

제 2 교시

수학 영역(가형)

5지선다형

1. 두 벡터 $\vec{a}=(2, 1)$, $\vec{b}=(4, 3)$ 에 대하여 벡터 $3\vec{a}-\vec{b}$ 의 모든 성분의 합은? [2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}-1}{\sin 3x}$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1
 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

3. $\int_0^4 x\sqrt{x} dx$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{16}{5}$ ② $\frac{32}{5}$ ③ $\frac{64}{5}$
 ④ $\frac{128}{5}$ ⑤ $\frac{256}{5}$

4. 두 사건 A 와 B 는 서로 독립이고

$$P(A \cap B^c) = \frac{1}{2}, P(A^c \cap B^c) = \frac{1}{5}$$

일 때, $P(A)$ 의 값은? (단, A^c 은 A 의 여사건이다.) [3점]

- ① $\frac{2}{7}$ ② $\frac{3}{7}$ ③ $\frac{4}{7}$
 ④ $\frac{5}{7}$ ⑤ $\frac{6}{7}$

5. 7개의 문자 A, B, B, B, C, C, C를 일렬로 나열할 때, 적어도 2개의 C가 이웃하게 되는 경우의 수는? [3점]

- ① 80 ② 90 ③ 100
 ④ 110 ⑤ 120

6. 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f'(x) = \frac{\ln(ex)}{x}$ 이고 $f(1) = 0$ 일 때, $f(e^2)$ 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

7. 1부터 9까지의 자연수 중에서 임의로 서로 다른 4개의 수를 동시에 택할 때, 두 번째로 큰 수가 6일 확률은? [3점]

- ① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{5}{21}$ ③ $\frac{1}{3}$
 ④ $\frac{3}{7}$ ⑤ $\frac{11}{21}$

8. 좌표공간의 두 점 $A(1, -1, 1)$, $B(2, 1, 3)$ 에 대하여 두 점 A, B 를 지나는 직선과 xy 평면이 이루는 예각의 크기를 θ 라 할 때, $\cos \theta$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$
 ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{5}}{3}$

9. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x), g(x)$ 에 대하여 함수 $f(x)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이고 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1+h)-2}{h} = 3$ 을 만족시킬 때, $f'(2)$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$
 ④ $\frac{5}{6}$ ⑤ 1

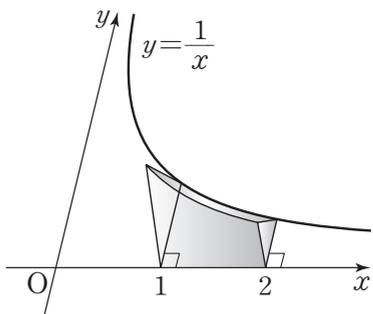
10. 좌표평면 위를 움직이는 점 P 의 시각 $t (t > 0)$ 에서의 위치 (x, y) 가

$$x = t^2 - 2t, y = -t^2 + 3$$

이다. 점 P 의 속력의 최솟값은? [3점]

- ① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$
 ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

11. 그림과 같이 곡선 $y = \frac{1}{x}$ ($x > 0$)과 x 축 및 두 직선 $x=1$, $x=2$ 로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정삼각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]

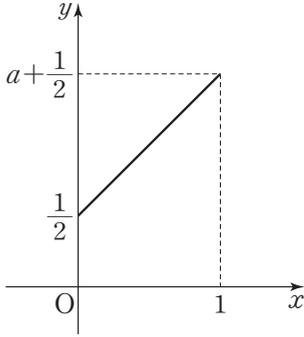


- ① $\frac{\sqrt{3}}{24}$
- ② $\frac{\sqrt{3}}{12}$
- ③ $\frac{\sqrt{3}}{8}$
- ④ $\frac{\sqrt{3}}{6}$
- ⑤ $\frac{5\sqrt{3}}{24}$

12. 좌표공간에서 구 $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 9$ 위의 점 $A(4, a, \beta)$ 에서 구에 접하는 평면의 방정식이 $ax + by + cz + 12 = 0$ 일 때, 세 상수 a, b, c 에 대하여 $a^2 + b^2 + c^2$ 의 값은? [3점]

- ① 7
- ② 9
- ③ 11
- ④ 13
- ⑤ 15

13. 연속확률변수 X 가 갖는 값의 범위는 $0 \leq X \leq 1$ 이고, X 의 확률 밀도함수의 그래프는 그림과 같다.



$P(0 \leq X \leq b) = \frac{2}{9}$ 일 때, 두 상수 a, b 의 합 $a+b$ 의 값은?

(단, $0 < b < 1$) [3점]

- | | | |
|-----|-----------------|-----------------|
| ① 1 | ② $\frac{4}{3}$ | ③ $\frac{5}{3}$ |
| ④ 2 | ⑤ $\frac{7}{3}$ | |

14. 좌표평면에서 삼각형 ABC 의 세 꼭짓점 A, B, C 와 두 점 P, Q 가 다음 조건을 만족시킨다.

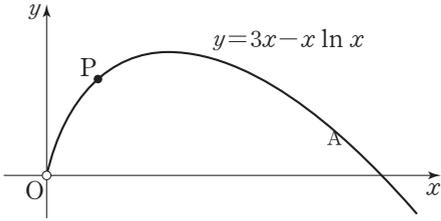
(가) $\vec{AC} = 2\vec{PB} + 5\vec{PA} + \vec{PC}$

(나) $\vec{AC} = 2\vec{QB} - \vec{QA}$

삼각형 ABC 의 넓이와 삼각형 PQC 의 넓이의 비는? [4점]

- | | | |
|---------|---------|---------|
| ① 1 : 2 | ② 2 : 3 | ③ 3 : 4 |
| ④ 4 : 5 | ⑤ 5 : 6 | |

15. 그림과 같이 곡선 $y=3x-x \ln x$ ($x>0$) 위에 있는 y 좌표가 양수인 점 P와 곡선이 x 축과 만나는 점 A에 대하여 삼각형 OAP의 넓이의 최댓값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

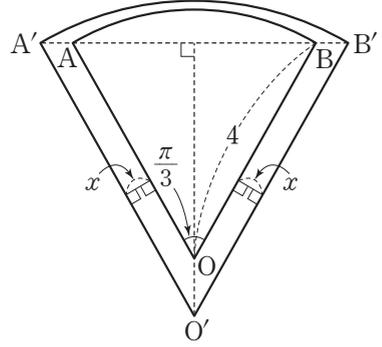


- ① $\frac{1}{2}e$ ② $\frac{1}{2}e^2$ ③ $\frac{1}{2}e^3$
 ④ $\frac{1}{2}e^4$ ⑤ $\frac{1}{2}e^5$

16. 그림과 같이 반지름의 길이가 4이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$ 인 부채꼴 OAB가 있다. $\overline{OA} \parallel \overline{O'A'}$, $\overline{OB} \parallel \overline{O'B'}$ 이고, 각 평행선 사이의 거리가 x 인 부채꼴 $O'A'B'$ 의 넓이를 $f(x)$ 라 하자.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2 + x} \text{의 값은?}$$

(단, 네 점 A, A', B, B'은 한 직선 위에 있다.) [4점]



- ① $\frac{7}{9}\pi$ ② $\frac{8}{9}\pi$ ③ π
 ④ $\frac{10}{9}\pi$ ⑤ $\frac{11}{9}\pi$

17. 한 개의 주사위를 3번 던져서 나오는 눈의 수 중 최댓값을 확률 변수 X 라 하자. 다음은 확률변수 X 의 평균 $E(X)$ 를 구하는 과정이다.

한 개의 주사위를 3번 던져서 나오는 눈의 수를 차례로 x_1, x_2, x_3 이라 하자.

자연수 k ($1 \leq k \leq 6$)에 대하여

(i) 확률변수 X 가 k 이하하려면
 $x_1 \leq k, x_2 \leq k, x_3 \leq k$ 이어야 하므로

$$P(X \leq k) = \frac{1}{6^3} \times \boxed{\text{(가)}}$$

(ii) 확률변수 X 가 $k-1$ 이하하려면
 $x_1 \leq k-1, x_2 \leq k-1, x_3 \leq k-1$ 이어야 하므로

$$P(X \leq k-1) = \frac{1}{6^3} \times \boxed{\text{(나)}}$$

(i), (ii)에 의하여

$$P(X = k) = P(X \leq k) - P(X \leq k-1)$$

$$= \frac{1}{6^3} \times (\boxed{\text{(다)}})$$

따라서 확률변수 X 의 평균 $E(X)$ 는 다음과 같다.

$$E(X) = \sum_{k=1}^6 \{k \times P(X = k)\} = \frac{119}{24}$$

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(k), g(k), h(k)$ 라 할 때, $f(4) + g(4) + h(2)$ 의 값은? [4점]

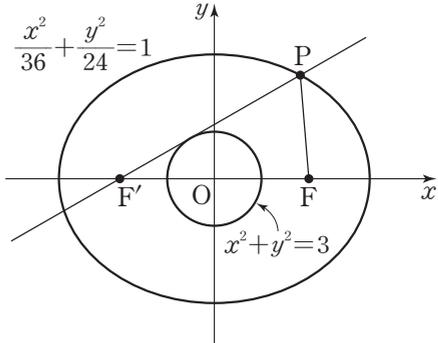
- ① 90 ② 94 ③ 98
 ④ 102 ⑤ 106

18. 어느 도시 지역에서 자녀가 고등학교에 재학 중인 가구의 비율을 알아보기 위하여 이 도시 지역의 가구 중 n 가구를 임의추출하여 조사한 결과 자녀가 고등학교에 재학 중인 가구는 k 가구였다. 이 결과를 이용하여 구한 이 도시 지역의 가구 전체에서 자녀가 고등학교에 재학 중인 가구의 비율 p 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $0.1804 \leq p \leq 0.2196$ 일 때, $n+k$ 의 값은? (단, Z 가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $P(|Z| \leq 1.96) = 0.95$ 로 계산한다.) [4점]

- ① 1720 ② 1820 ③ 1920
 ④ 2020 ⑤ 2120

19. 그림과 같이 두 점 F, F'을 초점으로 하는 타원 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{24} = 1$ 이 있다. 점 F'을 지나고 원 $x^2 + y^2 = 3$ 에 접하면서 기울기가 양수인 직선이 타원과 만나는 점 중에서 제1사분면 위의 점을 P라 할 때, 선분 PF의 길이는? (단, 점 F'의 x좌표는 음수이다.)

[4점]

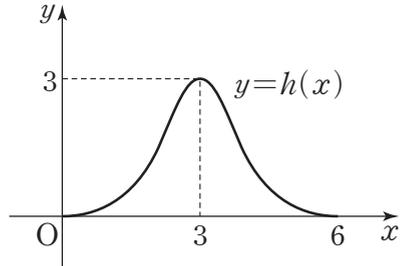


- ① 3
- ② $\frac{7}{2}$
- ③ 4
- ④ $\frac{9}{2}$
- ⑤ 5

20. 실수 전체의 집합에서 감소하는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 직선 $y=-x+6$ 과 $x=0, x=3, x=6$ 인 점에서만 만난다. 함수 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 하고, 함수 $h(x)$ 를

$h(x) = \int_0^x \{f(t) - g(t)\} dt$ 라 하자. $h(0)=0, h(3)=3,$

$h(6)=0$ 이고 닫힌 구간 $[0, 6]$ 에서 함수 $y=h(x)$ 의 그래프는 그림과 같다. $\int_3^6 f(x) dx = \frac{7}{2}$ 일 때, $\int_0^6 f(x) dx$ 의 값은? [4점]



- ① 15
- ② 16
- ③ 17
- ④ 18
- ⑤ 19

21. $x \geq 0$ 에서 정의된 함수 $f(x) = xe^x - (p+1)x + 2p$ 에 대하여 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
(단, p 는 양의 실수이다.) [4점]

보기

ㄱ. $0 < x < p$ 에서 함수 $f(x)$ 는 극솟값을 가진다.
 ㄴ. 함수 $f(x)$ 가 $x = a$ ($a > 0$)에서 극소가 되도록 하는 p 의 값은 $p = (1+a)e^a - 1$ 이다.
 ㄷ. 함수 $f(x)$ 의 극솟값을 최대로 하는 p 의 값은 $p = 4e^2 - 1$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

단답형

22. 등식 $6 \times {}_nH_3 = {}_5P_3$ 을 만족시키는 자연수 n 의 값을 구하시오. [3점]

23. 부등식 $\log_3 x + \log_3 (x-6) \leq 3$ 을 만족시키는 모든 정수 x 의 값의 합을 구하시오. [3점]

24. 영벡터가 아닌 두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 가 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{3}$ 이다.

(나) $|\vec{a}-2\vec{b}|^2+|2\vec{a}+\vec{b}|^2=20$

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ 의 최댓값을 m 이라 할 때, $50m$ 의 값을 구하시오. [3점]

25. $0 < x < 2\pi$ 일 때, 방정식 $\sec^2 x = 2 \tan x$ 의 모든 실근의 합은

$\frac{q}{p}\pi$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.

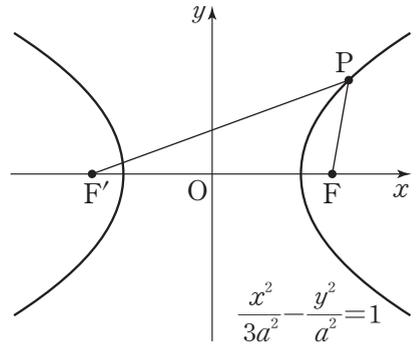
(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [3점]

26. 20대 취업 준비생을 대상으로 A, B, C 세 직종에 대한 희망 직종을 조사하였다. 조사 대상 중에서 60%는 A직종, 30%는 B직종을 선호하고, 나머지 10%는 C직종을 선호한다. A직종을 선호하는 사람 중에서 70%가 남성이고, B직종과 C직종을 선호하는 사람 중에서 각각 40%, 30%가 남성이다. 20대 취업 준비생에 대한 희망 직종 조사 대상 중에서 임의로 택한 한 명이 남성일 때, 이 남성이 B직종을 선호할 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

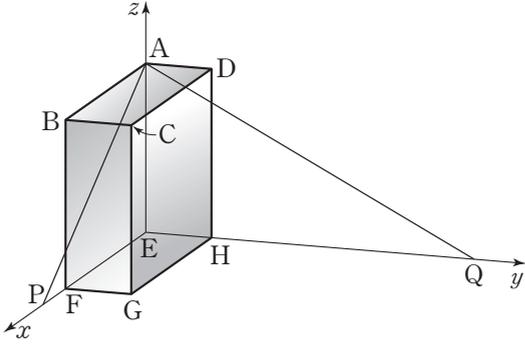
27. 다음 조건을 만족시키는 0이 아닌 정수 a, b, c, d, e 의 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e) 의 개수를 구하시오. [4점]

- (가) $|a| + |b| + |c| + |d| + |e| = 10$
 (나) $|ab|$ 는 5의 배수이다.

28. 그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{3a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 (a > 0)$ 의 두 초점을 F, F' 이라 하자. 제1사분면에 있는 쌍곡선 위의 임의의 점 P 에 대하여 삼각형 FPP' 에 내접하는 원의 중심의 x 좌표를 $f(a)$ 라 할 때, $f(2) + f(3) = k$ 이다. k 의 값을 구하시오.
 (단, 점 F 의 x 좌표는 양수이다.) [4점]



29. 그림과 같이 좌표공간에 점 $A(0, 0, 5)$, $F(4, 0, 0)$, $H(0, 2, 0)$ 을 꼭짓점으로 하는 직육면체 $ABCD-EFGH$ 가 있다. 세 점 $A(0, 0, 5)$, $P(5, 0, 0)$, $Q(0, 10, 0)$ 을 지나는 평면으로 직육면체를 자를 때 생기는 단면의 넓이를 구하시오.
(단, E는 원점이다.) [4점]



30. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x > 1$ 일 때, $f(x) = ax \ln x + bx^2$ (단, a, b 는 상수이다.)

(나) 1 이하의 임의의 서로 다른 두 실수 x_1, x_2 에 대하여

$$f(x_1) - f(x_2) = 4(x_1 - x_2)$$

(다) $f(0) = -3$

$6 \int_0^2 f(x) dx = m + n \ln 2$ 일 때, $m+n$ 의 값을 구하시오.

(단, m, n 은 정수이고, $\ln 2$ 는 무리수이다.) [4점]

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.