2012학년도 고등학생 학업능력시험 9월 모의평가 문제지 1

제 n 교시

수학 교과서 영역

성명		수험 번호	

[1~4] 다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

Ⅳ. 미분법 / 2 도함수의 활용

자연현상이나 사회현상을 설명하는 방법에는 여러 가지가 있는데, 수치화된 설명이 필요한 경우 함수를 사용하는 방법이 보편적이다. 어떤 현상을 함수로 표현하고 나면 그 함숫값이 증가하는지, (중략) 최댓값은 언제 나오는지 등 많은 문제가 제기된다. 미분법은 바로 이러한 문제들에 답을 해 주는 도구이다. (중략) 도함수의 의미는 여러 상황에서 주어진 함수에 대하여 모두 적용할 수 있는데, 이는 미분법의 활용도가 그만큼 높다는 것을 의미한다.

2.1. 도함수와 함수의 증가·감소

학습 목표 : 함수에 대한 평균값의 정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다. / 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 이해하고 이를 활용할 수 있다. (중략)

롤의 정리

함수 $y=f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린 구간 (a, b)에서 미분가능할 때, $f(a)=f(b)$이면

$$f'(c)=0$$

을 만족하는 c가 열린 구간 내에 적어도 하나 존재한다.

(중략) 롤의 정리로부터 다음과 같은 정리를 얻을 수 있는데, 이것을 **평균값의 정리**라고 한다.

평균값의 정리

함수 $y=f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린 구간 (a, b)에서 미분가능하면

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

를 만족하는 c가 열린 구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

위에서 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$는 두 점 $\mathrm{A}(a, f(a))$와 $\mathrm{B}(b, f(b))$를 지나는 직선의 기울기이고, $f'(c)$는 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(c, f(c))$에서 그은 접선의 기울기이다.

따라서 평균값의 정리는 열린 구간 (a, b)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 두 점 A, B를 잇는 직선 AB에 평행한 접선이 적어도 하나 있음을 뜻한다.

롤의 정리를 이용하여 평균값의 정리를 증명하여 보자. (중략)

상수함수 $f(x)=c$에 대하여 $f'(x)=0$인데, 그 역도 성립한다. 즉, 도함수가 0인 함수는 상수함수뿐이다. 평균값의 정리를 이용하여 이를 증명하여 보자.

예제 1 함수 $y=f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린 구간 (a, b)에서 미분가능할 때, 그 도함수가 $f'(x)=0$이면 함수 $y=f(x)$는 닫힌 구간 $[a, b]$에서 상수함수임을 보여라.

증명 닫힌 구간 $[a, b]$에서 임의의 한 점 $x(x \neq a)$를 잡으면 평균값의 정리에 의하여

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(c)$$

를 만족하는 c가 열린 구간 (a, x)에 적어도 하나 존재한다. 그런데 $f'(c)=0$이므로

$$f(x)-f(a)=(x-a)f'(c)=0$$

이다. 즉, 임의의 x에 대하여 $f(x)=f(a)$이므로 함수 $y=f(x)$는 닫힌 구간 $[a, b]$에서 상수함수이다.

문제 3 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린 구간 (a, b)에서 미분가능할 때, $f'(x)=g'(x)$이면

$$f(x)=g(x)+C$$

임을 보여라.

- 계승혁·김홍종 외 4인, 『수학 Ⅱ』 -

1. 위 글을 이해한 내용으로 적절하지 <u>않은</u> 것은?

① 평균값의 정리를 만족하는 c는 여러 개 존재할 수도 있다.
② $f(x)$가 상수함수라는 것과 $f(x)$의 도함수가 0이라는 것은 필요충분조건이다.
③ 함수가 하나 주어져 있을 때, 주어진 함수의 최댓값과 주어진 함수의 그래프 위의 한 점에서의 접선의 기울기를 미분법을 이용하여 구할 수 있다.
④ 문제 2의 증명에서 평균값의 정리를 활용할 때, $y=f(x)$가 닫힌 구간 $[a, x]$에서 연속이고 열린 구간 (a, x)가 미분가능하다는 사실을 이용하였다.
⑤ 함수 $y=f(x)$가 '닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린 구간 (a, b)에서 미분가능'이라는 조건을 만족하지 않으면, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$을 만족하는 c는 존재하지 않는다.

2. 위 글로부터 추론한 내용으로 적절하지 <u>않은</u> 것은?

① 내용의 순서를 고려할 때, 문제 3을 푸는 데에 예제 1의

내용이 활용될 가능성이 있다.

② 미분가능한 함수의 여러 가지 성질을 증명하고자 할 때, 교과서에 수록되지 않은 내용이더라도 평균값의 정리로 증명할 수 있는 경우가 있을 것이다.

③ 예제 1과 문제 3의 순서, 롤의 정리와 평균값의 정리의 순서를 살펴보면, 일반적인 경우를 먼저 다룬 뒤 좀 더 간단한 경우를 다룬다는 것을 알 수 있다.

④ 학습 목표에 '롤의 정리'는 언급되지 않으나 '평균값의 정리'가 언급되고 있는 것에서, '평균값의 정리'가 '롤의 정리'보다 더 중요하거나 유용한 내용이라고 볼 수 있다.

⑤ '도함수와 함수의 증가·감소' 단원에 평균값의 정리가 등장하는 것으로 보아, 함수의 증가·감소와 관련된 몇 가지 성질을 증명하는 데 평균값의 정리가 활용될 가능성이 있다.

3. 위 글의 내용을 이해한 뒤 <보기>의 내용을 읽을 때, 적절하지 <u>않은</u> 반응은?

<보 기>

함수 $f(x)$가 주어졌을 때, 이 함수를 도함수로 가지는 함수 $F(x)$, 즉

$$F'(x)=f(x)$$

가 되는 함수 $F(x)$를 함수 $f(x)$의 **부정적분** 또는 원시함수라고 한다.

함수 $f(x)$의 부정적분 중 ㉠ <u>하나</u>를 $F(x)$라고 할 때, 임의의 상수 C에 대하여

$$\{F(x)+C\}'=F'(x)+C'=f(x)$$

이므로 $F(x)+C$도 함수 $f(x)$의 부정적분이다.

또, 두 함수 $F(x)$, $G(x)$가 모두 함수 $f(x)$의 부정적분이면

$$\begin{aligned}\{G(x)-F(x)\}' &= G'(x)-F'(x)\\ &= f(x)-f(x)=0\end{aligned}$$

이다. 그런데 ㉡ <u>도함수가 0인 함수는 상수함수뿐</u>이므로 그 상수를 C라고 하면

$$G(x)-F(x)=C$$

이다. 따라서

$$G(x)=F(x)+C$$

이다. 즉, 함수 $F(x)$를 ㉢ <u>함수 $f(x)$의 부정적분 중 하나</u>라고 하면 함수 $f(x)$의 모든 부정적분은

$$F(x)+C \quad (\text{단, } C\text{는 상수})$$

로 나타낼 수 있다.

- 계승혁·김홍종 외 4인, 『수학 Ⅱ』 -

① ㉠이라는 표현이 등장하는 것으로 보아, 아직 부정적분이 하나뿐임을 증명하지 않았거나 부정적분이 여러 개 존재하겠군.

② ㉡은 위 글의 예제 1에서 알 수 있는 내용이군.

③ ㉢의 상수항은 반드시 0이어야 하겠군.

④ 무한집합을 조건제시법으로 나타낼 수 있듯이, 어떤 대상이 무수히 많더라도 나름대로의 규칙성이 존재하는군.

⑤ 함수 $F(x)$를 함수 $f(x)$의 부정적분 중 하나라 할 때, $F(x)+C$는 $f(x)$의 부정적분이라는 것과 거꾸로 $f(x)$의 부정적분인 함수는 $F(x)+C$ 형태라는 것을 모두 보이지 않는다면 함수 $f(x)$의 모든 부정적분을 $F(x)+C$라고 나타낼 수 있음을 증명한 것이라고 할 수 없겠군.

서술형

4. 위 글과 <보기 1>의 내용을 바탕으로 <보기 2>를 풀이하시오.

<보 기 1>

$f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고 이 구간에서 최솟값을 α, 최댓값을 β라고 하자. $f(x)$가 닫힌 구간 $[\alpha, \beta]$에서 연속이라면, $(f\circ f)(x)$는 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이다.

$f(x)$가 열린 구간 (a, b)에서 미분가능하고 이 구간에서의 $f(x)$의 치역을 포함하는 어떤 열린 구간을 (α, β)이라고 하자. $f(x)$가 열린 구간 (α, β)에서 미분가능하다면, $(f\circ f)(x)$는 열린 구간 (a, b)에서 미분가능하다.

<보 기 2>

27. 함수 $f(x)=x+\sin x$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=(f\circ f)(x)$$

로 정의할 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

(중략)

ㄷ. $g'(x)=1$인 실수 x가 개구간 $(0, \pi)$에 존재한다.

- 2008학년도 대학수학능력시험 수리영역 가형(미분과적분) 27번 -

<u>기획 + 문항 구성 및 출제 + 검토 : 나카렌</u>

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.