네가 확률 문제를 맞힐 확률은?

#같은것은 #다른것 #확률과 #같포순

#네가 #이칼럼을 #다읽을 #확률은?

최근 비킬러 난이도의 문제가 강화됨에 따라, 확률 문제에 관한 칼럼을 작성하게 되었습니다.
이 칼럼은 먼저 수학적 확률에 대해 짧게 복습한 후
실전 문제를 풀어보고, 잘못된 풀이와 올바른 풀이를 분석하는 형태로 제작되었습니다.

학생들은 쓸데없는 글이 길면 잘 안 읽는다고 하더군요.. 바로 시작하겠습니다.

[수학적 확률]

어떤 시행의 표본공간 S가 n개의 근원사건으로 이루어져 있고,
각 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같은 정도로 기대된다고 하자.
이때 사건 A가 r개의 근원사건으로 이루어져 있으면 사건 A가 일어날 확률 $\mathrm{P}(A)$를

$$\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{r}{n}$$

와 같이 정의하고, 이것을 사건 A의 수학적 확률이라고 한다.

배 1개, 사과 1개, 복숭아 2개가 들어있는 주머니를 생각하자.
이 주머니에서 과일 1개를 꺼내는 시행에서, 꺼낸 과일의 표본공간은 $S=\{$배, 사과, 복숭아$\}$이고
근원사건은 $\{$배$\}$, $\{$사과$\}$, $\{$복숭아$\}$임을 알 수 있다. 그렇다면 꺼낸 과일이 복숭아일 확률은 $\frac{1}{3}$일까?
꺼낸 과일이 복숭아일 확률은 당연히 $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$이므로 $\frac{1}{3}$의 확률은 잘못되었다는 것을 알 수 있다.
그럼 어디서 잘못되었을까?
수학적 확률의 정의인 $\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{r}{n}$의 가정은

"각 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같은 정도로 기대된다."

이다. 이때 근원사건 $\{$배$\}$, $\{$사과$\}$, $\{$복숭아$\}$ 중에서 $\{$배$\}$, $\{$사과$\}$가 나올 가능성은 각각 $\frac{1}{4}$이고,
$\{$복숭아$\}$가 나올 가능성은 $\frac{2}{4}$이다. 즉, 표본공간 $S=\{$배, 사과, 복숭아$\}$에서 각 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같은 정도로 기대되지 않기 때문에 $\frac{1}{3}$의 확률은 잘못된 것이다.

이를 통해 우리는 수학적 확률의 정의를 사용하기 위해선 **"각 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같은 정도로 기대"** 되도록 표본공간을 설정해야함을 알 수 있다. 위의 문제에서 꺼낸 과일의 표본공간을
$S=\{$배, 사과, 복숭아$_{\mathrm{A}}$, 복숭아$_{\mathrm{B}}\}$로 설정하면, 각 근원사건이 일어날 가능성은 모두 $\frac{1}{4}$로 동일하다.
이때 꺼낸 과일이 복숭아인 사건을 A라 하면, $A=\{$복숭아$_{\mathrm{A}}$, 복숭아$_{\mathrm{B}}\}$이므로
구하는 확률은 수학적 확률의 정의에 의하여 $\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$이다.

복습이 끝났습니다. 이제 실전 문제를 풀어보도록 하겠습니다.

수학(가형)의 경우 18~19번 정도의 난이도에 해당하는 문제이며,
수학(나형)의 경우 20번 이상의 난이도에 해당하는 문제입니다.

1. 그림과 같이 1, 2, 3의 숫자가 하나씩 적힌 카드가 각각 3장씩 9장이 있다. 이 9장의 카드 중에서 임의로 4장의 카드를 동시에 선택하여 임의로 일렬로 나열한다. 이 시행에서 나열된 4장의 카드에 적힌 수의 합이 8일 때, 양 끝에 같은 숫자가 적힌 카드가 놓일 확률은? [4점]

$$\boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{1}$$
$$\boxed{2}\ \boxed{2}\ \boxed{2}$$
$$\boxed{3}\ \boxed{3}\ \boxed{3}$$

① $\frac{4}{21}$　② $\frac{5}{24}$　③ $\frac{2}{9}$　④ $\frac{1}{4}$　⑤ $\frac{4}{15}$

NOTE

여기에서 풀어보세요.
(왠지 있어 보이는 공간)

다음은 이 문제에 대한 두 가지 풀이입니다. 둘 중 하나는 잘못된 풀이입니다.
어느 풀이가 잘못되었는지, 그리고 잘못된 풀이가 어디서 잘못되었는지 찾아보세요.

[풀이1]

나열된 4장의 카드에 적힌 수의 합이 8인 사건을 A라 하고,
양 끝에 같은 숫자가 적힌 카드가 놓이는 사건을 B라 하면,
구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$ 이다.
나열된 4장의 카드에 적힌 수의 합이 8이므로
4장의 카드에 적힌 숫자는 '1, 1, 3, 3' 인 경우와 '1, 2, 2, 3' 인 경우가 있다.

먼저, 9장의 카드에서 4장의 카드를 동시에 선택하여, 일렬로 나열하는 경우의 수는 $n(S)={}_9\mathrm{P}_4$ 이다.

(1) 1, 1, 3, 3의 숫자가 하나씩 적힌 4장의 카드를 선택하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_2=9$ 이고,
선택한 4장의 카드를 나열하는 경우의 수는 $\dfrac{4!}{2!\times2!}=6$ 이다.
(2) 1, 2, 2, 3의 숫자가 하나씩 적힌 4장의 카드를 선택하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_1=27$ 이고,
선택한 4장의 카드를 나열하는 경우의 수는 $\dfrac{4!}{2!}=12$ 이다.
(1)과 (2)는 동시에 일어나지 않으므로 $\mathrm{P}(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{9\times6+27\times12}{{}_9\mathrm{P}_4}$ 이다.

한편,
(3) 1, 1, 3, 3의 숫자가 하나씩 적힌 4장의 카드를 나열할 때,ㄹㄴㅎ
양 끝에 같은 숫자가 적힌 카드가 놓이는 경우의 수는
'1, 3, 3, 1' 과 '3, 1, 1, 3' 으로 2(가지)이다.
(4) 1, 2, 2, 3의 숫자가 하나씩 적힌 4장의 카드를 나열할 때,
양 끝에 같은 숫자가 적힌 카드가 놓이는 경우의 수는
'2, 1, 3, 2' 와 '2, 3, 1, 2' 로 2(가지)이다.
(3)과 (4)는 동시에 일어나지 않으므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(S)}=\dfrac{9\times2+27\times2}{{}_9\mathrm{P}_4}$ 이다.

[보충] $n(A\cap B)$의 계산과정 : $n(A\cap B)=9\times2+27\times2$

그러므로 구하는 확률은 $\dfrac{\dfrac{9\times2+27\times2}{{}_9\mathrm{P}_4}}{\dfrac{9\times6+27\times12}{{}_9\mathrm{P}_4}}=\dfrac{18(1+3)}{18(3+18)}=\dfrac{4}{21}$ 이다.

[풀이2]

나열된 4장의 카드에 적힌 수의 합이 8인 사건을 A라 하고,
양 끝에 같은 숫자가 적힌 카드가 놓이는 사건을 B라 하면,
구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$이다.
나열된 4장의 카드에 적힌 수의 합이 8이므로
4장의 카드에 적힌 숫자는 '1, 1, 3, 3'인 경우와 '1, 2, 2, 3'인 경우가 있다.

카드에 적힌 숫자를 각각 1_{A}, 1_{B}, 1_{C}, 2_{A}, 2_{B}, 2_{C}, 3_{A}, 3_{B}, 3_{C}라 하자.

먼저, 9장의 카드에서 4장의 카드를 동시에 선택하여, 일렬로 나열하는 경우의 수는 $n(S)={}_9\mathrm{P}_4$이다.

(1) 1, 1, 3, 3의 숫자가 하나씩 적힌 4장의 카드를 선택하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_2=9$이고,
예를 들어 $\{1_{\mathrm{A}},\ 1_{\mathrm{B}},\ 3_{\mathrm{A}},\ 3_{\mathrm{B}}\}$와 같이 꺼냈다고 하자.
이 4장의 카드를 나열하는 경우의 수는 $4!=24$이다.
(2) 1, 2, 2, 3의 숫자가 하나씩 적힌 4장의 카드를 선택하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_1=27$이고,
예를 들어 $\{1_{\mathrm{A}},\ 2_{\mathrm{A}},\ 2_{\mathrm{B}},\ 3_{\mathrm{A}}\}$와 같이 꺼냈다고 하자.
이 4장의 카드를 나열하는 경우의 수는 $4!=24$이다.
(1)과 (2)는 동시에 일어나지 않으므로 $\mathrm{P}(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{9\times24+27\times24}{{}_9\mathrm{P}_4}$이다.

한편,
(3) $\{1_{\mathrm{A}},\ 1_{\mathrm{B}},\ 3_{\mathrm{A}},\ 3_{\mathrm{B}}\}$의 숫자가 하나씩 적힌 4장의 카드를 나열할 때,
양 끝에 같은 숫자가 적힌 카드가 놓이는 경우의 수는
'1, 3, 3, 1'에서 $2\times2=4$(가지), '3, 1, 1, 3'에서 $2\times2=4$(가지)이므로
총 8(가지)이다.
(4) $\{1_{\mathrm{A}},\ 2_{\mathrm{A}},\ 2_{\mathrm{B}},\ 3_{\mathrm{A}}\}$의 숫자가 하나씩 적힌 4장의 카드를 나열할 때,
양 끝에 같은 숫자가 적힌 카드가 놓이는 경우의 수는
'2, 1, 3, 2'에서 2(가지), '2, 3, 1, 2'에서 2(가지)이므로
총 4(가지)이다. ($\because$ 같은 숫자(2_{A}, 2_{B})끼리 위치를 바꾸는 가짓수)
(3)과 (4)는 동시에 일어나지 않으므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(S)}=\dfrac{9\times8+27\times4}{{}_9\mathrm{P}_4}$이다.

[보충] $n(A\cap B)$의 계산과정 : $n(A\cap B)=9\times8+27\times4$

그러므로 구하는 확률은 $\dfrac{\dfrac{9\times8+27\times4}{{}_9\mathrm{P}_4}}{\dfrac{9\times24+27\times24}{{}_9\mathrm{P}_4}}=\dfrac{36(2+3)}{36(6+18)}=\dfrac{5}{24}$이다.

찾아보셨나요? 잘못된 풀이는 [풀이1]이고, 올바른 풀이는 [풀이2]입니다.

이 문제의 표본공간 S는 “9장의 카드에서 임의로 4장의 카드를 동시에 선택하여
임의로 일렬로 나열하는 시행에서 일어날 수 있는 모든 결과의 집합” 이고,
수학적 확률의 정의를 사용하기 위해선
“각 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같은 정도로 기대” 되도록 표본공간을 설정해야합니다.

따라서 이 문제도 도입부에서 설명한 과일 문제처럼
카드에 적힌 숫자를 각각 1_A, 1_B, 1_C, 2_A, 2_B, 2_C, 3_A, 3_B, 3_C로 구분해서 접근해야 합니다.

즉, [풀이1]에서는 1, 2, 2, 3의 숫자가 하나씩 적힌 4장의 카드를 나열할 때,
2의 숫자가 적힌 2장의 카드는 서로 다른 카드임에도 불구하고,
같은 것으로 간주하여 오류가 발생한 것입니다. [풀이1]의 다른 부분도 마찬가지입니다.

덧붙여 ‘순열’과 ‘조합’에 대해서 짚고 넘어가겠습니다.

[순열]과 [조합]

1. **서로 다른 n개에서** r $(0 < r \leq n)$개를 택하여 순서대로 일렬로 나열하는 것을
   n개에서 r개를 택하는 순열이라고 하며, 이 순열의 수를 기호로
   $${}_n\mathrm{P}_r$$
   와 같이 나타낸다.

2. **서로 다른 n개에서** 순서를 생각하지 않고 r $(0 < r \leq n)$개를 택하는 것을
   n개에서 r개를 택하는 조합이라고 하며, 이 조합의 수를 기호로
   $${}_n\mathrm{C}_r$$
   와 같이 나타낸다.

누군가는 이 문제를 풀 때, 아무 생각 없이 표본공간 S의 원소의 개수를 $n(S) = {}_9\mathrm{P}_4$로 계산합니다.
여기서 $n(S) = {}_9\mathrm{P}_4$라는 결론을 내었을 때의 가정은 “9장의 카드가 모두 다르다.” 입니다.
순열, 조합은 “서로 다른 n개에서 r개를 택한다.” 는 가정에서부터 시작하기 때문입니다.
그러므로 $n(A)$와 $n(A \cap B)$ 를 구할 때에도 9장의 카드가 모두 다르다는 가정은 계속 유지되어야 합니다.

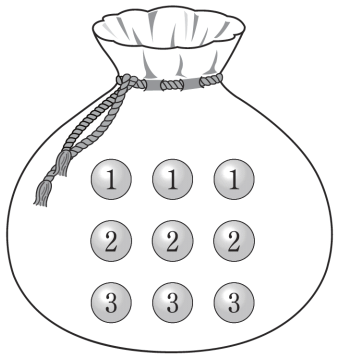
자. 우리는 이 정도 분석을 했으니, 어떠한 사실을 알 수 있을 것 같습니다.
아마 여러분도 많이 들었을 내용이라 생각합니다.

① 확률에서의 같은 것은 다른 것이다.
② 같은 것을 다른 것으로 간주하므로 확률 문제에선 절대로 ‘같포순’을 쓰면 안 된다.
(같포순 : 같은 것이 있는 순열)

이게 정말 사실일까요?

안타깝게도 틀린 내용이 있습니다. 그 이유는 다음 문제를 통해 알아보도록 하겠습니다.

2. 그림과 같이 주머니 속에 1, 2, 3의 숫자가 하나씩 적혀 있는 공이 각각 3개씩 9개가 있다. 이 주머니에서 임의로 1개의 공을 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 넣는다. 이와 같은 시행을 4번 반복할 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 수를 차례로 a, b, c, d라 하자. $a+b+c+d=8$이고 $abcd \neq 16$일 때, $a=d$일 확률은? [4점]



① $\frac{4}{21}$ ② $\frac{5}{24}$ ③ $\frac{2}{9}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{4}{15}$

(1번 문제와 편하게 비교하기 위해 $abcd \neq 16$이라는 조건을 추가하였습니다.)

NOTE

여기에서 풀어보세요.
(왠지 있어 보이는 공간)

다음은 이 문제에 대한 두 가지 풀이입니다. 이번에는 둘 다 올바른 풀이이며,
두 풀이에는 모두 '같포순'을 사용하였습니다.
이게 왜 올바른 풀이인지, 그리고 두 풀이 중 어느 풀이가 더 효율적인지 생각해보면서 읽어보세요.

2. [풀이1]

$a+b+c+d=8$이고 $abcd \neq 16$인 사건을 A라 하고, $a=d$인 사건을 B라 하면,
구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)}$이다.
$a+b+c+d=8$이고 $abcd \neq 16$이므로 시행을 4번 반복할 때,
꺼낸 공에 적혀 있는 수는 '1, 1, 3, 3'인 경우와 '1, 2, 2, 3'인 경우가 있다.

공에 적혀 있는 숫자를 각각 1_A, 1_B, 1_C, 2_A, 2_B, 2_C, 3_A, 3_B, 3_C라 하자.

먼저, 주어진 시행을 4번 반복할 때, 공을 꺼내는 경우의 수는 9^4이다.

(1) 꺼낸 공에 적혀 있는 수가 1, 1, 3, 3인 경우
- ⅰ) $\{1_\mathrm{A}, 1_\mathrm{A}, 3_\mathrm{A}, 3_\mathrm{A}\}$와 같이 꺼내는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_1 = 9$이다
- ⅱ) $\{1_\mathrm{A}, 1_\mathrm{A}, 3_\mathrm{A}, 3_\mathrm{B}\}$와 같이 꺼내는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_2 = 9$이다.
- ⅲ) $\{1_\mathrm{A}, 1_\mathrm{B}, 3_\mathrm{A}, 3_\mathrm{A}\}$와 같이 꺼내는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_2 \times {}_3\mathrm{C}_1 = 9$이다.
- ⅳ) $\{1_\mathrm{A}, 1_\mathrm{B}, 3_\mathrm{A}, 3_\mathrm{B}\}$와 같이 꺼내는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_2 \times {}_3\mathrm{C}_2 = 9$이다.

이때 ⅰ), ⅱ), ⅲ), ⅳ)의 경우에서 네 숫자를 나열하는 경우의 수는
각각 $\dfrac{4!}{2!2!}=6$, $\dfrac{4!}{2!}=12$, $\dfrac{4!}{2!}=12$, $4!=24$이다.

(2) 꺼낸 공에 적혀 있는 수가 1, 2, 2, 3인 경우
- ⅴ) $\{1_\mathrm{A}, 2_\mathrm{A}, 2_\mathrm{A}, 3_\mathrm{A}\}$와 같이 꺼내는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_1 = 27$이다
- ⅵ) $\{1_\mathrm{A}, 2_\mathrm{A}, 2_\mathrm{B}, 3_\mathrm{A}\}$와 같이 꺼내는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_2 \times {}_3\mathrm{C}_1 = 27$이다.

이때 ⅴ), ⅵ)의 경우에서 네 숫자를 나열하는 경우의 수는 각각 $\dfrac{4!}{2!}=12$, $4!=24$이다.

(1)과 (2)는 동시에 일어나지 않으므로 $\mathrm{P}(A)=\dfrac{9\times(6+12+12+24)\ +\ 27\times(12+24)}{9^4}=\dfrac{9\times54\ +\ 27\times36}{9^4}$이다.

한편,
(3) ⅰ), ⅱ), ⅲ), ⅳ)의 경우에서 네 숫자를 나열할 때, 양 끝에 같은 숫자가
놓이는 경우의 수는 각각 2, $2\times2=4$, $2\times2=4$, $2\times2\times2=8$이다.
(4) ⅴ), ⅵ)의 경우에서 네 숫자를 나열할 때, 양 끝에 같은 숫자가
놓이는 경우의 수는 각각 2, $2\times2=4$이다.
(3)과 (4)는 동시에 일어나지 않으므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{9\times(2+4+4+8)\ +\ 27\times(2+4)}{9^4}=\dfrac{9\times18\ +\ 27\times6}{9^4}$이다.

그러므로 구하는 확률은 $\dfrac{\dfrac{9\times18\ +\ 27\times6}{9^4}}{\dfrac{9\times54\ +\ 27\times36}{9^4}}=\dfrac{162(1+1)}{162(3+6)}=\dfrac{2}{9}$이다.

2. [풀이2]

$a+b+c+d=8$이고 $abcd\neq16$인 사건을 A라 하고, $a=d$인 사건을 B라 하면,

구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$이다.

$a+b+c+d=8$이고 $abcd\neq16$이므로 시행을 4번 반복할 때,

꺼낸 공에 적혀 있는 수는 '1, 1, 3, 3' 인 경우와 '1, 2, 2, 3' 인 경우가 있다.

이 주머니에서 임의로 1개의 공을 꺼낼 때, 공에 적혀 있는 수가

1일 확률은 $\dfrac{1}{3}$, 2일 확률은 $\dfrac{1}{3}$, 3일 확률은 $\dfrac{1}{3}$이다.

(1) 꺼낸 공에 적혀 있는 수가 1, 1, 3, 3인 경우

1, 1, 3, 3을 나열하는 경우의 수는 $\dfrac{4!}{2!2!}=6$ 이므로

이 경우의 확률은 $6\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^4$이다.

(2) 꺼낸 공에 적혀 있는 수가 1, 2, 2, 3인 경우

1, 2, 2, 3을 나열하는 경우의 수는 $\dfrac{4!}{2!}=12$이므로

이 경우의 확률은 $12\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^4$이다.

(1)과 (2)는 동시에 일어나지 않으므로 $\mathrm{P}(A)=(6+12)\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^4$이다.

한편,

(3) 1, 1, 3, 3을 나열할 때, 양 끝에 같은 숫자가 놓이는 경우의 수는

'1, 3, 3, 1' 과 '3, 1, 1, 3' 으로 2(가지)이므로 이 경우의 확률은 $2\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^4$이다.

(4) 1, 2, 2, 3을 나열할 때, 양 끝에 같은 숫자가 놓이는 경우의 수는

'2, 1, 3, 2' 와 '2, 3, 1, 2' 로 2(가지)이므로 이 경우의 확률은 $2\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^4$이다.

(3)과 (4)는 동시에 일어나지 않으므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=(2+2)\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^4$이다.

그러므로 구하는 확률은 $\dfrac{(2+2)\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^4}{(6+12)\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^4}=\dfrac{4}{18}=\dfrac{2}{9}$ 이다.

생각해보셨나요?

[풀이1]은 같은 숫자를 다른 것으로 구분하여 1번 문제(카드문제)와 같은 방법으로 풀이하였습니다.
"각 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같은 정도로 기대" 되도록 표본공간을 설정하였으므로
풀이엔 이상이 없습니다.

여기서 1번 문제는 4장의 카드를 동시에 선택해서 '1_A, 1_A, 3_A, 3_B' 의 경우가 존재하지 않았지만,
2번 문제(공문제)는 한 번 꺼낸 공을 다시 되돌려 놓은 후에 다음 공을 꺼내므로 '1_A, 1_A, 3_A, 3_B' 의
경우가 존재하게 되어, 공을 나열할 때 같은 것이 있는 순열을 사용하게 되었습니다.

그러니까
"② 같은 것을 다른 것으로 간주하므로 확률 문제에선 절대로 '같포순' 을 쓰면 안 된다."
라는 주장은 **틀린 주장**이 되는 것이며, 주어진 상황에 따라 필요할 땐 사용해야합니다.

그런데 [풀이1]은 나눠야하는 경우가 많아서 풀이가 조금 비효율적으로 보입니다.

사실, 이 문제는 한 번 꺼낸 공을 다시 되돌려 놓은 후에 다음 공을 꺼내므로
첫 번째, 두 번째, 세 번째, 네 번째 시행은 모두 같은 행위를 반복하는 것입니다.

따라서 이 문제를 풀 때는 굳이 같은 것을 다른 것으로 보려고 애쓰지 말고,
[풀이2]로 진행하는 것이 조금 더 편한 방법이라고 할 수 있겠습니다.

지금까지의 내용을 정리하면, 우리는 다음의 사실을 이끌어 낼 수 있습니다.

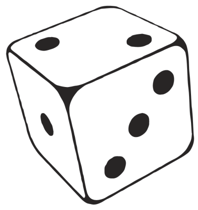
① 확률에서의 같은 것은 다른 것이다. ② 확률문제에서 '같포순' 은 주어진 상황에 따라 쓸 수도, 안 쓸 수도 있다. (같포순 : 같은 것이 있는 순열)

'②' 에서 주어진 상황은 1번 문제와 2번 문제에서 살펴보았습니다.

그런데
"① 확률에서의 같은 것은 다른 것이다."
를 잘못 적용시키면, 기껏 열심히 풀어놓고 틀리는 경우가 생길 수 있습니다.

그 이유는 다음 문제에서 살펴보도록 하겠습니다.

3. 그림과 같이 세 면에 1, 2, 3의 눈이 하나씩 있고, 마주 보는 면에 있는 눈이 서로 같은 주사위가 있다. 이 주사위를 네 번 던질 때 나오는 눈의 수를 차례로 a, b, c, d라 하자. $a+b+c+d=8$이고 $abcd\neq 16$일 때, $a=d$일 확률은? [4점]



① $\frac{4}{21}$ ② $\frac{5}{24}$ ③ $\frac{2}{9}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{4}{15}$

(1번, 2번 문제와 편하게 비교하기 위해 $abcd\neq 16$이라는 조건을 추가하였습니다.)

NOTE

여기에서 풀어보세요.
(왠지 있어 보이는 공간)

다음은 이 문제에 대한 네 가지 풀이입니다. 네 풀이 중 두 풀이는 잘못된 풀이입니다.
어느 풀이가 잘못되었는지, 그리고 잘못된 풀이가 어디서 잘못되었는지 함께 찾아보겠습니다.

3. [풀이1]

$a+b+c+d=8$이고 $abcd \neq 16$인 사건을 A라 하고, $a=d$인 사건을 B라 하면,
구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$이다.
$a+b+c+d=8$이고 $abcd \neq 16$이므로 주어진 주사위를 네 번 던질 때,
나오는 눈의 수는 '1, 1, 3, 3' 인 경우와 '1, 2, 2, 3' 인 경우가 있다.

나오는 눈의 수를 각각 '1_{A}, 1_{B}, 3_{A}, 3_{B}' 라 하고, '1_{A}, 2_{A}, 2_{B}, 3_{A}' 라 하자.

(1) 나오는 눈의 수가 1_{A}, 1_{B}, 3_{A}, 3_{B}인 경우
  1_{A}, 1_{B}, 3_{A}, 3_{B}를 나열하는 경우의 수는 $4!=24$이다.
(2) 나오는 눈의 수가 1_{A}, 2_{A}, 2_{B}, 3_{A}인 경우
  1_{A}, 2_{A}, 2_{B}, 3_{A}를 나열하는 경우의 수는 $4!=24$이다.
(1)과 (2)는 동시에 일어나지 않으므로 $\mathrm{P}(A)=\dfrac{24+24}{6^4}$이다.

한편,
(3) 1_{A}, 1_{B}, 3_{A}, 3_{B}을 나열할 때, 양 끝에 같은 숫자가 놓이는 경우의 수는
  '1, 3, 3, 1' 에서 $2\times2=4$(가지), '3, 1, 1, 3' 에서 $2\times2=4$(가지)이므로
  총 8(가지)이다.
(4) 1_{A}, 2_{A}, 2_{B}, 3_{A}를 나열할 때, 양 끝에 같은 숫자가 놓이는 경우의 수는
  '2, 1, 3, 2' 에서 2(가지), '2, 3, 1, 2' 에서 2(가지)이므로
  총 4(가지)이다. ($\because$ 같은 숫자(2_{A}, 2_{B})끼리 위치를 바꾸는 가짓수)
(3)과 (4)는 동시에 일어나지 않으므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{8+4}{6^4}$이다.

그러므로 구하는 확률은 $\dfrac{\frac{8+4}{6^4}}{\frac{24+24}{6^4}}=\dfrac{12}{48}=\dfrac{1}{4}$이다.

이 풀이는 여러 곳이 같은 이유로 잘못 되었고, 대표적인 예로 나오는 눈의 수 $(1,\ 2,\ 2,\ 3)$에서 같은 것 $(2,\ 2)$을 다른 것 $(2_{\mathrm{A}},\ 2_{\mathrm{B}})$으로 보았지만, $(2_{\mathrm{A}},\ 2_{\mathrm{A}})$, $(2_{\mathrm{B}},\ 2_{\mathrm{B}})$를 고려하지 않아서 틀렸습니다. 이렇게 접근할 경우, [풀이3]처럼 해야 올바른 풀이입니다.

3. [풀이2]

$a+b+c+d=8$이고 $abcd \neq 16$인 사건을 A라 하고, $a=d$인 사건을 B라 하면,

구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$이다.

$a+b+c+d=8$이고 $abcd \neq 16$이므로 주어진 주사위를 네 번 던질 때,

나오는 눈의 수는 '1, 1, 3, 3'인 경우와 '1, 2, 2, 3'인 경우가 있다.

나오는 눈의 수를 각각 다음과 같이 분류하자.

(1) 나오는 눈의 수가 1, 1, 3, 3인 경우

ⅰ) 1_{A}, 1_{A}, 3_{A}, 3_{A}를 나열하는 경우의 수는 $\dfrac{4!}{2!2!}=6$이다.

ⅱ) 1_{A}, 1_{A}, 3_{A}, 3_{B}를 나열하는 경우의 수는 $\dfrac{4!}{2!}=12$이다.

ⅲ) 1_{A}, 1_{B}, 3_{A}, 3_{A}를 나열하는 경우의 수는 $\dfrac{4!}{2!}=12$이다.

ⅳ) 1_{A}, 1_{B}, 3_{A}, 3_{B}를 나열하는 경우의 수는 $4!=24$이다.

(2) 나오는 눈의 수가 1, 2, 2, 3인 경우

ⅴ) 1_{A}, 2_{A}, 2_{A}, 3_{A}를 나열하는 경우의 수는 $\dfrac{4!}{2!}=12$이다.

ⅵ) 1_{A}, 2_{A}, 2_{B}, 3_{A}를 나열하는 경우의 수는 $4!=24$이다.

(1)과 (2)는 동시에 일어나지 않으므로 $\mathrm{P}(A)=\dfrac{6+12+12+24\ +\ 12+24}{6^4}=\dfrac{90}{6^4}$이다.

한편,

(3) ⅰ), ⅱ), ⅲ), ⅳ)의 경우에서 네 숫자를 나열할 때, 양 끝에 같은 숫자가 놓이는 경우의 수는 각각 2, $2\times2=4$, $2\times2=4$, $2\times2\times2=8$이다.

(4) ⅴ), ⅵ)의 경우에서 네 숫자를 나열할 때, 양 끝에 같은 숫자가 놓이는 경우의 수는 각각 2, $2\times2=4$이다.

(3)과 (4)는 동시에 일어나지 않으므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{2+4+4+8\ +\ 2+4}{6^4}=\dfrac{24}{6^4}$이다.

그러므로 구하는 확률은 $\dfrac{\frac{24}{6^4}}{\frac{90}{6^4}}=\dfrac{24}{90}=\dfrac{4}{15}$이다.

> 이 풀이는 여러 곳이 같은 이유로 잘못 되었고, 대표적인 예로 나오는 눈의 수 (1, 2, 2, 3)에서 같은 것 (2, 2)을 다른 것 $(2_{\mathrm{A}},\ 2_{\mathrm{B}})$으로 보았지만, $(2_{\mathrm{B}},\ 2_{\mathrm{B}})$를 고려하지 않아서 틀렸습니다.
> 이렇게 접근할 경우, [풀이3]처럼 해야 올바른 풀이입니다.

3. [풀이3]

$a+b+c+d=8$이고 $abcd\neq 16$인 사건을 A라 하고, $a=d$인 사건을 B라 하면,

구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$이다.

$a+b+c+d=8$이고 $abcd\neq 16$이므로 주어진 주사위를 네 번 던질 때,
나오는 눈의 수는 '1, 1, 3, 3' 인 경우와 '1, 2, 2, 3' 인 경우가 있다.

나오는 눈의 수를 각각 1_{A}, 1_{B}, 2_{A}, 2_{B}, 3_{A}, 3_{B}라 하자.

(1) 나오는 눈의 수가 1, 1, 3, 3인 경우

ⅰ) $\{1_{\mathrm{A}},\ 1_{\mathrm{A}},\ 3_{\mathrm{A}},\ 3_{\mathrm{A}}\}$와 같이 나오는 경우의 수는 ${}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1=4$이다

ⅱ) $\{1_{\mathrm{A}},\ 1_{\mathrm{A}},\ 3_{\mathrm{A}},\ 3_{\mathrm{B}}\}$와 같이 나오는 경우의 수는 ${}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_2=2$이다.

ⅲ) $\{1_{\mathrm{A}},\ 1_{\mathrm{B}},\ 3_{\mathrm{A}},\ 3_{\mathrm{A}}\}$와 같이 나오는 경우의 수는 ${}_2\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_1=2$이다.

ⅳ) $\{1_{\mathrm{A}},\ 1_{\mathrm{B}},\ 3_{\mathrm{A}},\ 3_{\mathrm{B}}\}$와 같이 나오는 경우의 수는 ${}_2\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_2=1$이다.

이때 ⅰ), ⅱ), ⅲ), ⅳ)의 경우에서 네 숫자를 나열하는 경우의 수는

각각 $\dfrac{4!}{2!2!}=6$, $\dfrac{4!}{2!}=12$, $\dfrac{4!}{2!}=12$, $4!=24$이므로

이 경우의 확률은 $\dfrac{4\times6\ +\ 2\times12\ +\ 2\times12\ +\ 1\times24}{6^4}=\dfrac{4\times24}{6^4}$이다.

(2) 나오는 눈의 수가 1, 1, 3, 3인 경우

ⅴ) $\{1_{\mathrm{A}},\ 2_{\mathrm{A}},\ 2_{\mathrm{A}},\ 3_{\mathrm{A}}\}$와 같이 나오는 경우의 수는 ${}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1=8$이다

ⅵ) $\{1_{\mathrm{A}},\ 2_{\mathrm{A}},\ 2_{\mathrm{B}},\ 3_{\mathrm{A}}\}$와 같이 나오는 경우의 수는 ${}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_1=4$이다.

이때 ⅴ), ⅵ)의 경우에서 네 숫자를 나열하는 경우의 수는

각각 $\dfrac{4!}{2!}=12$, $4!=24$이므로 이 경우의 확률은 $\dfrac{8\times12\ +\ 4\times24}{6^4}=\dfrac{8\times24}{6^4}$이다.

(1)과 (2)는 동시에 일어나지 않으므로 $\mathrm{P}(A)=\dfrac{4\times24\ +\ 8\times24}{6^4}=\dfrac{288}{6^4}$이다.

한편,

(3) ⅰ), ⅱ), ⅲ), ⅳ)의 경우에서 네 숫자를 나열할 때, 양 끝에 같은 숫자가
놓이는 경우의 수는 각각 2, $2\times2=4$, $2\times2=4$, $2\times2\times2=8$이므로

이 경우의 확률은 $\dfrac{4\times2\ +\ 2\times4\ +\ 2\times4\ +\ 1\times8}{6^4}=\dfrac{32}{6^4}$이다.

(4) ⅴ), ⅵ)의 경우에서 네 숫자를 나열할 때, 양 끝에 같은 숫자가
놓이는 경우의 수는 각각 2, $2\times2=4$이므로

이 경우의 확률은 $\dfrac{8\times2\ +\ 4\times4}{6^4}=\dfrac{32}{6^4}$이다.

(3)과 (4)는 동시에 일어나지 않으므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{32+32}{6^4}=\dfrac{64}{6^4}$이다.

그러므로 구하는 확률은 $\dfrac{\dfrac{64}{6^4}}{\dfrac{288}{6^4}}=\dfrac{64}{288}=\dfrac{2}{9}$이다.

3. [풀이4]

$a+b+c+d=8$이고 $abcd \neq 16$인 사건을 A라 하고, $a=d$인 사건을 B라 하면,

구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$이다.

$a+b+c+d=8$이고 $abcd \neq 16$이므로 주어진 주사위를 네 번 던질 때,

나오는 눈의 수는 '1, 1, 3, 3' 인 경우와 '1, 2, 2, 3' 인 경우가 있다.

이 주사위를 한 번 던질 때, 나오는 눈의 수가

1일 확률은 $\dfrac{1}{3}$, 2일 확률은 $\dfrac{1}{3}$, 3일 확률은 $\dfrac{1}{3}$이다.

(1) 나오는 눈의 수가 1, 1, 3, 3인 경우

1, 1, 3, 3을 나열하는 경우의 수는 $\dfrac{4!}{2!2!}=6$이므로

이 경우의 확률은 $6\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^4$이다.

(2) 나오는 눈의 수가 1, 2, 2, 3인 경우

1, 2, 2, 3을 나열하는 경우의 수는 $\dfrac{4!}{2!}=12$이므로

이 경우의 확률은 $12\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^4$이다.

(1)과 (2)는 동시에 일어나지 않으므로 $\mathrm{P}(A)=(6+12)\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^4$이다.

한편,

(3) 1, 1, 3, 3을 나열할 때, 양 끝에 같은 숫자가 놓이는 경우의 수는

'1, 3, 3, 1' 과 '3, 1, 1, 3' 으로 2(가지)이므로 이 경우의 확률은 $2\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^4$이다.

(4) 1, 2, 2, 3을 나열할 때, 양 끝에 같은 숫자가 놓이는 경우의 수는

'2, 1, 3, 2' 와 '2, 3, 1, 2' 로 2(가지)이므로 이 경우의 확률은 $2\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^4$이다.

(3)과 (4)는 동시에 일어나지 않으므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=(2+2)\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^4$이다.

그러므로 구하는 확률은 $\dfrac{(2+2)\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^4}{(6+12)\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^4}=\dfrac{4}{18}=\dfrac{2}{9}$이다.

잘 살펴보셨나요? 올바른 풀이는 [풀이3]과 [풀이4]입니다.

이때 [풀이3]에서 주의할 점은 나오는 눈의 수를 각각 1_A, 1_B, 2_A, 2_B, 3_A, 3_B라 한 것이
주사위의 면에 1, 1, 2, 2, 3, 3의 눈이 적혀있어서가 아니라는 것입니다.

가령 $a+b+c+d=7$이라 하면, 주사위를 네 번 던져 나오는 눈의 수는
'1, 1, 2, 3' 인 경우와 '<u>1, 2, 2, 2</u>' 인 경우가 있습니다.

이런 상황에서는 나오는 눈의 수를 각각 1_A, 1_B, 1_C, 2_A, 2_B, 2_C, 3_A, 3_B, 3_C라 해야 합니다.

한편, 3번 문제(주사위문제)도 2번 문제(공문제)와 마찬가지로
첫 번째, 두 번째, 세 번째, 네 번째 시행은 모두 같은 행위를 반복하는 것입니다.

따라서 이 문제 또한 [풀이3]처럼 굳이 같은 것을 다른 것으로 보려고 애쓰지 말고,
[풀이4]로 진행하는 것이 조금 더 편한 방법이라고 할 수 있겠습니다.

이제 이번 칼럼의 내용을 요약하고, 글을 마치도록 하겠습니다.

(1) 수학적 확률의 정의를 사용하기 위해선
"<u>각 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같은 정도로 기대</u>"
되도록 표본공간을 설정해야한다.

(2) (1)에 의하여 확률에서의 같은 것은 다른 것이다.

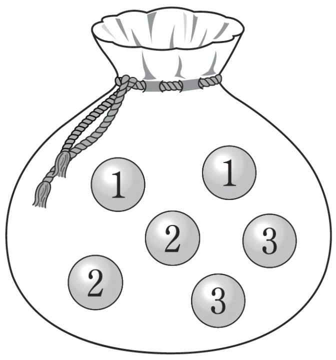
(3) 확률문제에서 '같포순'은 주어진 상황에 따라 쓸 수도, 안 쓸 수도 있다.
(같포순 : 같은 것이 있는 순열)

(4) 동전 또는 주사위를 던지는 시행이나, 공을 꺼냈다가 다시 넣는 시행처럼
같은 행위를 반복하는 경우엔, 굳이 같은 것을 다른 것으로 보고 풀 필요는 없다.

(사실 아직 안 끝났어요. 뒤에 문제 하나 더 있으니 복습하세요.)

[참고] 결국, 다음 문제는 3번 문제와 같은 구조의 문제가 됩니다.

4. 그림과 같이 주머니 속에 1, 2, 3의 숫자가 하나씩 적혀 있는 공이 각각 2개씩 6개가 있다. 이 주머니에서 임의로 1개의 공을 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 넣는다. 이와 같은 시행을 4번 반복할 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 수를 차례로 a, b, c, d라 하자. $a+b+c+d=8$이고 $abcd \neq 16$일 때, $a=d$일 확률은? [4점]



① $\frac{4}{21}$ ② $\frac{5}{24}$ ③ $\frac{2}{9}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{4}{15}$

NOTE

이제 진짜 끝났습니다. 읽어주셔서 감사합니다.