

제 2 교시

수학 영역(가형)

5지선다형

1. 두 벡터 $\vec{a}=(1, 2)$, $\vec{b}=(3, 1)$ 에 대하여 벡터 $3\vec{a}-2\vec{b}$ 의 모든 성분의 합은? [2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+4x)}{e^{3x}-1}$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1
 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

3. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx$ 의 값은? [2점]

- ① $e-2$ ② $e-1$ ③ e
 ④ $e+1$ ⑤ $e+2$

4. 두 사건 A, B 에 대하여

$$P(A^c) = \frac{1}{3}, P(B|A) = \frac{1}{2}$$

일 때, $P(A \cap B^c)$ 의 값은? (단, A^c 은 A 의 여사건이다.) [3점]

- ① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$
 ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

5. 숫자 1, 2, 3 중에서 중복을 허락하여 네 개를 택해 일렬로 나열하여 만든 네 자리의 자연수 중에서 2000보다 작은 자연수의 개수는? [3점]

- ① 23 ② 25 ③ 27
 ④ 29 ⑤ 31

6. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 하자. 함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 함수 $g'(x)$ 는 $x=14$ 일 때 최댓값 $\frac{1}{3}$ 을 가진다. $f(0)=0$ 일 때, $f(1)$ 의 값은? [3점]

- ① 10 ② 11 ③ 12
 ④ 13 ⑤ 14

7. 세 개의 주사위를 동시에 던질 때, 4 이하의 눈이 나오는 주사위의 개수가 5 이상의 눈이 나오는 주사위의 개수보다 많을 확률은? [3점]

- ① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{19}{27}$ ③ $\frac{20}{27}$
 ④ $\frac{7}{9}$ ⑤ $\frac{22}{27}$

8. 좌표공간의 두 점 $A(3, -3, a)$, $B(-2, b, 2b)$ 에 대하여 선분 AB 를 3 : 2로 내분하는 점이 z 축 위에 있고 선분 AB 를 1 : 2로 외분하는 점이 xy 평면 위에 있을 때, $a+b$ 의 값은? [3점]

- ① 3 ② 4 ③ 5
 ④ 6 ⑤ 7

9. 자연수 n 에 대하여

$$a_n = \int_1^e \frac{(\ln x)^{n+1}}{nx} dx$$

라 할 때, $90 \times \sum_{k=1}^8 a_k$ 의 값은? [3점]

- ① 52 ② 54 ③ 56
 ④ 58 ⑤ 60

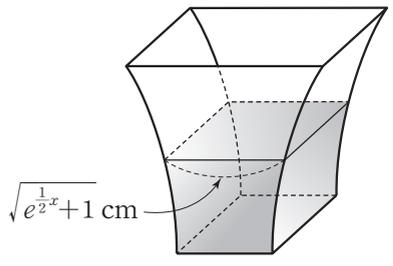
10. 좌표평면 위를 움직이는 점 P 의 시각 t ($t > 0$)에서의 위치 (x, y) 가

$$x = \frac{1}{t+1}, y = \sqrt{2t+2}$$

일 때, 시각 $t=1$ 에서의 점 P 의 속력은? [3점]

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{4}$
 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{5}}{4}$

11. 그림과 같이 어떤 그릇에 깊이가 x cm ($x \geq 0$)이 되도록 물을 부으면 수면은 한 변의 길이가 $\sqrt{e^{\frac{1}{2}x} + 1}$ cm인 정사각형이 된다고 한다. 물의 깊이가 6 cm일 때, 이 그릇에 담겨 있는 물의 부피는 a cm³이다. a 의 값은? [3점]



- ① $2e^3 + 3$
- ② $2e^3 + \frac{7}{2}$
- ③ $2e^3 + 4$
- ④ $2e^3 + \frac{9}{2}$
- ⑤ $2e^3 + 5$

12. 좌표공간에 세 평면 $\alpha : x+y+z=1, \beta : x+y-z=-1, \gamma : z=0$ 이 있다. 평면 α 와 평면 β 의 교선을 l_1 , 평면 β 와 평면 γ 의 교선을 l_2 , 평면 γ 와 평면 α 의 교선을 l_3 이라 하자. 교선 l_1 이 zx 평면과 만나는 점을 P라 할 때, 점 P에서 교선 l_2 에 내린 수선의 발을 H_1 , 교선 l_3 에 내린 수선의 발을 H_2 라 하자. 삼각형 PH_1H_2 의 넓이는? [3점]

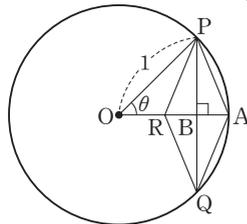
- ① $\frac{\sqrt{2}}{3}$
- ② $\frac{3\sqrt{2}}{8}$
- ③ $\frac{5\sqrt{2}}{12}$
- ④ $\frac{11\sqrt{2}}{24}$
- ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

13. 정규분포 $N(11, 6^2)$ 을 따르는 모집단에서 크기가 4인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 \bar{X} 라 하자. 모집단의 확률변수 X 에 대하여 $P(X \leq 17) = P(\bar{X} \geq a)$ 를 만족시키는 상수 a 의 값은? [3점]

- ① 6 ② 7 ③ 8
 ④ 9 ⑤ 10

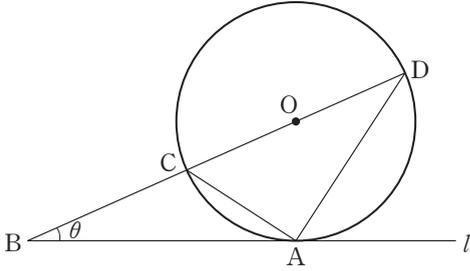
14. 그림과 같이 중심이 O 이고 반지름의 길이가 1인 원 둘레 위에 한 점 A 가 있다. 반지름 OA 위의 점 B 를 지나고 선분 OA 와 수직인 직선이 원과 만나는 두 점을 각각 P, Q 라 하고, 점 A 의 선분 PQ 에 대한 대칭점을 R 라 하자. $\angle POA = \theta$ 라 할 때,

사각형 $APRQ$ 의 넓이를 $S(\theta)$ 라 하자. $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{\theta^3}$ 의 값은?
 (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) [4점]



- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
 ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

15. 그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 $\sin \theta$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)인 원 위의 한 점 A에서의 접선을 l 이라 하자. 접선 l 위의 점 B를 $\angle OBA = \theta$ 가 되도록 잡는다. 직선 OB와 원이 만나는 두 점을 각각 C, D라 할 때, 삼각형 ADC의 넓이가 최대가 되도록 하는 θ 에 대하여 $\tan \theta$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ 1
 ④ $\sqrt{2}$ ⑤ 2

16. 좌표공간에서 구 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 위의 두 점 $A(0, \sqrt{3}, 1)$, P 가 있다. 원점에 대한 두 점 A, P의 위치벡터를 각각 \vec{a} , \vec{p} 라 할 때, $\vec{a} \cdot \vec{p} = -2$ 를 만족시키는 점 P가 나타내는 도형의 평면 $z = -2$ 위로의 정사영의 넓이는? [4점]

- ① π ② $\frac{3}{2}\pi$ ③ 2π
 ④ $\frac{5}{2}\pi$ ⑤ 3π

17. $(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x)^{10}$ 의 전개식에서 x^n 의 계수를 $f(n)$ 이라 하자. 다음은 $f(n)$ 의 최댓값을 구하는 과정이다. (단, $n=0, 1, 2, \dots, 10$)

주어진 식에서 x^n 의 계수 $f(n)$ 은

$$f(n) = {}_{10}C_n \left(\frac{1}{3}\right)^{10-n} \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad (n=0, 1, 2, \dots, 10) \text{이므로}$$

$$f(n) : f(n+1)$$

$$= {}_{10}C_n \left(\frac{1}{3}\right)^{10-n} \left(\frac{2}{3}\right)^n : {}_{10}C_{n+1} \left(\frac{1}{3}\right)^{10-n-1} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

$$= (n+1) : \left(\frac{(가)}{(가)}\right)$$

따라서 $\frac{f(n)}{f(n+1)} = \frac{n+1}{\left(\frac{(가)}{(가)}\right)} \quad (n=0, 1, 2, \dots, 9)$

그러므로 $n=0$ 부터 $n=\left(\frac{(나)}{(나)}\right)$ 까지는

$$\frac{f(n)}{f(n+1)} = \frac{n+1}{\left(\frac{(가)}{(가)}\right)} < 1$$

이고, $n=\left(\frac{(다)}{(다)}\right)$ 부터 $n=9$ 까지는

$$\frac{f(n)}{f(n+1)} = \frac{n+1}{\left(\frac{(가)}{(가)}\right)} > 1$$

이다. 즉,

$$f(0) < f(1) < f(2) < \dots < f\left(\frac{(다)}{(다)}\right) > \dots > f(9) > f(10)$$

따라서 $f\left(\frac{(다)}{(다)}\right)$ 이 최대이므로 $f(n)$ 의 최댓값은

$$f\left(\frac{(다)}{(다)}\right) = \frac{2^{10} \times 5}{3^9}$$

이다.

위의 (가)에 알맞은 식을 $g(n)$, (나), (다)에 알맞은 수를 각각 a , b 라 할 때, $g(4) + a + b$ 의 값은? [4점]

- ① 21 ② 22 ③ 23
 ④ 24 ⑤ 25

18. 두 확률변수 X 와 Y 는 평균이 각각 $m, 3m$ ($m > 0$)이고 표준편차가 모두 σ 인 정규분포를 따른다. 두 확률변수 X, Y 의 확률밀도함수를 각각 $f(x), g(x)$ 라 할 때, 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 두 곡선 $y=f(x), y=g(x)$ 와 직선 $x=4m$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이가 0.5252이다.
 (나) $P(-m \leq X \leq 0) + P(5m \leq Y \leq 6m) = 0.1574$

곡선 $y=g(x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x=3m, x=4m$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [4점]

- ① 0.1839 ② 0.2104 ③ 0.3413
 ④ 0.3678 ⑤ 0.4200

19. 양의 상수 p 에 대하여 포물선 $y^2=4px$ 의 접선 중 기울기가 m ($m>1$)인 접선이 y 축과 만나는 점을 A, 포물선과 만나는 점을 B라 하자. 점 A를 원점에 대하여 대칭이동시킨 점 A'에 대하여 선분 A'B와 x 축이 만나는 점을 C, 점 B에서 직선 $x=-p$ 에 내린 수선의 발을 H라 하자. $\overline{CB}=\overline{BH}$ 일 때, m 의 값은? [4점]

- ① $\frac{\sqrt{11}}{3}$ ② $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{13}}{3}$
 ④ $\frac{\sqrt{14}}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{15}}{3}$

20. 함수 $f(x)=e^x+\int_0^x f(t)\sin(x-t)dt$ 에 대하여 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

보기

ㄱ. $f'(0)=1$

ㄴ. 곡선 $y=f'(x)$ 의 점근선의 방정식은 $y=-1$ 이다.

ㄷ. $f(2)=2e^2-3$

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 구간 $[0, \infty)$ 에서 연속인 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

단답형

(가) $\int_0^1 f(x)dx=8$
 (나) $\int_0^1 x^2f(x^2)dx=3$

함수 $F(x)$ 가

$$F(x) = \int_0^x tf(t^2)dt$$

일 때, $\int_0^1 F(x)dx$ 의 값은? [4점]

- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 5

22. ${}_3H_3$ 의 값을 구하시오. [3점]

23. 부등식 $\log_3(x+3) + \log_3(7-x) > 2$ 를 만족시키는 모든 정수 x 의 값의 합을 구하시오. [3점]

24. 좌표공간에서 구 $x^2+y^2+z^2=9$ 위의 점 $A(1, 2, 2)$ 가 있다. 점 A 를 지나고 구에 접하는 평면을 α , 점 A 를 지나고 xy 평면에 평행한 평면을 β 라 하자. 평면 β 가 구와 만나서 생기는 원의 중심을 B 라 할 때, 점 B 에서 평면 α 에 내린 수선의 발은 (a, b, c) 이다. $9(a+b+c)$ 의 값을 구하시오. [3점]

25. $0 < x < 2\pi$ 일 때, $(1-\cos x)(1+\cos x) = \sin x$ 의 모든 실근의 합은 $\frac{q}{p}\pi$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.
(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [3점]

26. 그림과 같이 주머니 A에는 흰 공 2개, 검은 공 4개가 들어 있고, 주머니 B에는 흰 공 3개, 검은 공 2개가 들어 있다. 두 주머니 A, B에서 각각 2개의 공을 임의로 꺼냈더니 흰 공은 2개가 나왔다고 한다. 이때 2개의 흰 공이 모두 주머니 A에서 나온 공일 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.
(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



주머니 A



주머니 B

27. 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c, d 의 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수를 구하십시오. [4점]

(가) $a+b+c+d=22$

(나) $a \times b \times c \times d$ 는 3의 배수가 아니다.

28. 쌍곡선 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$ 의 두 초점을 $F(c, 0), F'(-c, 0)$ ($c > 0$)

이라 하자. 제1사분면에 있는 쌍곡선 위의 점 P 에 대하여 선분 PF' 이 기울기가 양수인 점근선과 만나는 점을 Q 라 하자.

$\overline{PQ} = \overline{PF}$ 일 때, 선분 OQ 의 길이를 l 이라 하자. $(l + \sqrt{2})^2$ 의 값을 구하십시오. (단, O 는 원점이다.) [4점]

29. 좌표공간에서 구 $x^2+y^2+z^2=25$ 와 직선 $x=y, z=1$ 이 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자. 점 A에서 구에 접하는 평면을 α 라 하고, 점 A가 아닌 구 위의 점 P에서 평면 α 에 평행하지 않고 구에 접하는 평면을 β 라 하자. 두 평면 α, β 의 교선 위의 점을 Q라 할 때, $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{QB}$ 의 최댓값을 구하시오. [4점]

30. 이차함수 $f(x)$ 와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 두 곡선 $y=f(x), y=g(x)$ 는 $x=1, x=3$ 일 때 만난다.
 (나) 두 곡선 $y=f(x), y=g(x)$ 위의 $x=1$ 인 점에서의 접선은 일치한다.

자연수 n 에 대하여 함수

$$h(x) = \{g(x) - f(x)\}^{n+1} e^{-x}$$

이 극값을 갖는 모든 x 의 값의 합을 a_n 이라 할 때, $\sum_{k=1}^{20} a_k$ 의 값을 구하시오. [4점]

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.