른다. 이 고등학교 학생들 중 36명을 임의추출하여 조사한 통학시간의 평균이 33분 이상 36분 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.0166 ② 0.0606 ③ 0.0919 ④ 0.1359 ⑤ 0.1525

해설 :

학생들의 통학시간을 확률변수 X라고 할 때,
X는 정규분포 $\mathrm{N}(38,\ 12^2)$를 따른다.
이 학생들 중 36명을 추출하여 조사한 통학시간의 평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(38,\ 2^2)$을 따른다.

그러므로 $\mathrm{P}(33 \le \overline{X} \le 36) = \mathrm{P}(-2.5 \le Z \le -1)$
$= \mathrm{P}(0 \le Z \le 2.5) - \mathrm{P}(0 \le Z \le 1)$
$= 0.4938 - 0.3413 = 0.1525$

9. 자연수 9를 자연수 1을 사용하지 않고 분할하는 방법의 수는? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설 :

자연수 9를 한 개의 자연수로 분할하는 방법의 수는 1,
자연수 9를 두 개의 자연수로 분할하는 방법의 수는 $\mathrm{P}(7,\ 2) = 3$,
자연수 9를 세 개의 자연수로 분할하는 방법의 수는 $\mathrm{P}(6,\ 3) = 3$,
자연수 9를 네 개의 자연수로 분할하는 방법의 수는 $\mathrm{P}(5,\ 4) = 1$,
자연수 9를 다섯 개 이상의 자연수로 분할하면 반드시 1이 사용되므로, 모든 1을 사용하지 않고 분할하는 방법의 수는 8이다.

10. 이계도함수가 존재하는 함수 $f(x)$가

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f'(x)}{x} = 1$$

을 만족시킬 때, 함수 $g(x) = \dfrac{f(x)}{e^x}$에 대하여 $g''(0)$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설 :

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f'(x)}{x} = 1$이고, $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$이므로,
$\lim\limits_{x \to 0} \{f(x) - f'(x)\} = 0$이다.
함수 $f(x)$가 이계도함수가 존재하므로 실수 전체 집합에서 연속하고, 도함수 $f'(x)$도 실수 전체 집합에서 연속한다.
그러므로 $\lim\limits_{x \to 0} \{f(x) - f'(x)\} = f(0) - f'(0) = 0$이고 $f(0) = f'(0)$이다.

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f'(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0) - \{f'(x) - f(0)\}}{x}$$

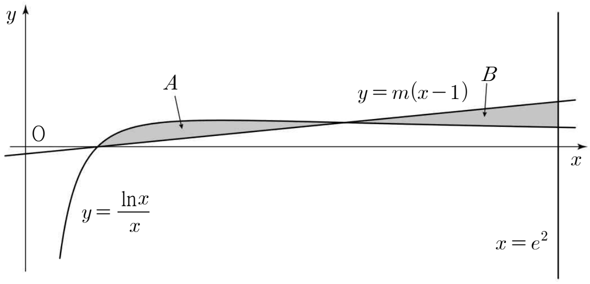
$$= \lim_{x \to 0} \left\{ \frac{f(x) - f(0)}{x} - \frac{f'(x) - f'(0)}{x} \right\} \quad (\because f(0) = f'(0))$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} - \lim_{x \to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = f'(0) - f''(0) = 1$$

($\because f(x)$가 이계도함수가 존재한다.)
$f(0) = f'(0)$이므로 $f(0) = f'(0) = f''(0) + 1$이다.
함수 $g(x) = \dfrac{f(x)}{e^x}$에 대하여 $g'(x) = \dfrac{f'(x) - f(x)}{e^x}$이고,
$g''(x) = \dfrac{f''(x) - 2f'(x) + f(x)}{e^x}$이므로,
$g''(0) = f''(0) - 2f'(0) + f(0) = -1$이다.

11. 곡선 $y=\frac{\ln x}{x}$와 직선 $y=m(x-1)$로 둘러싸인 영역을 A, 곡선 $y=\frac{\ln x}{x}$와 두 직선 $y=m(x-1)$, $x=e^2$로 둘러싸인 영역을 B라 하자. A의 넓이와 B의 넓이가 같을 때, 상수 m의 값은?
(단, $2(e^4-e^2)^{-1}<m<1$) [3점]

① $\frac{5}{2(e^2-1)^2}$ ② $\frac{3}{(e^2-1)^2}$ ③ $\frac{7}{2(e^2-1)^2}$ ④ $\frac{4}{(e^2-1)^2}$ ⑤ $\frac{9}{2(e^2-1)^2}$



해설 :

함수 $y=\frac{\ln x}{x}$의 그래프는 점 $(1, 0)$을 지난다.

두 영역으로 둘러싸인 부분의 넓이가 같으므로,

$\int_1^{e^2}\left\{\left(\frac{\ln x}{x}\right)-m(x-1)\right\}dx=0$이다.

정적분의 성질에 의하여,

$$\int_1^{e^2}\left\{\left(\frac{\ln x}{x}\right)-m(x-1)\right\}dx=\int_1^{e^2}\frac{\ln x}{x}dx-\int_1^{e^2}m(x-1)dx=0 \quad \cdots\cdots ①$$

$t=\ln x$로 치환하면, $dt=\frac{1}{x}dx$, $\ln 1=0$, $\ln e^2=2$이므로,

$\int_1^{e^2}\frac{\ln x}{x}dx=\int_0^2 tdt=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^2=2$이다.

정적분의 성질에 의하여, $\int_1^{e^2}m(x-1)dx=m\left\{\int_1^{e^2}xdx-\int_1^{e^2}1dx\right\}$이고,

$m\left\{\int_1^{e^2}xdx-\int_1^{e^2}1dx\right\}=m\left[\frac{1}{2}x^2-x\right]_1^{e^2}=\frac{1}{2}m(e^2-1)^2$이다.

$\therefore$ ①에서, $2-\frac{1}{2}m(e^2-1)^2=0$이므로, $m=\frac{4}{(e^2-1)^2}$이다.

12. 주머니 A에는 검은 구슬 3개와 흰 구슬 3개가 들어 있고, 주머니 B에는 검은 구슬 2개와 흰 구슬 4개가 들어 있다. 두 주머니 A, B 중 임의로 선택한 하나의 주머니에서 동시에 꺼낸 2개의 구슬이 서로 같은 색일 때, 2개의 구슬이 모두 흰색일 확률은?
(단, 두 주머니 A, B를 선택할 확률은 같다.) [3점]

① $\frac{5}{13}$ ② $\frac{6}{13}$ ③ $\frac{7}{13}$ ④ $\frac{8}{13}$ ⑤ $\frac{9}{13}$

해설 :

주머니 A, B 중 임의로 선택한 하나의 주머니에서 동시에 꺼낸 2개의 구슬이 서로 같은 색일 확률을 p_1이라 할 때,

$p_1=\frac{1}{2}\times\frac{{}_3C_2+{}_3C_2}{{}_6C_2}+\frac{1}{2}\times\frac{{}_2C_2+{}_4C_2}{{}_6C_2}$이다.

주머니 A, B 중 임의로 선택한 하나의 주머니에서 동시에 꺼낸 2개의 구슬이 모두 흰색일 확률을 p_2라 할 때,

$p_2=\frac{1}{2}\times\frac{{}_3C_2}{{}_6C_2}+\frac{1}{2}\times\frac{{}_4C_2}{{}_6C_2}$이다.

구하는 확률을 p라 할 때,

$p=\frac{p_2}{p_1}=\frac{9}{13}$이다.

13. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $\mathrm{P}(x, y)$가

$$x=2\sqrt{3}\,sint-1,\quad y=-\cos t+\sqrt{2}$$

이다. 시각 $t=\alpha(0<\alpha<\pi)$에서 점 P의 속도 $\vec{v}$가 직선 $-x+3=\frac{y-2}{2}$와 수직일 때, 시각 $t=\alpha$에서 점 P의 가속도의 크기는? [3점]

① $\frac{\sqrt{37}}{2}$ ② $\frac{\sqrt{38}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{39}}{2}$ ④ $\sqrt{10}$ ⑤ $\frac{\sqrt{41}}{2}$

해설 :

시각 $t=\alpha$에서 점 P의 속도 $\vec{v}=(2\sqrt{3}\,cos\alpha,\ \sin\alpha)$가

직선 $-x+3=\frac{y-2}{2}$와 수직이므로,

$-2\sqrt{3}\,cos\alpha+2\sin\alpha=0$이고, $2\sin\alpha=2\sqrt{3}\,cos\alpha$이다.

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha=\sqrt{3}$이므로, $0<\alpha<\pi$에서 $\alpha=\frac{\pi}{3}$이다.

점 P의 가속도 $\vec{a}=(-2\sqrt{3}\,sint,\ \cos t)$는 $t=\frac{\pi}{3}$일 때, $\left(-3,\ \frac{1}{2}\right)$이다.

그러므로, $t=\frac{\pi}{3}$일 때, $\vec{a}$의 크기는 $\frac{\sqrt{37}}{2}$이다.

14. 확률변수 X가 가지는 값이 5 이하의 자연수이고

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\mathrm{P}(X=k)}{2k-1}=\frac{n}{18}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

을 만족시킨다. $\mathrm{E}(X)$의 값은? [4점]

① $\frac{10}{3}$ ② $\frac{55}{18}$ ③ $\frac{25}{9}$ ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ $\frac{20}{9}$

해설 :

$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\mathrm{P}(X=k)}{2k-1}$이라 할 때, $S_1=\mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{18}$이다.

$n\geq 2$에서 $S_n-S_{n-1}=\frac{\mathrm{P}(X=n)}{2n-1}=\frac{n}{18}-\frac{n-1}{18}=\frac{1}{18}$이므로,

$n=2,\ 3,\ 4$일 때, $\mathrm{P}(X=n)=\frac{2n-1}{18}$이다.

즉, n이 4이하의 자연수일 때의 확률변수 X의 이산확률분포표를 그리면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{7}{18}$	

확률변수 X가 가지는 값이 5 이하의 자연수이므로,

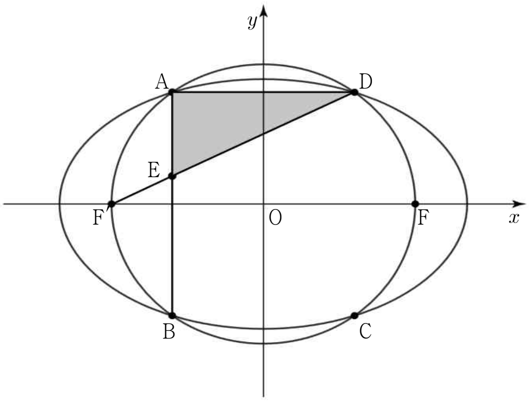
$\sum_{n=1}^{5}\mathrm{P}(X=n)=\frac{1+3+5+7}{18}+\mathrm{P}(X=5)=1$이다.

그러므로, $\mathrm{P}(X=5)=\frac{1}{9}$이다.

$\mathrm{E}(X)=\sum_{n=1}^{5}n\mathrm{P}(X=n)=\frac{1}{18}+2\times\frac{3}{18}+3\times\frac{5}{18}+4\times\frac{7}{18}+5\times\frac{1}{9}$

$=\frac{10}{3}$이다.

15. 그림과 같이 두 점 F, F′를 초점으로 하는 타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$과 선분 FF′를 지름으로 하는 원 C가 있다. 타원과 원의 교점을 각각 A, B, C, D라 할 때, 선분 AB와 선분 DF′의 교점을 E라 하자. 삼각형 ADE의 넓이는? (단, 점 F의 x좌표는 양수이다.) [4점]



① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{4}{5}$ ③ $\frac{9}{10}$ ④ $\frac{9}{5}$ ⑤ $\frac{16}{5}$

해설 :

$\overline{\mathrm{DF}}=a$라 하면, $\overline{\mathrm{DF}}=6-a$이다.

$\triangle\mathrm{DF'F}$는 타원의 초점을 지름의 양끝으로 하는 원의 지름을 빗변으로 하는 직각삼각형이고, $\overline{\mathrm{F'F}}=2\sqrt{5}$이므로,

$a^2+(6-a)^2=2\sqrt{5}$이고 $a=2$이다.

$\angle\mathrm{ADE}=\angle\mathrm{DF'F}$이고 $\angle\mathrm{DAE}=\angle\mathrm{F'DF}=\frac{\pi}{2}$이므로,

$\triangle\mathrm{ADE}$과 $\triangle\mathrm{DF'F}$는 AA닮음이다.

두 점 A, D에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 H′, H라 할 때,

$\triangle\mathrm{DF'F}$에서 $\angle\mathrm{FF'D}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$이므로

$\overline{\mathrm{HF}}=\overline{\mathrm{FF'}}-\overline{\mathrm{HF'}}=2\sqrt{5}-4\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$이고, $\overline{\mathrm{H'F'}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$이다.

그러므로 $\overline{\mathrm{AD}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$이다.

$\triangle\mathrm{ADE}$과 $\triangle\mathrm{DF'F}$는 닮음이고, $\overline{\mathrm{AD}}:\overline{\mathrm{DF'}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}:4=3:2\sqrt{5}$

이므로, $\triangle\mathrm{ADE}$과 $\triangle\mathrm{DF'F}$의 넓이 비는 $9:20$이다.

$\triangle\mathrm{DF'F}$의 넓이는 4이므로, $\triangle\mathrm{ADE}$의 넓이는 $4\times\frac{9}{20}=\frac{9}{5}$이다.

16. 실수 t에 대하여 부등식 $\log_2 x \le t$을 만족시키는 자연수 x의 개수를 $g(t)$라 하자. 방정식 $g(t)=t+1$의 서로 다른 실근의 개수는? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설 :

$t<0$일 때, $\log_2 x \le t$를 만족시키는 자연수 x는 존재하지 않으므로 $g(t)=0$이다.

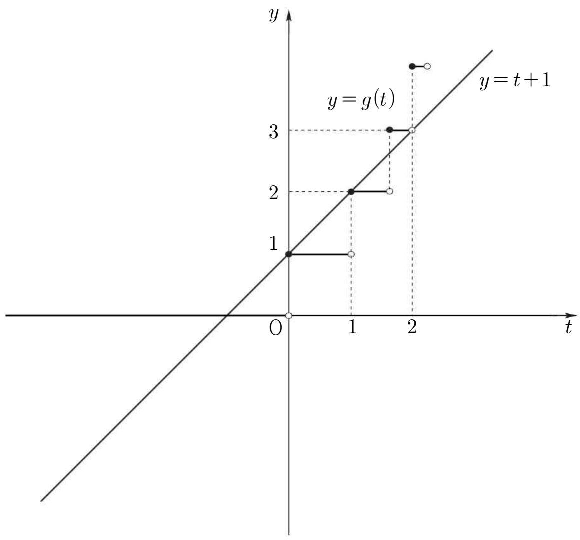
$0 \le t < 1$일 때, $\log_2 x \le t$를 만족시키는 자연수 x는 $x=1$뿐이므로 $g(t)=1$이다.

$1 \le t < \log_2 3$일 때, $\log_2 x \le t$를 만족시키는 자연수 x는 $x=1, 2$이므로 $g(t)=2$이다.

위와 같이 t의 범위에 따라 $g(t)$의 값을 관찰하면 $g(t)$가 다음과 같음을 알 수 있다.

$g(t)=n\left(\log_2 n \le t < \log_2(n+1)\right)$ (n은 자연수) 또는 $g(t)=0\ (t<0)$

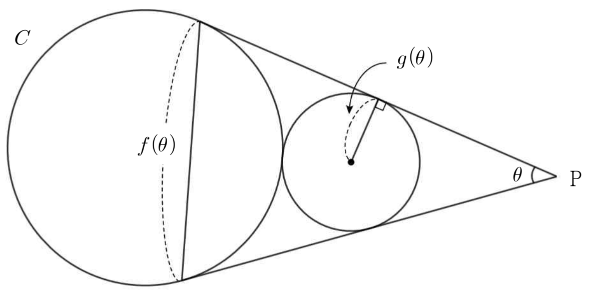
방정식 $g(t)=t+1$의 서로 다른 실근의 개수를 구하기 위해 두 함수 $y=g(t)$, $y=t+1$의 그래프를 그리면 아래와 같다.



이 때 두 그래프의 교점이 3개이므로, 방정식 $g(t)=t+1$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

17. 점 P에서 반지름의 길이가 1인 원 C에 그은 두 접선이 이루는 각의 크기를 θ라 하자. 두 접선과 원 C가 만나는 두 점을 이은 선분의 길이를 $f(\theta)$, 두 접선과 원 C에 동시에 접하는 원의 반지름의 길이를 $g(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to\pi-}\frac{f(\theta)(\pi-\theta)}{g(\theta)}$의 값은? [4점]

① 2 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32



해설 :

step 1) $f(\theta)$ 찾기

solution2)

원 C 의 중심을 O라 하고, 점 P에서 원 C 에 그은 두 접선과 원 C가 만나는 두 접점을 각각 A, B라 하자.

또, 점 A와 점 B의 중점을 M이라 할 때, $\angle APO=\angle APM=\frac{\theta}{2}$ 이므로 $\angle AOM=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$이다. 두 선분 OA, AP가 수직이고, 두 선분 AB, OP는 수직이므로, $\triangle AMO$과 $\triangle PAO$는 AA닮음이다.

그러므로, $\angle OAM=\frac{\theta}{2}$이고, $\overline{AM}\equiv\cos\frac{\theta}{2}$,

$\overline{AB}=2\overline{AM}=f(\theta)=2\cos\frac{\theta}{2}$이다.

step 2) $g(\theta)$ 찾기

점 P에서 원 C에 그은 두 접선과 원 C에 동시에 접하는 원 D의 중심을 Q, 이 원이 직선 AP와 접하는 점을 R이라 할 때, $\triangle PQR$은 $\triangle POA$와 닮음이다.

그럼으로, $\overline{PQ}:\overline{PO}=g(\theta):1$이다.

$\overline{OA}=1$이고, $\angle APO=\frac{\theta}{2}$이므로, $\overline{PO}=\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}$이다.

원 C와 원 D가 접하고 있으므로, $\overline{OQ}=1+g(\theta)$이고,

$\overline{PQ}=\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}-\{1+g(\theta)\}$이다.

$\overline{PQ}:\overline{PO}=g(\theta):1$이므로, $\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}-\{1+g(\theta)\}:\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}=g(\theta):1$

이고, 식을 $g(\theta)$에 대하여 정리하면, $g(\theta)=\frac{1-\sin\frac{\theta}{2}}{1+\sin\frac{\theta}{2}}$이다.

step 3) 삼각함수의 극한

$f(\theta)=2\cos\frac{\theta}{2}$이고, $g(\theta)=\frac{1-\sin\frac{\theta}{2}}{1+\sin\frac{\theta}{2}}$이므로,

$$\lim_{\theta\to\pi-}\frac{f(\theta)(\pi-\theta)}{g(\theta)}=\lim_{\theta\to\pi-}\frac{2\cos\frac{\theta}{2}(\pi-\theta)\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\right)}{1-\sin\frac{\theta}{2}}\text{ 이다. } \cdots ①$$

①의 식을 $\pi-\theta=t$로 치환하면, $\theta\to\pi-$일 때, $t\to0+$이고, $\theta=\pi-t$이므로,

$$①=\lim_{t\to0+}\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{t}{2}\right)\times t\times\left\{1+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{t}{2}\right)\right\}}{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{t}{2}\right)}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{2t\sin\frac{t}{2}\times\left(1+\cos\frac{t}{2}\right)}{1-\cos\frac{t}{2}}=\lim_{t\to0+}\frac{2t\sin\frac{t}{2}\times\left(1+\cos\frac{t}{2}\right)^2}{\left(1-\cos\frac{t}{2}\right)\left(1+\cos\frac{t}{2}\right)}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{2t\sin\frac{t}{2}\times\left(1+\cos\frac{t}{2}\right)^2}{\sin^2\frac{t}{2}}=\lim_{t\to0+}\frac{2t\sin\frac{t}{2}\times\left(1+\cos\frac{t}{2}\right)^2}{\sin^2\frac{t}{2}}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{2t\times\left(1+\cos\frac{t}{2}\right)^2}{\sin\frac{t}{2}}\text{ 이다. } \cdots ②$$

$\lim_{t\to0+}\frac{t}{\sin\frac{t}{2}}=2$이고, $\lim_{t\to0+}\left(1+\cos\frac{t}{2}\right)^2=4$이므로,

$$②=2\lim_{t\to0+}\frac{t}{\sin\frac{t}{2}}\times\lim_{t\to0+}\left(1+\cos\frac{t}{2}\right)^2=2\times2\times4=16\text{이다.}$$

18. 한 변의 길이가 6인 두 정사면체 O_1ABD와 O_2CBD가 선분 BD를 공유하고 있다. 점 E는 점 A와 점 B의 2 : 1 내분점이고, 점 P는 삼각형 BCD에 내접하는 원 위를 움직일 때, $\overrightarrow{O_1P} \cdot \overrightarrow{O_2E}$의 최댓값은? (단, 삼각형 ABD와 삼각형 BCD는 한 평면 위에 있다.) [4점]

① $2(3+\sqrt{3})$　② $4(2+\sqrt{2})$　③ $4(2+\sqrt{3})$

④ $4(3+\sqrt{2})$　⑤ $4(3+\sqrt{3})$

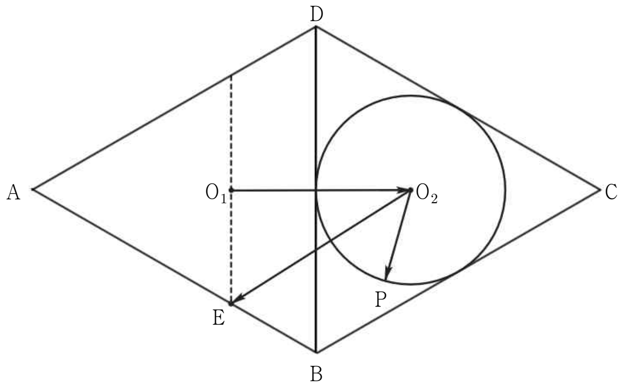
해설 :

두 점 O_1, O_2에서 평면 ABC 위로 내린 수선의 발을 각각 $O_1{}'$, $O_2{}'$라 하자.

$$\overrightarrow{O_1P} \cdot \overrightarrow{O_2E} = \left(\overrightarrow{O_1O_1{}'} + \overrightarrow{O_1{}'P}\right) \cdot \left(\overrightarrow{O_2O_2{}'} + \overrightarrow{O_2{}'E}\right)$$

$$= \overrightarrow{O_1O_1{}'} \cdot \overrightarrow{O_2O_2{}'} + \overrightarrow{O_1{}'P} \cdot \overrightarrow{O_2{}'E}$$

$$= 24 + \overrightarrow{O_1{}'P} \cdot \overrightarrow{O_2{}'E} \quad \left(\because \left|\overrightarrow{O_1O_1{}'}\right| = 2\sqrt{6}\right)$$



$$\overrightarrow{O_1{}'P} \cdot \overrightarrow{O_2{}'E} = \left(\overrightarrow{O_1{}'O_2{}'} + \overrightarrow{O_2{}'P}\right) \cdot \overrightarrow{O_2{}'E}$$

$$= \overrightarrow{O_1{}'O_2{}'} \cdot \overrightarrow{O_2{}'E} + \overrightarrow{O_2{}'P} \cdot \overrightarrow{O_2{}'E} \ \cdots \ ①$$

$O_1{}'$은 정삼각형 ABD의 무게중심이고 점 E는 점 A와 점 B의 2 : 1 내분점이므로 $\overrightarrow{O_1{}'O_2{}'} \cdot \overrightarrow{O_2{}'E} = -\left|\overrightarrow{O_1{}'O_2{}'}\right|^2$이다.

그러므로 ①$= -\left|\overrightarrow{O_1{}'O_2{}'}\right|^2 + \overrightarrow{O_2{}'P} \cdot \overrightarrow{O_2{}'E} = -12 + \overrightarrow{O_2{}'P} \cdot \overrightarrow{O_2{}'E}$

$\overrightarrow{O_2{}'P} \cdot \overrightarrow{O_2{}'E}$의 최댓값은 점 P가 직선 $O_2{}'E$ 위에 있을 때이므로,

$\overrightarrow{O_2{}'P} \cdot \overrightarrow{O_2{}'E}$의 최댓값은 $4\sqrt{3}$이다.

그러므로 $\overrightarrow{O_1P} \cdot \overrightarrow{O_2E}$의 최댓값은 $12 + 4\sqrt{3} = 4(3+\sqrt{3})$이다.

19. 1부터 $6n+3$(n은 자연수)까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 $(6n+3)$장의 카드 중 임의로 뽑은 2장의 카드에 적힌 두 수의 곱이 6의 배수인 경우의 수를 a_n이라 하자. 다음은 a_n을 구하는 과정이다.

> $(6n+3)$장의 카드 중 임의로 뽑은 2장의 카드에 적힌 두 수의 곱이 6의 배수인 경우는 '(i) 두 장의 카드를 뽑는 경우'에서 '(ii) 두 장의 카드에 각각 적힌 두 수의 곱이 2의 배수이지만 3의 배수는 아닌 경우', '(iii) 두 장의 카드에 각각 적힌 두 수의 곱이 2의 배수가 아니지만 3의 배수인 경우'와 '(iv) 두 장의 카드에 각각 적힌 두 수의 곱이 2의 배수가 아니고 3의 배수도 아닌 경우'를 제외하면 된다.
>
> (i)의 경우 :
> $(6n+3)$장의 카드에서 임의로 두 장을 뽑는 경우의 수는 ${}_{6n+3}\mathrm{C}_2$ 이다.
>
> (ii)의 경우:
> 2의 배수이지만 3의 배수는 아닌 수가 각각 적힌 카드 2장을 뽑는 경우와 2의 배수이지만 3의 배수는 아닌 수가 적힌 카드 한 장과 2의 배수가 아니고 3의 배수도 아닌 수가 적힌 카드 한 장을 뽑는 경우가 있다. 따라서 각각의 경우의 수를 더한 값은 $\boxed{(가)}$ 이다.
>
> (iii)의 경우:
> 2의 배수가 아니지만 3의 배수인 수가 각각 적힌 카드 2장을 뽑는 경우와 2의 배수는 아니지만 3의 배수인 수가 적힌 카드 한 장과 2의 배수가 아니고 3의 배수도 아닌 수가 적힌 카드 한 장을 뽑는 경우가 있다. 따라서 각각의 경우의 수를 더한 값은 $\boxed{(나)}$ 이다.
>
> (iv)의 경우:
> 2의 배수가 아니고 3의 배수도 아닌 수가 각각 적힌 카드 2장을 뽑는 경우이므로 경우의 수는 $\boxed{(다)}$ 이다.
>
> 따라서 $a_n = {}_{6n+3}\mathrm{C}_2 - \boxed{(가)} - \boxed{(나)} - \boxed{(다)}$

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 $f(n)$, $g(n)$, $h(n)$이라 할 때, $f(4)+g(6)+h(8)$의 값은? [4점]

① 365 ② 366 ③ 367 ④ 368 ⑤ 369

해설 :

1부터 $6n+3$까지의 자연수 중에서 $6k$, $6k+4$, $6k+5$꼴은 각각 n개가 있고 $6k+1$, $6k+2$, $6k+3$꼴은 각각 $n+1$개가 있다.
2의 배수이지만 3의 배수가 아닌 수는 $6k+2$꼴이거나 $6k+4$꼴이다.
따라서 2의 배수이지만 3의 배수가 아닌 수가 각각 적힌 카드 2장을 뽑는 경우의 수는 ${}_{2n+1}\mathrm{C}_2$이다.
2의 배수가 아니고 3의 배수도 아닌 수는 $6k+1$꼴이거나 $6k+5$꼴이다. 따라서 2의 배수이지만 3의 배수가 아닌 수가 적힌 카드 1장과 2의 배수가 아니고 3의 배수도 아닌 수가 적힌 카드 1장을 뽑는 경우의 수는 ${}_{2n+1}\mathrm{C}_1 \times {}_{2n+1}\mathrm{C}_1$이다.
따라서 (가)$= {}_{2n+1}\mathrm{C}_2 + {}_{2n+1}\mathrm{C}_1 \times {}_{2n+1}\mathrm{C}_1$이다.
2의 배수가 아니지만 3의 배수인 수는 $6k+3$꼴이다.
따라서 2의 배수가 아니지만 3의 배수인 수가 각각 적힌 카드 2장을 뽑는 경우의 수는 ${}_{n+1}\mathrm{C}_2$이다.
2의 배수가 아니지만 3의 배수인 수가 적힌 카드 한 장과 2의 배수가 아니고 3의 배수가 아닌 수가 적힌 카드 한 장을 뽑는 경우의 수는 ${}_{n+1}\mathrm{C}_1 \times {}_{2n+1}\mathrm{C}_1$이다.
따라서 (나)$= {}_{n+1}\mathrm{C}_2 + {}_{n+1}\mathrm{C}_1 \times {}_{2n+1}\mathrm{C}_1$이다.
2의 배수가 아니고 3의 배수도 아닌 수는 $6k+1$꼴이거나 $6k+5$꼴이므로 2의 배수가 아니고 3의 배수도 아닌 수가 적힌 카드 2장을 뽑는 경우의 수는 ${}_{2n+1}\mathrm{C}_2$이다.
따라서 (다)$= {}_{2n+1}\mathrm{C}_2$이다.

$f(n) = {}_{2n+1}\mathrm{C}_2 + {}_{2n+1}\mathrm{C}_1 \times {}_{2n+1}\mathrm{C}_1$
$g(n) = {}_{n+1}\mathrm{C}_2 + {}_{n+1}\mathrm{C}_1 \times {}_{2n+1}\mathrm{C}_1$
$h(n) = {}_{2n+1}\mathrm{C}_2$
이므로, $f(4) = {}_9\mathrm{C}_2 + {}_9\mathrm{C}_1 \times {}_9\mathrm{C}_1 = 36 + 81 = 117$,
$g(6) = {}_7\mathrm{C}_2 + {}_7\mathrm{C}_1 \times {}_{13}\mathrm{C}_1 = 21 + 91 = 112$
$h(8) = {}_{17}\mathrm{C}_2 = 136$이다.
그러므로 $f(4)+g(6)+h(8) = 365$이다.

20. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(2)=6$
(나) 함수 $e^x f(x)$의 역함수 $g(x)$가 존재한다.

$\int_{f(0)}^{6e^2} g(x)dx$의 최댓값과 최솟값의 합을 pe^2+q라 할 때, $p+q$의 값은? (단, p, q는 정수이다.) [4점]

① 32 ② 40 ③ 48 ④ 56 ⑤ 64

해설 :

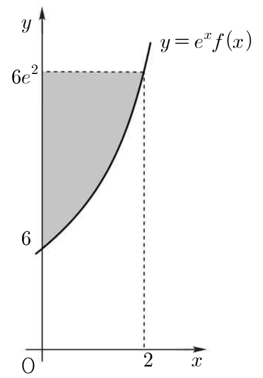
$f(x)=x^2+ax+b$라 하자.

$f(2)=6$이므로, $2a+b=2$이고 $b=2-2a$이다.

$e^x f(x)=e^x(x^2+ax+b)$의 역함수가 존재하므로, 함수 $e^x f(x)$의 도함수 $e^x\{f(x)+f'(x)\}=e^x\{x^2+(a+2)x+(2-a)\}$가 모든 실수에서 0보다 크거나 같다.

그러므로 이차식 $x^2+(a+2)x+(2-a)$의 판별식 $(a+2)^2-4(2-a)=a^2+8a-4$가 0보다 작거나 같다.

함수 $e^x f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



함수 $g(x)$는 함수 $e^x f(x)$의 역함수이므로, 정적분 $\int_{f(0)}^{6e^2} g(x)dx$는 그림의 색칠한 부분과 같다.

그러므로 $\int_{f(0)}^{6e^2} g(x)dx$의 값은 가로의 길이가 2이고 세로의 길이가 $6e^2$인 직사각형에서 $\int_0^2 e^x f(x)dx$의 값을 뺀 값과 같다.

즉,
$$\begin{aligned}\int_{f(0)}^{6e^2} g(x)dx &= 12e^2-\int_0^2 e^x f(x)dx \\ &= 12e^2-\int_0^2 e^x\{x^2+ax+(2-2a)\}dx \\ &= 12e^2-\left[e^x f(x)\right]_0^2+\int_0^2 (2x+a)e^x dx \\ &= 6e^2+(2-2a)+\left[(2x+a)e^x\right]_0^2-\int_0^2 2e^x dx \\ &= (a+8)e^2+(4-3a)=\left(e^2-3\right)a+8e^2+4\end{aligned}$$
이므로,

a가 최대일 때, 정적분 값이 최대이고, a가 최소일 때, 정적분 값이 최소이다. $a^2+8a-4\le 0$이므로, 방정식 $a^2+8a-4=0$의 서로 다른 두 실근 중 작은 값을 α, 큰 값을 β라고 하면, $a=\alpha$일 때, $\int_{f(0)}^{6e^2} g(x)dx$가 최소이고 $a=\beta$일 때, $\int_{f(0)}^{6e^2} g(x)dx$가 최대이다.

그러므로 $\int_{f(0)}^{6e^2} g(x)dx$의 최댓값과 최솟값의 합은

$\left(e^2-3\right)\alpha+8e^2+4+\left(e^2-3\right)\beta+8e^2+4=\left(e^2-3\right)(\alpha+\beta)+16e^2+8$이고,

근과 계수의 관계의 이해 $\alpha+\beta=-8$이므로, $8e^2+32$이다.

$p=8$, $q=32$이므로, $p+q=40$이다.

21. 실수 전체 집합에서 정의된 함수 $f(x)=\ln(ae^{x}+bx+c)$와 실수 t에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=|f(x)-f(t)-f'(t)(x-t)|$$

라 하자. 함수 $g(x)$에 대하여 $\lim_{h\to0}\frac{g(x+h)-g(x-h)}{h}=0$을 만족시키는 실수 x의 개수를 $h(t)$라 할 때, 함수 $h(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $h(t)$가 $t=\alpha$에서 불연속인 α의 최댓값은 3이다.

(나) t에 대한 방정식 $f'(t)h(t)=k$의 실근의 개수를 $l(k)$라 할 때, 함수 $l(k)$가 $k=\beta$에서 불연속인 β의 개수는 6이다.

$f(3)=\ln2$일 때, 함수 $e^{f(x)}$의 최솟값은? (단, a, b, c는 상수이다.) [4점]

① $-4\ln\frac{2}{3}$　② $-4-4\ln\frac{2}{3}$　③ $-12\ln\frac{2}{3}$　④ $-4-12\ln\frac{2}{3}$　⑤ $-16\ln\frac{2}{3}$

해설 :

함수 $f(x)=\ln(ae^{x}+bx+c)$가 실수 전체 집합에서 정의되므로,

모든 실수 x에 대하여 $ae^{x}+bx+c>0$이다.

그러므로 $a>0$, $b<0$이고 $\ln\left(-\frac{b}{a}\right)<\frac{b-c}{b}$이다.

함수 $g(x)=|f(x)-\{f'(t)(x-t)+f(t)\}|$는 곡선 $f(x)$과 곡선 $f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 차이다.

$$\lim_{h\to0}\frac{g(x+h)-g(x-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0+}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+\lim_{h\to0-}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$ 이므로,

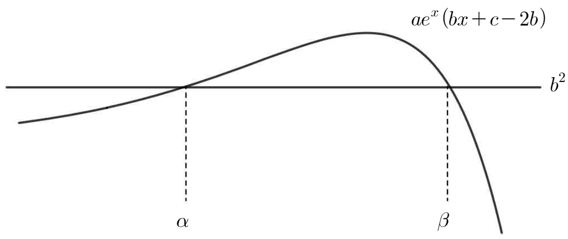
$\lim_{h\to0}\frac{g(x+h)-g(x-h)}{h}=0$인 x는 함수 $g(x)$가 극대 또는 극소가 되는 모든 x이다.

(단, $g'(x)=0$이지만 x에서 극값을 가지지 않을 때도 가능하지만 함수 $g(x)$는 그런 x가 존재하지 않는다.)

$f'(x)=\frac{ae^{x}+b}{ae^{x}+bx+c}$이고 $a>0$, $b<0$이므로, $x=\ln\left(-\frac{b}{a}\right)$에서 함수 $f(x)$는 극솟값을 갖는다.

$$f''(x)=\frac{ae^{x}(ae^{x}+bx+c)-(ae^{x}+b)^{2}}{(ae^{x}+bx+c)^{2}}=\frac{ae^{x}(bx+c-2b)-b^{2}}{(ae^{x}+bx+c)^{2}}$$ 이다.

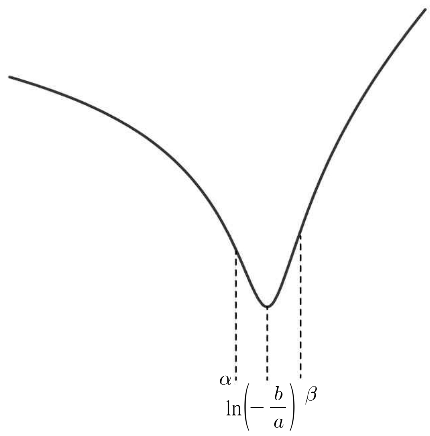
함수 $f(x)$가 극솟값을 가지므로 곡선 $ae^{x}(bx+c-2b)$의 $x=\frac{b^{2}}{b+c}$에서 나타나는 극댓값보다 b^{2}이 작다. 즉, $\frac{b^{2}}{b+c}<\beta$이다.



그러므로 곡선 $ae^{x}(bx+c-2b)$와 직선 $y=b^{2}$이 만나는 서로 다른 두 점 α, β에서 곡선 $f(x)$는 변곡점을 갖는다.

곡선 $f(x)$의 그래프의 개형을 그리기 위해 도함수 $f'(x)$의 극한을 살펴보면 $\lim_{x\to\infty}\frac{ae^{x}+b}{ae^{x}+bx+c}=1$이고 $\lim_{x\to-\infty}\frac{ae^{x}+b}{ae^{x}+bx+c}=0$이다.

곡선 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



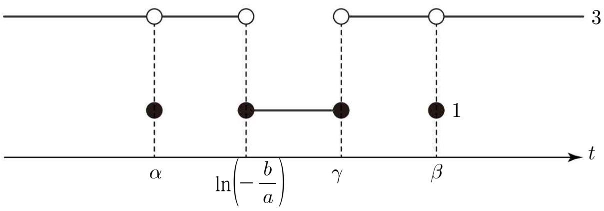
$t=\ln\left(-\frac{b}{a}\right)$일 때, 함수 $g(t)$는 $t=\ln\left(-\frac{b}{a}\right)$에서만 극값을 가지므로, $h(t)=1$이다.

$t=\alpha$ 또는 $t=\beta$일 때, 함수 $g(t)$는 각각 $t=\alpha$ 또는 $t=\beta$에서만 극값을 가지므로, $h(t)=1$이다.

$f'(t)=1$인 t의 값을 $\gamma(<\beta)$라 하자. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{ae^x+b}{ae^x+bx+c}=1$이기 때문에 $\ln\left(-\frac{b}{a}\right)<t\leq\gamma$일 때, $(t,\ f(t))$에서의 접선은 곡선 $f(x)$와 접점 외에서 만나지 않는다. 그러므로 이때, $h(t)=1$이다.

이외의 t일 때는 접점 이외의 교점에서 함수 $g(x)$가 반드시 극솟값을 가지고, 롤의 정리에 의해 접점의 x좌표와 접점이 아닌 교점의 x좌표 사이에서 $g'(x)=0$인 x가 존재하고 이 점에서 극값이 나타난다. 그러므로 $h(t)=3$이다.

함수 $h(t)$의 그래프의 개형을 그리면 다음과 같다.

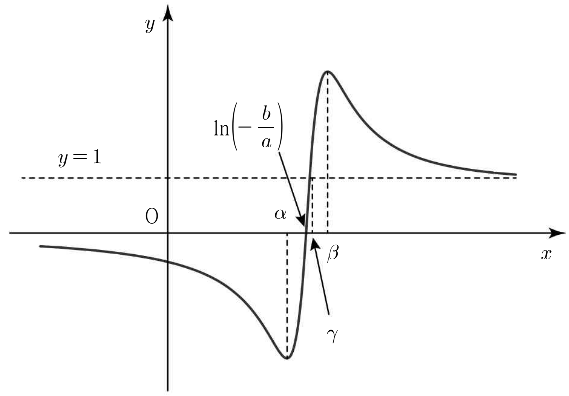


그러므로 조건 (가)에 의하여 $\beta=3$이다.

즉, 변곡점 중 한 점의 x좌표가 3이므로

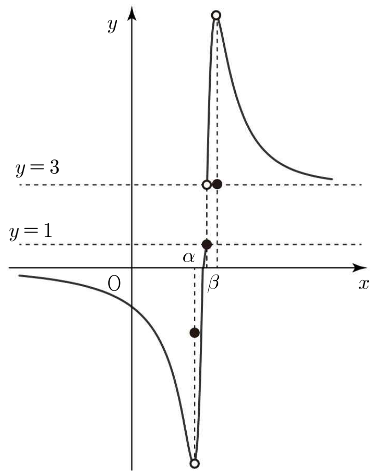
$f''(3)=\frac{ae^3(b+c)-b^2}{(ae^3+3b+c)^2}=0$이고, $ae^3=\frac{b^2}{b+c}$이다.

함수 $f'(t)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



(단, 아직 $\ln\left(-\frac{b}{a}\right)$의 부호를 알지 못한다.)

그러므로 곡선 $f'(t)h(t)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



함수 $l(k)$는 $k=3f'(\alpha)$, $k=f'(\alpha)$, $k=0$, $k=1$, $k=3$, $k=f'(\beta)$ $k=3f'(\beta)$에서 반드시 불연속이다. (나) 조건에 의해 함수 $l(k)$가 불연속점인 k의 개수는 6이어야 하므로, $f'(\beta)=3$이다.

$\beta=3$이므로, $f'(3)=\frac{ae^3+b}{ae^3+3b+c}=3$이고, $ae^3=-4b-\frac{3}{2}c$이다.

$ae^3=\frac{b^2}{b+c}$이므로, $\frac{b^2}{b+c}=-4b-\frac{3}{2}c$이다.

이 방정식을 간단히 정리하면 $10b^2+11bc+3c^2=0$이고, $2b+c=0$ 또는 $5b+3c=0$이다.

만약 $c=-2b$이면, $ae^3=\frac{b^2}{b+c}=-b$이고 $e^3=-\frac{b}{a}$이므로,

$3=\ln\left(-\frac{b}{a}\right)<\frac{b^2}{b+c}<\beta=3$이어서 모순이다.

즉, $c=-\frac{5}{3}b$이고 $a=-\frac{3b}{2e^3}$ 이다.

그러므로 $f(x)=\ln\left(-\frac{3b}{2e^3}e^x+bx-\frac{5}{3}b\right)$이고,

$f(3)=\ln\left(-\frac{3b}{2e^3}\times e^3+3b-\frac{5}{3}b\right)=\ln\left(-\frac{b}{6}\right)=\ln 2$인 $b=-12$이다.

그러므로 $f(x)=\ln\left(18e^{x-3}-12x+20\right)$이고, 함수 $f(x)$의 최솟값은

$x=\ln\left(-\frac{b}{a}\right)=\ln\left(\frac{2}{3}e^3\right)=3+\ln\frac{2}{3}$에서 나타나므로,

$e^{f(x)}$의 최솟값은 $-4-12\ln\frac{2}{3}$이다.

단답형

22. ${}_4\Pi_3$의 값을 구하시오. [3점]

해설 : ${}_4\Pi_3=4^3=64$

23. 함수 $f(x)=x^2+2x+\frac{1}{x}$에 대하여 $f'(1)$의 값을 구하시오. [3점]

해설 : $f'(x)=2x+2-\frac{1}{x^2}$이므로, $f'(1)=3$이다.

24. 곡선 $3xy^3-4x^3y^2+3x-2=0$ 위의 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 기울기를 구하시오. [3점]

해설 :

곡선 $3xy^3-4x^3y^2+3x-2=0$은 음함수 미분법에 의하여

$3y^3+9xy^2\dfrac{dy}{dx}-12x^2y^2-8x^3y\dfrac{dy}{dx}+3=0$이므로,

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{12x^2y^2-3y^3-3}{9xy^2-8x^3y}$ 이다.

그러므로, $x=1$, $y=1$일 때의 접선 기울기 $\dfrac{dy}{dx}$는 6이다.

25. 좌표공간의 두 점 $\mathrm{A}(-4,\ 3,\ 1)$, $\mathrm{B}(2,\ -1,\ 3)$에 대하여 직선 AB에 수직이고 점 B와의 거리가 $\sqrt{14}$인 평면이 선분 AB와 만난다. 이 평면의 방정식을 $ax-2y+bz+c=0$라 할 때, $a+b+c$의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 상수이다.) [3점]

해설 :

직선 AB에 수직이므로 평면 $ax-2y+bz+c=0$의 법선 벡터 $(a,\ -2,\ b)$는 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(6,\ -4,\ 2)=(3,\ -2,\ 1)$과 평행하다.

그러므로 $a=3$, $b=1$이다.

$\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{14}$이고, 점 B와 평면 사이의 거리가 $\sqrt{14}$이면서 선분 AB와 만나므로, 평면 $ax-2y+bz+c=0$는 두 점 A, B의 중점을 지난다.

두 점 A, B의 중점은 $(5,\ -3,\ 4)$이므로 $c=3$이다.

그러므로 $a+b+c=7$이다.

26. 평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 따르는 확률변수 X와 평균이 m^2+3m, 표준편차가 σ인 정규분포를 따르는 확률변수 Y가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\mathrm{P}\left(-2<X<-\dfrac{7}{4}\right)=\mathrm{P}\left(-2<Y<-\dfrac{7}{4}\right)$
>
> (나) 확률변수 X의 확률밀도함수를 $f(x)$, 확률변수 Y의 확률밀도함수를 $g(x)$라고 할 때, $f(0)>g(0)$이다.

$4m^2$의 값을 구하시오. [4점]

해설 :

i) $m<m^2+3m$이라고 하자. 이때, $m<-2$ 또는 $m>0$이다.
두 확률변수 X, Y가 따르는 정규분포의 표준편차가 같고, 확률변수 X의 평균 m보다 확률변수 Y의 평균 m^2+3m이 크므로, 확률밀도함수 $g(x)$는 확률밀도함수 $f(x)$를 x축의 양의 방향으로 평행이동시킨 함수이다.
이때, $f(0)<g(0)$이므로, 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

ii) $m=m^2+3m$이라고 하자. 이때, $m=-2$ 또는 $m=0$이다.
두 확률변수 X, Y의 평균과 표준편차가 같으므로, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 같다.
이때, $f(0)=g(0)$이므로, 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

iii) $m>m^2+3m$이라고 하자. 이때, $-2<m<0$이다.
두 확률변수 X, Y가 따르는 정규분포의 표준편차가 같고, 확률변수 X의 평균이 확률변수 Y의 평균보다 크므로, 확률밀도함수 $f(x)$는 확률밀도함수 $g(x)$를 x축의 양의 방향으로 평행이동시킨 함수이다.
이때, $f(0)>g(0)$이므로, 조건 (나)를 만족시킨다.
또, 조건 (가)에 의해 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 교점의 x좌표는 $\dfrac{1}{2}\left(-2-\dfrac{7}{4}\right)=-\dfrac{15}{8}$이다.
그리고 $\dfrac{m^2+3m+m}{2}=-\dfrac{15}{8}$이므로, $m=-\dfrac{3}{2}$ 또는 $m=-\dfrac{5}{2}$이다.
한편, $-2<m<0$이므로 $m=-\dfrac{3}{2}$이다.

그러므로 $4m^2=4\times\dfrac{9}{4}=9$이다.

27. 한 개의 주사위를 세 번 던져 나온 눈의 수를 차례대로 a, b, c라 할 때, 세 수 a, b, c가 다음 조건을 만족시킬 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

(가) $a<c$
(나) $\lvert a-b\rvert \le \lvert b-c\rvert \le \lvert c-a\rvert$

해설 :

i) $a \le b < c$일 때,
$\lvert a-b\rvert = b-a$이고, $\lvert b-c\rvert = c-b$이므로,
조건 (나)에 의해 $2b \le a+c$이다.
$b=1$일 때, $a=1$이고 $1<c$이므로 가능한 경우의 수는 5개다.
$b=2$, $a=1$일 때, $3 \le c$이므로 가능한 경우의 수는 4이다.
$b=2$, $a=2$일 때, $2<c$이므로 가능한 경우의 수는 4이다.
$b=3$, $a=1$일 때, $5 \le c$이므로 가능한 경우의 수는 2이다.
$b=3$, $a=2$일 때, $4 \le c$이므로 가능한 경우의 수는 3이다.
$b=3$, $a=3$일 때, $3<c$이므로 가능한 경우의 수는 3이다.
$b=4$, $a=1$일 때, $7 \le c$이므로 가능한 경우의 수는 없다.
$b=4$, $a=2$일 때, $6 \le c$이므로 가능한 경우의 수는 1이다.
$b=4$, $a=3$일 때, $5 \le c$이므로 가능한 경우의 수는 2이다.
$b=4$, $a=4$일 때, $4<c$이므로 가능한 경우의 수는 2이다.
$b=5$, $1 \le a \le 3$일 때, 가능한 경우의 수는 없다.
$b=5$, $a=4$일 때, $6 \le c$이므로 가능한 경우의 수는 1이다.
$b=5$, $a=5$일 때, $5<c$이므로 가능한 경우의 수는 1이다.
$b=6$일 때, 가능한 경우의 수는 없다.
그러므로 $a \le b < c$일 때 조건을 만족시킬 경우의 수는 28이다.

ii) $b<a<c$일 때,
$\lvert b-c\rvert = c-b$, $\lvert c-a\rvert = c-a$이므로,
조건 (나)에 의해 $a<b$인데, 이는 $b<a$라는 가정에 모순이다.

iii) $a<c\le b$일 때,
$\lvert a-b\rvert = b-a$이고, $\lvert b-c\rvert = b-c$이므로,
조건 (나)에 의해 $c \le a$인데, 이는 $a<c$라는 가정에 모순이다.

전체 경우의 수는 $6^3=216$이므로,
$\frac{q}{p}=\frac{28}{216}=\frac{7}{54}$이다. 그러므로 $p+q=61$이다.

28. 두 초점이 F, F′인 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{6}=1$ 위를 $\overline{\mathrm{PF}}<\overline{\mathrm{PF'}}$가 되도록 움직이는 점 P가 있다. $\angle\mathrm{POF}=2\angle\mathrm{PF'F}$일 때, 직선 PF가 y축과 만나는 점을 Q, 점 Q에서 직선 OP에 내린 수선의 발을 H라 하자. 삼각형 PQH의 넓이를 k라 할 때, $5k$의 값을 구하시오. (단, 점 F의 x좌표는 양수이고, O는 원점이다.) [4점]

해설 :

점 P는 $\overline{\mathrm{FF'}}$를 지름으로 하는 원과 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{6}=1$ 위의 교점들 중 제 1 또는 제 4 사분면 위의 점이다.

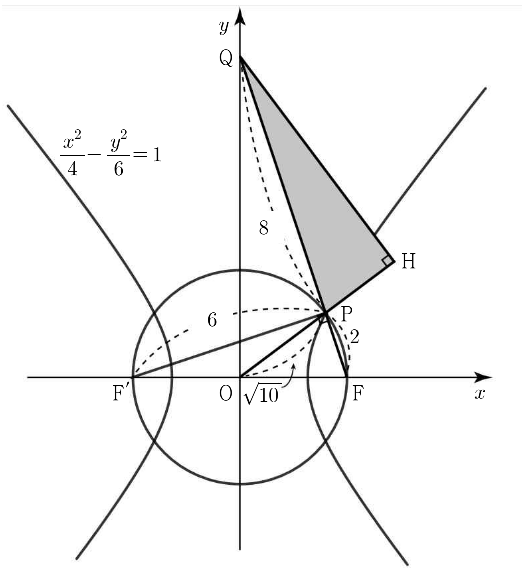
$\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=4$, $\overline{\mathrm{PF}}^2+\overline{\mathrm{PF'}}^2=40$이므로, $\overline{\mathrm{PF}}=2$, $\overline{\mathrm{PF'}}=6$이다.

$\angle\mathrm{F'PF}=\angle\mathrm{QOF}=\frac{\pi}{2}$이고, $\angle\mathrm{QFO}$를 공통각으로 가지는

삼각형 PF′P와 삼각형 OQF는 AA닮음이다.

그러므로 $\overline{\mathrm{QP}}=8$이다.

그림을 그려보면 다음과 같다.



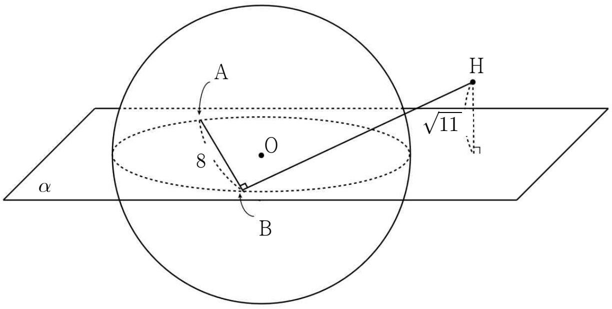
$\overline{\mathrm{OQ}}=3\sqrt{10}$이므로, $\triangle\mathrm{OHQ}$에서 $(\overline{\mathrm{PH}}+\sqrt{10})^2+\overline{\mathrm{QH}}^2=90$이고

$\triangle\mathrm{PHQ}$에서 $\overline{\mathrm{PH}}^2+\overline{\mathrm{QH}}^2=64$이다.

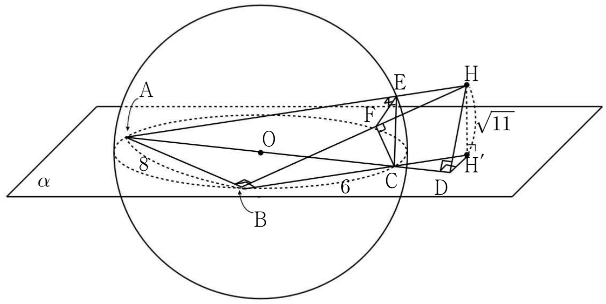
그러므로 $\overline{\mathrm{PH}}=\frac{4\sqrt{10}}{5}$, $\overline{\mathrm{QH}}=\frac{12\sqrt{10}}{5}$이다.

$\therefore k=\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{10}}{5}\times\frac{12\sqrt{10}}{5}=\frac{48}{5}$ 이고, $5k=48$이다.

29. 그림과 같이 반지름의 길이가 5인 구의 중심 O를 지나는 평면을 α라 하고, 평면 α와 구가 만나서 생기는 원 위에 두 점 A, B에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}}=8$이다. 평면 α 위에 있지 않은 점 H는 평면 α와의 거리가 $\sqrt{11}$이고, 직선 AB와 직선 BH는 수직으로 만난다. 직선 AO와 점 H를 포함하는 평면 β에 대하여 평면 α와 평면 β가 이루는 각을 θ_1라 할 때, $\cos\theta_1=\frac{4\sqrt{3}}{9}$이다. 삼각형 ABH를 포함하는 평면 γ와 평면 β가 이루는 각을 θ_2라 할 때, $\cos^2\theta_2=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, $\overline{\mathrm{OH}}>9$이고 p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

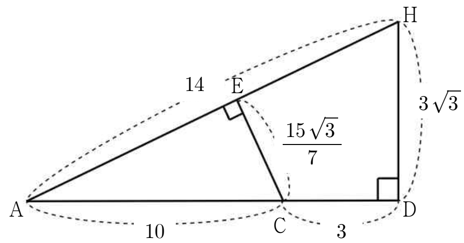


해설 :

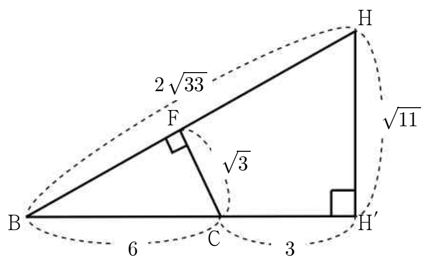


점 H에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H′이라 하자.
직선 AB는 직선 BH와 수직이고 직선 HH′와 평면 α가 수직이므로 직선 AB와 직선 BH′도 수직이다.
점 H에서 직선 AO에 내린 수선의 발을 점 D라 할 때,
삼각형 ABC와 삼각형 H′DC는 AA닮음이다.
점 C에서 두 직선 AH, BH에 내린 수선의 발을 각각 E, F라 하자.
직선 BH와 직선 CF가 수직이고 직선 AB와 직선 CF가 수직이므로 직선 CF와 평면 γ가 수직이다.

이러한 도형들의 관계와 $\cos\theta_1=\frac{\overline{\mathrm{HD}}}{\overline{\mathrm{H'D}}}$를 활용하여 삼각형 ADH는 다음과 같다.



또, 삼각형 BH′H는 다음과 같다.



그러므로 $\sin\theta_2=\frac{\overline{\mathrm{CF}}}{\overline{\mathrm{CE}}}=\frac{7}{15}$이므로, $\cos^2\theta_2=\frac{176}{225}=\frac{q}{p}$이다.

$\therefore p+q=401$

30. 1보다 큰 자연수 k에 대하여 닫힌 구간 $[x-k, x+k]$에서 함수 $f(x)=\int_0^x t^3\sin(nt^2)dt$의 최댓값을 $g(x)$라 할 때, 함수 $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

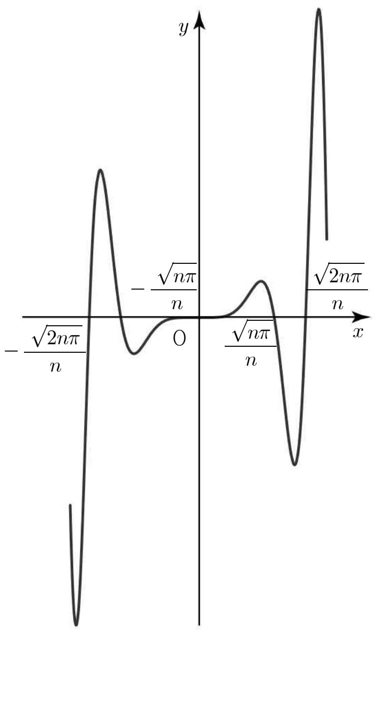
> $-\frac{\sqrt{n\pi}}{n}<x<\frac{\sqrt{n\pi}}{n}$에서 함수 $g(x)$가 미분가능하지 않은 점의 개수는 3이다.

$x>0$에서 정의된 함수

$$h(x)=|g(x)-f(x+k)|$$

에 대하여 집합 $\{x\,|\,h'(x)=0\text{이고 }h''(x)<0\}$의 원소들 중 작은 순서대로 10개를 뽑아 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{10}$라 할 때, $\sum_{i=1}^{10}h(\alpha_i)=105\pi^3$이다. $h'(\pi)=0$일 때, $\frac{1}{\pi^2}\sum_{i=1}^{5}(\alpha_i+3)^2$의 값을 구하시오.
(단, n은 상수이고, $3<\pi<4$이다.) [4점]

해설 :
함수 $y=x^3\sin(nx^2)$가 0인 x는 자연수 m에 대하여 $nx^2=m\pi$이므로, $x=\pm\frac{\sqrt{mn\pi}}{n}$이다.
그러므로 $y=x^3\sin(nx^2)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$f(x)=\int_0^x t^3\sin(nt^2)dt$에서 t^2을 y로 치환하면, $dt=\frac{1}{2t}dy$이므로

$$f(x)=\int_0^{x^2}\frac{1}{2}y\sin(ny)dy=\frac{1}{2}\left[-y\cos(ny)+\frac{1}{n^2}\sin(ny)\right]_0^{x^2}$$

$$=\frac{1}{2n^2}\{-nx^2\cos(nx^2)+\sin(nx^2)\}\text{이다.}$$

$x=\pm\sqrt{\frac{m}{n}\pi}$에서 함수 $f(x)$가 극값을 가지는 것을 알고 있으므로, 그 극값을 확인해보면 다음과 같다.
어떤 자연수 p에 대하여 $m=2p$꼴(짝수)이면,

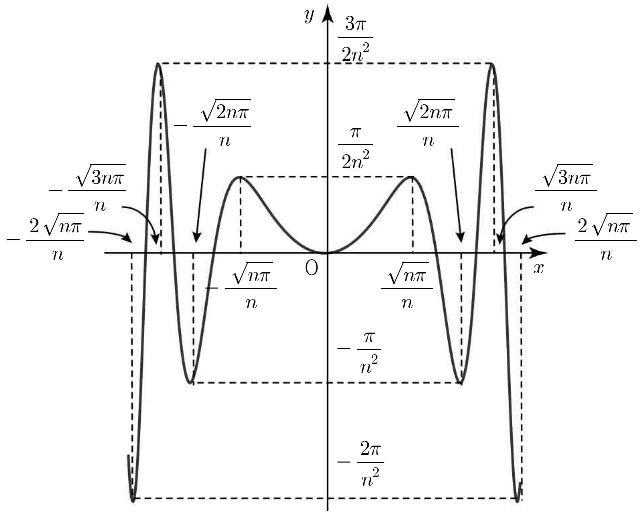
$$f\left(\pm\frac{\sqrt{2pn\pi}}{n}\right)=\frac{1}{2n^2}\left\{-n\times\frac{2p\pi}{n}\cos(2p\pi)+\sin(2p\pi)\right\}=-\frac{p\pi}{n^2}\text{이고}$$

$m=2p-1$꼴(홀수)이면,

$$f\left(\pm\frac{\sqrt{(2p-1)n\pi}}{n}\right)=\frac{1}{2n^2}\left\{-n\times\frac{(2p-1)\pi}{n}\cos\{(2p-1)\pi\}+\sin\{(2p-1)\pi\}\right\}$$

$$=\frac{(2p-1)\pi}{2n^2}\text{이다.}$$

함수 $f(x)$의 그래프의 개형을 그려보면 다음과 같다.



함수 $f(x)$는 모든 실수에서 $f(x)=f(-x)$를 만족시킨다.
만약 $k>\frac{\sqrt{n\pi}}{n}$이고 $g'(0)=0$이 되도록 k를 잡는다면, $g(x)$는 반드시 구간 $\left(0, \frac{\sqrt{n\pi}}{n}\right)$에서 미분가능하지 않은 점이 생기고, $f(x)=f(-x)$이므로 구간 $\left(-\frac{\sqrt{n\pi}}{n}, 0\right)$에서도 같은 개수의 미분가능하지 않은 점이 생긴다. 그러므로 구간 $\left(-\frac{\sqrt{n\pi}}{n}, \frac{\sqrt{n\pi}}{n}\right)$에서 짝수 개의 미분가능하지 않은 점이 생긴다. 이는 조건을 만족시키지 않는다.
만약 $k>\frac{\sqrt{n\pi}}{n}$이고 $x=0$에서 $g(x)$가 미분가능하지 않도록 k를 잡는다면 구간 $\left(0, \frac{\sqrt{n\pi}}{n}\right)$에서 반드시 두 개 이상의 미분가능하지

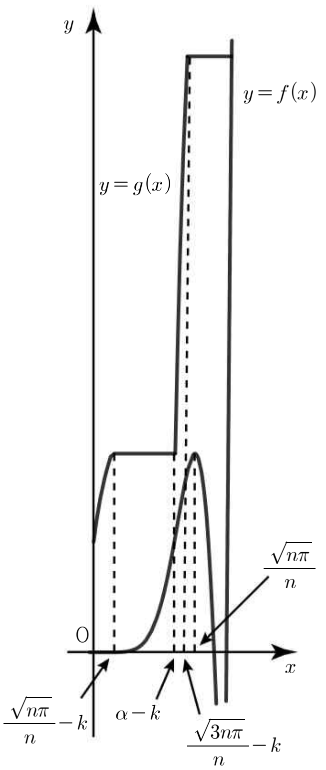
않은 점이 생기고, $f(x)=f(-x)$이므로 구간 $\left(-\frac{\sqrt{n\pi}}{n},\ 0\right)$에서도 같은 개수의 미분가능하지 않은 점이 생긴다. $x=0$에서도 $g(x)$가 미분가능하지 않으므로 구간 $\left(-\frac{\sqrt{n\pi}}{n},\ \frac{\sqrt{n\pi}}{n}\right)$에서 함수 $g(x)$가 미분가능하지 않은 점의 개수는 5 이상이다. 이 또한 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 $1<k\le\frac{\sqrt{n\pi}}{n}$이다.

또한, 조건에 따르면 구간 $\left(-\frac{\sqrt{n\pi}}{n},\ \frac{\sqrt{n\pi}}{n}\right)$에서 함수 $g(x)$가 미분가능하지 않은 점의 개수가 홀수이므로 $x=0$에서 함수 $g(x)$가 미분가능하지 않다는 점을 알 수 있다. 그러므로 $1<k<\frac{\sqrt{n\pi}}{n}$이다.

구간 $\left(0,\ \frac{\sqrt{n\pi}}{n}\right)$에서 함수 $g(x)$가 미분가능하지 않은 점의 개수가 1이어야 하므로, $\frac{\sqrt{n\pi}}{n}<x<\frac{\sqrt{3n\pi}}{n}$에서 $f(x)=\frac{\pi}{2n}$인 x의 값을 α라 할 때, $\frac{\sqrt{n\pi}}{n}+k>\alpha$이다.

이와 같을 때, $x\le 0$에서 함수 $g(x)$과 조금의 $f(x)$의 개형을 그리면 다음과 같다.



위와 같을 때, 구간 $\left(-\frac{\sqrt{n\pi}}{n},\ \frac{\sqrt{n\pi}}{n}\right)$에서 함수 $g(x)$가 미분가능하지 않은 x는 $k-\alpha$, 0, $\alpha-k$이다.

그러므로 함수 $h(x)$는 다음과 같다.

$$h(x)=\begin{cases}0 & (g'(x)\neq 0)\\ a_p-f(x+k) & (g'(x)=0)\end{cases}$$

x에서 미분가능하지 않을 때, 아주 작은 양수 h에 대하여 $h(x-h)=a_p-f(x+k)$이고, $h(x+h)=0$이며 수열 a_p는 $\frac{2p-1}{2n^2}\pi$이다.

그리고 집합 $\{x\mid h'(x)=0$이고 $h''(x)<0\}$의 원소는 $\frac{\sqrt{2pn\pi}}{n}-k$이므로 각 원소의 $h(x)$의 함숫값은 $\frac{2p-1}{2n^2}\pi+\frac{p}{n^2}\pi=\frac{4p-1}{2n^2}\pi$이다.

그러므로 작은 순서대로 뽑은 수열 $\{\alpha_i\}$에 대하여 $h(\alpha_i)=\frac{4i-1}{2n^2}\pi$이다. $\sum_{i=1}^{10}h(\alpha_i)=105\pi^3$이므로 $\frac{\pi}{2n^2}\sum_{i=1}^{10}(4i-1)=\frac{105\pi}{n^2}=105\pi^3$, 즉 $n=\frac{1}{\pi}$이고, $\alpha_i=\pi\sqrt{2i}-k$이다.

$1<k<\pi$이므로 k는 2 또는 3이다.

$h'(\pi)=0$이므로 $\pi+k>\sqrt{3}\pi$이다. 그러므로 $k=3$이다.

$\alpha_i+3=\pi\sqrt{2i}$이므로 $\frac{1}{\pi^2}\sum_{i=1}^{5}(\alpha_i+3)^2=\frac{1}{\pi^2}\sum_{i=1}^{5}2i\pi^2=5\times 6=30$이다.