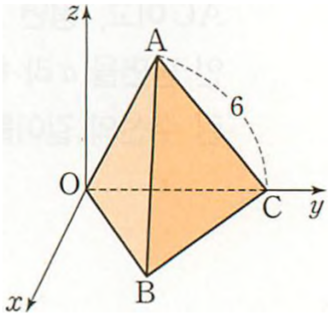
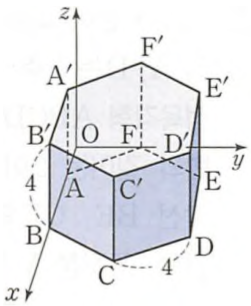
7) 공간좌표

1. 그림과 같이 좌표공간에 원점 O와 xy평면 위의 점 B, y축 위의 점 C에 대하여 한 모서리의 길이가 6인 정사면체 AOBC가 있다. 점 A의 좌표를 $(a,\ b,\ c)$라고 할 때, 세 실수 a, b, c에 대하여 $a^2-b^2+c^2$의 값은?



① 15 ② 16 ③ 17
④ 18 ⑤ 19

2. 그림과 같이 좌표공간에 모든 모서리의 길이가 4인 정육각기둥이 있다. 밑면의 두 꼭짓점 A와 B는 양의 x축 위에 있고, 점 F는 양의 y축 위에 있을 때, 점 D′의 좌표를 $(a,\ b,\ c)$라고 하자. 세 실수 a, b, c의 합 $a+b+c$의 값은? (단, $c>0$)

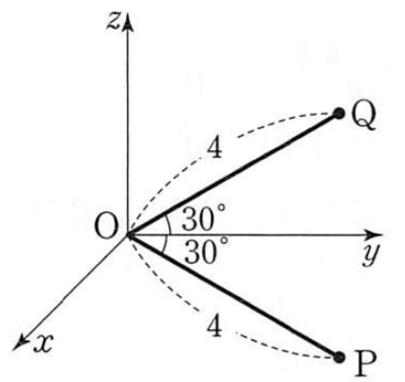


① $10+4\sqrt{3}$ ② $10+4\sqrt{6}$
③ $12+4\sqrt{3}$ ④ $12+4\sqrt{6}$
⑤ $14+4\sqrt{3}$

3. 좌표공간 위의 점 $\mathrm{A}(a,\ b,\ 3)$에 대하여 선분 OA의 xy평면, yz평면, zx평면 위로의 정사영의 길이가 각각 1, 3, $\sqrt{10}$일 때, 두 점 $\mathrm{B}(0,\ 3,\ 6)$, $\mathrm{C}(a,\ b,\ 1)$ 사이의 거리는? (단, O는 원점이다.)

① $\sqrt{33}$ ② $\sqrt{34}$ ③ $\sqrt{35}$
④ 6 ⑤ $\sqrt{37}$

4. 오른쪽 그림과 같이 두 점 P, Q가 각각 xy평면, yz평면 위에 있다. 원점 O에 대하여 $\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OQ}}=4$이고 두 선분 OP, OQ가 y축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 각각 30°일 때, 두 점 P, Q 사이의 거리를 구하시오.



5. 좌표공간의 점 $\mathrm{P}(2,\ -1,\ 3)$을 x축에 대하여 대칭이동시킨 점을 Q, 점 Q를 yz평면에 대하여 대칭이동 시킨 점을 R라 하자. 점 R의 좌표가 $(a,\ b,\ c)$일 때, $a+b+c$의
값은?

① -4 ② -2
③ 0 ④ 2 ⑤ 4

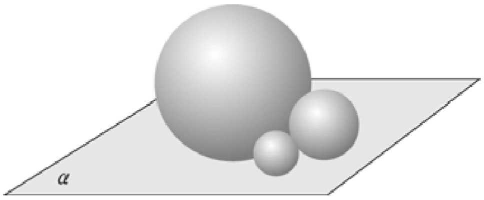
6. 좌표공간의 두 점 $\mathrm{A}(6,\ -1,\ a)$, $\mathrm{B}(b,\ 5,\ 4)$에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점은 xy평면 위에 있고, 선분 AB를 $2:1$로 외분하는 점은 yz평면 위에 있을 때, $a+b$의
값은?

① -5 ② -4 ③ -3
④ -2 ⑤ -1

7. 점 $\mathrm{A}(4,\ 3,\ 1)$을 점 $\mathrm{M}(-2,\ 1,\ 5)$에 대하여 대칭이동한 점을 B라 하고, 점 B를 xy평면 위의 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{C}(a,\ b,\ c)$라 할 때, $a-b-c$의 값은?

① 10 ② 12 ③ 14
④ 16 ⑤ 18

8. 그림과 같이 반지름의 길이가 각각 9, 15, 36이고 서로 외접하는 세 개의 구가 평면 α위에 놓여있다. 세 구의 중심을 각각 A, B, C라 할 때, $\triangle\mathrm{ABC}$의 무게중심으로부터 평면 α까지의 거리를 구하시오.



9. 좌표공간에 두 점 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$이 있고, 점 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$는 $\triangle\mathrm{OAP}$의 넓이가 2가 되도록 움직인다. $0 \le x \le 1$일 때, 점 P의 자취가 만드는 도형을 평면 위에 펼쳤을 때의 넓이는?

① 16π ② 8π ③ 5π
④ 2π ⑤ π

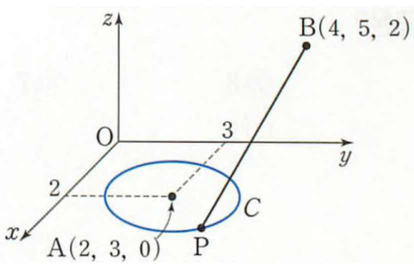
10. 좌표공간에서 두 점 $\mathrm{A}(2,\ 3,\ 4)$, $\mathrm{B}(-1\ a,\ 2)$와 xy평면 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값이 7이 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 합은?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

11. 좌표공간에 두 점 A$(1,\ 2,\ 3)$, B$(4,\ 5,\ 1)$이 있다. xy평면 위를 움직이는 점 P와 yz평면 위를 움직이는 점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB}}$의 최솟값은?

① $5\sqrt{2}$ ② $5\sqrt{3}$ ③ $6\sqrt{2}$
④ $6\sqrt{3}$ ⑤ $7\sqrt{3}$

12. 그림과 같이 좌표공간에 점 A$(2,\ 3,\ 0)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$인 원 C가 xy평면 위에 있다. 점 B$(4,\ 5,\ 2)$와 원 C 위의 점 P에 대하여 선분 BP의 길이의 최솟값은?



① $\sqrt{6}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ 3
④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $\sqrt{14}$

13. 세 점 A$(3,\ -1,\ 4)$, B$(5,\ -3,\ 2)$, C$(1,\ 4,\ 6)$을 지나는 평면 위의 점 P$(a,\ b,\ c)$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 점 P가 아닌 것은?

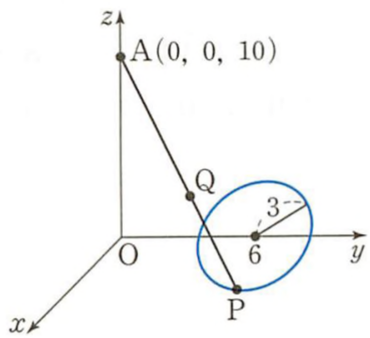
(가) (삼각형 PAB의 넓이)=(삼각형 PBC의 넓이) =(삼각형 PCA의 넓이) (나) 점 P는 삼각형 ABC의 외부에 3개, 내부에 1개가 있다.

① $(3,\ 0,\ 4)$ ② $(7,\ -8,\ 0)$ ③ $(3,\ 2,\ 4)$
④ $(-1,\ 6,\ 8)$ ⑤ $(9,\ 0,\ -2)$

14. 좌표공간 위의 두 점 A$(1,\ 2,\ 3)$, B$(a,\ b,\ c)$에 대하여 선분 AB의 중점 P의 좌표가 $(-1,\ -1,\ -1)$일 때, 세 실수 $a,\ b,\ c$의 합 $a+b+c$의 값은?

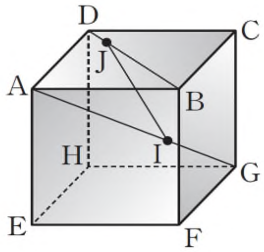
① -12 ② -11 ③ -10
④ -9 ⑤ -8

15. 그림과 같이 좌표공간에 점 A$(0,\ 0,\ 10)$과 xy평면 위의 중심의 좌표가 $(0,\ 6,\ 0)$이고 반지름의 길이가 3인 원이 있다. 원 위의 점 P에 대하여 선분 AP를 $2:1$로 내분하는 점을 Q라고 할 때, 점 Q가 나타내는 도형의 길이는?



① $\frac{5}{2}\pi$ ② 3π ③ $\frac{7}{2}\pi$
④ 4π ⑤ $\frac{9}{2}\pi$

16. 그림과 같이 한 모서리의 길이가 6인 정육면체 ABCD$-$EFGH에서 선분 AG를 $2:1$로 내분하는 점을 I, 선분 BD를 $5:1$로 내분하는 점을 J라 할 때, 선분 IJ의 길이는?



① $2\sqrt{6}$　② $\sqrt{26}$　③ $2\sqrt{7}$
④ $\sqrt{30}$　⑤ $4\sqrt{2}$

17. 좌표공간의 점 A$(3,\ 1,\ 2)$에서 구

$$x^2+y^2+z^2-2x+2y-2z+k=0$$

에 그은 접선의 길이가 2일 때, 실수 k의 값은?

① -1　② -2　③ -3
④ -4　⑤ -5

18. 좌표공간에서 구

$x^2+y^2+z^2-8x+4y-2z+17=0$이 xy평면에 의하여 잘리는 단면의 넓이는?

① 5π　② $\frac{9}{2}\pi$　③ 4π
④ $\frac{7}{2}\pi$　⑤ 3π

19. 좌표공간의 x축 위를 움직이는 점 P에서 구 $(x-4)^2+(y-6)^2+(z-8)^2=49$위의 점까지의 거리의 최솟값은?

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

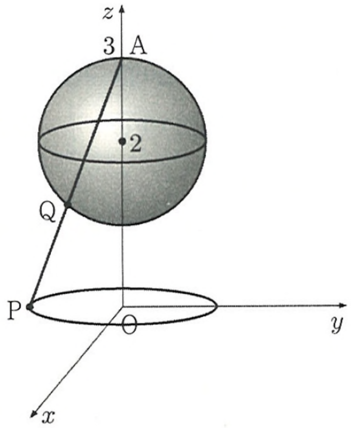
20. 좌표공간에서 x축, y축, z축에 동시에 접하고 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$인 구 S가 있다. 구 S의 중심에서 원점까지의 거리는?

① 3　② $2\sqrt{3}$　③ $\sqrt{15}$
④ $3\sqrt{2}$　⑤ $\sqrt{21}$

21. 좌표공간에서 구

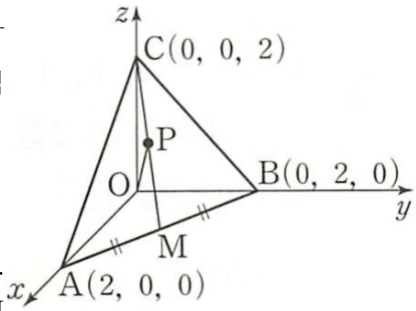
$(x-2n)^2+(y+n)^2+(z-n)^2=10^2$이 xy평면과는 만나고, yz평면과는 만나지 않도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오.

22. 좌표공간에서 xy평면 위의 원 $x^2+y^2=1$을 C라 하고, 원 C위의 점 P와 점 A$(0,\ 0,\ 3)$을 잇는 선분이 구 $x^2+y^2+(z-2)^2=1$과 만나는 점을 Q라 하자. 점 P가 원 C위를 한 바퀴 돌 때, 점 Q가 나타내는 도형 전체의 길이는 $\dfrac{b}{a}\pi$이다. $a+b$의 값을 구하시오. (단, 점 Q는 점 A가 아니고, a, b는 서로소인 자연수이다.) [4점]

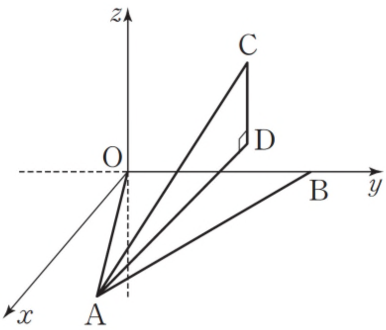


23. 구 $(x-3)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=27$과 그 내부를 포함하는 입체를 xy평면으로 잘라 구의 중심이 포함된 부분을 남기고 나머지 부분을 버린다. 남아 있는 부분을 다시 yz평면으로 잘라 구의 중심이 포함된 부분을 남기고 나머지 부분을 버린다. 이때 마지막에 남아있는 부분에서 두 평면에 의해 잘린 단면의 넓이는 $a\pi+b$이다. 두 자연수 a, b의 합 $a+b$의 값을 구하시오.

24. 그림과 같이 좌표공간에 네 점 O$(0,\ 0,\ 0)$, A$(2,\ 0,\ 0)$, B$(0,\ 2,\ 0)$, C$(0,\ 0,\ 2)$가 있다. 선분 AB의 중점을 M이라고 할 때, 선분 CM 위의 점 P에 대하여 선분 OP의 길이의 최솟값을 구하시오.



25. 그림과 같이 좌표공간에 세 점 A$(6,\ 2,\ 0)$, B$(0,\ 7,\ 0)$, C$(a,\ b,\ c)$가 있다. 삼각형 OAB의 무게중심을 G, 점 C에서 xy평면에 내린 수선의 발을 D, 선분 AC와 xy평면이 이루는 각의 크기를 θ $\left(0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\right)$라 할 때, 다음 조건이 성립한다.



(가) 사각형 OGBD는 평행사변형이다.
(나) $\tan\theta=\dfrac{1}{2}$

선분 OC의 길이는?(단, O는 원점이고, $c>0$이다.)

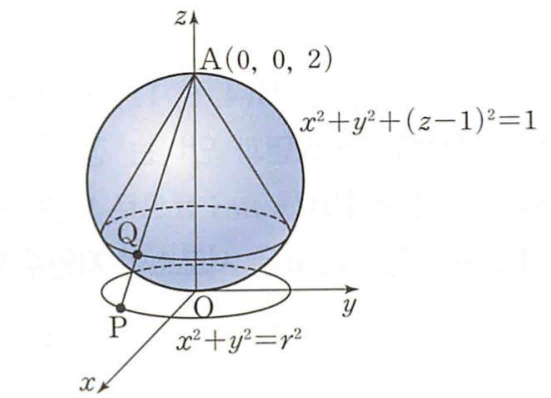
① $\sqrt{37}$ ② $\sqrt{38}$ ③ $\sqrt{39}$
④ $2\sqrt{10}$ ⑤ $\sqrt{41}$

26. 좌표공간에서 다음 두 구의 xy평면 위로의 정사영이 서로 외접할 때, 실수 k에 대하여 k^2의 값은? (단, $k \neq 0$)

$$\begin{cases} x^2+y^2+(z-3)^2=k^2 \\ (x-3)^2+(y-4)^2+(z-5)^2=4 \end{cases}$$

① 7　② 8　③ 9
④ 10　⑤ 11

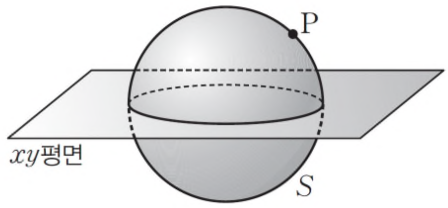
27. 그림과 같이 좌표공간에서 구 $x^2+y^2+(z-1)^2=1$과 xy평면 위에 원 $C: x^2+y^2=r^2,\ z=0$이 있다. 원 C 위의 점 P와 점 A$(0,\ 0,\ 2)$를 잇는 선분이 구와 만나는 점 중 점 A가 아닌 점을 Q라고 하자. 점 P가 원 C 위를 움직일 때, 점 Q가 그리는 도형을 밑면으로 하고 꼭짓점이 A인 원뿔의 부피를 $V(r)$라고 하자. 원뿔의 부피 $V(r)$가 최대가 되는 r의 값은? (단, $0<r<2$)



① $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　② $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　③ 1
④ $\sqrt{2}$　⑤ $\sqrt{3}$

28. 좌표공간에 구 $S: x^2+y^2+z^2=50$과 점 P$(0,\ 5,\ 5)$가 있다. 다음 조건을 만족시키는 모든 원 C에 대하여 C의 xy평면 위로의 정사영의 넓이의 최댓값을 $\dfrac{q}{p}\pi$라 하자. $p+q$의 값을 구하시오.(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

(가) 원 C는 점 P를 지나는 평면과 구 S가 만나서 생긴다.
(나) 원 C의 반지름의 길이는 1이다.

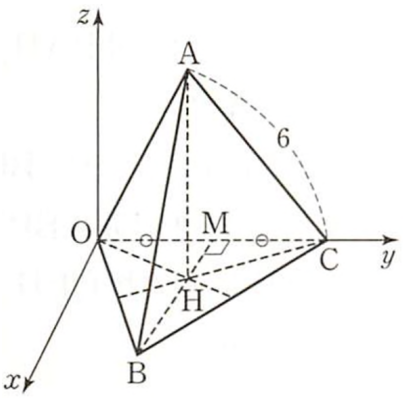


정답 및 해설

1) 정답 ④

점 A에서 삼각형 OBC에 내린 수선의 발을 H라고 하면 점 H는 삼각형 OBC의 무게중심이다.

선분 OC의 중점을 M이라고 하면 $\overline{\mathrm{OM}}=3$



$\overline{\mathrm{MH}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times 6\times\dfrac{1}{3}=\sqrt{3}$

$\overline{\mathrm{BH}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times 6\times\dfrac{2}{3}=2\sqrt{3}$

$\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AB}}^2-\overline{\mathrm{BH}}^2}$

$=\sqrt{6^2-(2\sqrt{3})^2}$

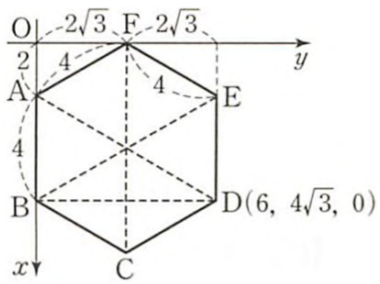
$=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

이므로 점 A의 좌표는 $\mathrm{A}(\sqrt{3},\ 3,\ 2\sqrt{6})$이다.

따라서 $a^2-b^2+c^2=3-9+24=18$

2) 정답 ①

점 D′에서 xy평면에 내린 수선의 발은 D이고, 그림에서 점 D의 좌표는 $(6,\ 4\sqrt{3},\ 0)$이므로 D′의 좌표는 $(6,\ 4\sqrt{3},\ 4)$이다.



따라서

$a+b+c=6+4\sqrt{3}+4=10+4\sqrt{3}$

3) 정답 ③

점 $\mathrm{A}(a,\ b,\ 3)$에서 xy평면, yz평면, zx평면에 내린 수선의 발을 각각 P, Q, R라고 하면 $\mathrm{P}(a,\ b,\ 0)$, $\mathrm{Q}(0,\ b,\ 3)$, $\mathrm{R}(a,\ 0,\ 3)$이다.

선분 OA의 xy평면, yz평면, zx평면 위로의 정사영의 길이는 각각 $\overline{\mathrm{OP}}$, $\overline{\mathrm{OQ}}$, $\overline{\mathrm{OR}}$이므로

$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{a^2+b^2}=1,\ \overline{\mathrm{OQ}}=\sqrt{b^2+3^2}=3,\ \overline{\mathrm{OR}}=\sqrt{a^2+3^2}=\sqrt{10}$

그러므로 $a^2=1,\ b=0$

따라서 두 점 $\mathrm{B}(0,\ 3,\ 6)$, $\mathrm{C}(a,\ b,\ 1)$ 사이의 거리는

$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{a^2+(b-3)^2+(-5)^2}=\sqrt{1+9+25}=\sqrt{35}$

4) 정답 $2\sqrt{2}$

[해설] P는 xy평면 위의 점이므로 z좌표는 0이고, $\overline{\mathrm{OP}}=4$이므로

x 좌표는 $4\sin 30^\circ=4\times\dfrac{1}{2}=2$,

y 좌표는 $4\cos 30^\circ=4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$

$\therefore \mathrm{P}(2,\ 2\sqrt{3},\ 0)$

점 Q는 yz 평면 위의 점이므로 x 좌표는 0이고, $\overline{\mathrm{OQ}}=4$이므로

y 좌표는 $4\cos 30^\circ=4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$,

z 좌표는 $4\sin 30^\circ=4\times\dfrac{1}{2}=2$

이므로

y좌표는 $4\cos 30^\circ=4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$,

z좌표는 $4\sin 30^\circ=4\times\dfrac{1}{2}=2$

$\therefore\ Q(0,2\sqrt{3},2)$

따라서 두 점 P, Q 사이의 거리는

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(-2)^2+0^2+2^2}=2\sqrt{2}$

5) 정답 ①

점 $\mathrm{P}(2,\ -1,\ 3)$을 x축에 대하여 대칭이동시킨 점은 $\mathrm{Q}(2,\ -1,\ -3)$, 점 $\mathrm{Q}(2,\ -1,\ -3)$을 yz평면에 대하여 대칭이동시킨 점은 $\mathrm{R}(-2,\ 1,\ -3)$.

따라서 $a=-2,\quad b=1,\quad c=-3$이므로

$a+b+c=(-2)+1+(-3)=-4$

6) 답. ①

선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점이 xy평면 위에 있으므로 이 점의 z좌표는 0이다.

즉 $\dfrac{2\times 4+1\times a}{2+1}=0$에서 $a=-8$

또 선분 AB를 $2:1$로 외분하는 점이 yz평면 위에 있으므로 이 점의 x좌표는 0이다.

즉 $\dfrac{2\times b-1\times 6}{2-1}=0$에서 $b=3$

따라서

$a+b=-8+3=-5$

7) 정답 ④

[해설]점 $\mathrm{A}(4,\ 3,\ 1)$을 점 $\mathrm{M}(-2,\ 1,\ 5)$에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{B}(p,\ q,\ r)$라 하면 점 M은 선분 AB의 중점이므로

$\dfrac{4+p}{2}=-2,\ \dfrac{3+q}{2}=1,\ \dfrac{1+r}{2}=5$

$\therefore p=-8,\ q=-1,\ r=9$

즉, 점 $\mathrm{B}(-8,\ -1,\ 9)$ 이므로 이 점을 xy 평면 위의 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점 C 의 좌표는 $(-1,\ -8,\ -9)$

$\therefore a=-1,\ b=-8,\ c=-9$

$\therefore a-b-c=-1-(-8)-(-9)=16$

8) 정답 20

세 구의 중심이 각각

$$\mathrm{A}(a_1,\ b_1,\ 9),\ \mathrm{B}(a_2,\ b_2,\ 15),\ \mathrm{C}(a_3,\ b_3,\ 36)$$

일 때, 평면 α가 xy평면 위에 있다고 하면 세 구가 평면 α위에 있으므로 세 구의 방정식은

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2+(z-9)^2=9^2$$

$$(x-a_2)^2+(y-b_2)^2+(z-15)^2=15^2$$

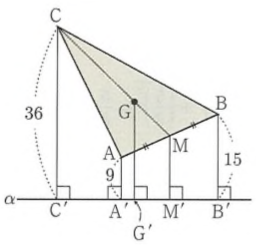
$$(x-a_3)^2+(y-b_3)^2+(z-36)^2=36^2$$

으로 나타낼 수 있고

이때, △ABC의 무게중심에서부터 평면 α까지의 거리는 △ABC의 무게중심의 z좌표와 같으므로

$$\frac{9+15+36}{3}=20$$

[다른 풀이]



△ABC의 무게중심을 G, 변 AB의 중심을 M이라 하고 점 A, B, C, G, M에서 평면 α에 내린 수선의 발을 각각 A′, B′, C′, G′, M′이라고 하면

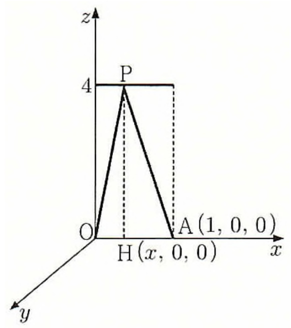
$$\overline{\mathrm{MM'}}=\frac{9+15}{2}=12$$

따라서 무게중심 G는 $\overline{\mathrm{CM}}$을 2 : 1로 내분하므로 사다리꼴 CC′MM′에서

$$\overline{\mathrm{CG'}}=\frac{2\cdot 12+1\cdot 36}{2+1}=20$$

9) 정답 ②

두 점 O, A는 모두 x축 위의 점이고, $\overline{\mathrm{OA}}=1$이므로 △OAP의 넓이가 2가 되려면 점 P와 x축 사이의 거리가 4이어야 한다.

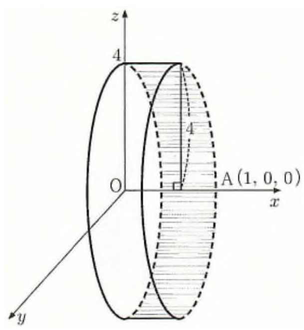


또, 점 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\mathrm{H}(x,\ 0,\ 0)$$

이때 $\overline{\mathrm{PH}}=4$이어야 하므로 $\overline{\mathrm{PH}}=\sqrt{y^2+z^2}=4$

$$\therefore\ y^2+z^2=4^2\ (\text{단, } 0\le x\le 1)$$



따라서 점 P가 만드는 도형은 x축을 중심축으로 하고 밑면의 반지름의 길이가 4이고 원기둥의 옆면 중 $0\le x\le 1$인 부분이므로 펼치면 한 변의 길이가 $2\pi\times 4=8\pi$ (원기둥 밑면의 둘레), 다른 한 변의 길이가 1인 직사각형이다.

따라서 구하는 넓이는 $8\pi\times 1=8\pi$

10) 정답 ④

두 점 A, B에 대하여 z 좌표가 같은 부호이므로 두 점은 xy 평면에 대하여 같은 쪽에 있다.

점 A의 xy 평면에 대하여 대칭인 점을 A′이라고 하면 $\mathrm{A'}(2,\ 3,\ -4)$이다.

이때, $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{BP}}\ge\overline{\mathrm{A'B}}$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값은

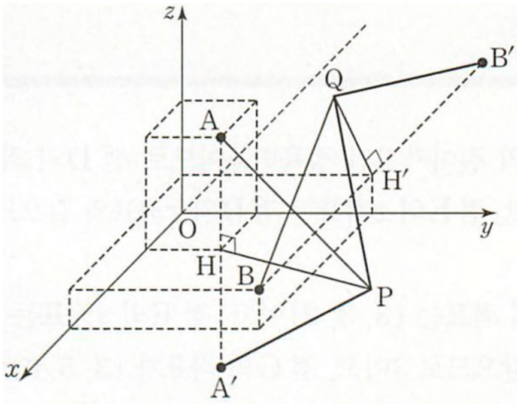
$\overline{\mathrm{A'B}}=\sqrt{\{2-(-1)\}^2+(3-a)^2+(-4-2)^2}=7$에서

$(3-a)^2=4$

$a=1$ 또는 $a=5$

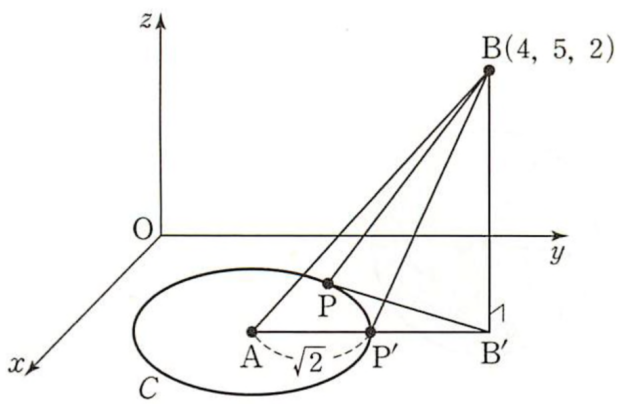
따라서 모든 실수 a의 값의 합은 6이다.

11) 정답 ①



그림과 같이 점 A의 xy평면에 대한 대칭인 점을 A$'$이라 하고, 선분 AA$'$이 xy평면과 만나는 점을 H라고 하자.
또, 점 B의 yz평면에 대한 대칭인 점을 B$'$이라 하고, 선분 BB$'$이 yz평면과 만나는 점을 H$'$이라고 하자.
선분 AA$'$은 xy평면과 수직이므로 xy평면 위의 점 P에 대하여 $\overline{AA'} \perp \overline{PH}$이다.
따라서 두 삼각형 PAH, PA$'$H는 합동이므로
$\overline{AP} = \overline{A'P}$
…… ㉠
같은 방법으로, 선분 BB$'$은 yz평면과 수직이므로 yz평면 위의 점 Q에 대하여 $\overline{BB'} \perp \overline{QH'}$이다.
따라서 두 삼각형 QBH$'$, QB$'$H$'$은 합동이므로
$\overline{QB} = \overline{QB'}$
…… ㉡
㉠과 ㉡에서
$\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QB} = \overline{A'P} + \overline{PQ} + \overline{QB'} \geq \overline{A'B'}$
두 점 A$'$, B$'$의 좌표는 각각 A$'(1,\ 2,\ -3)$, B$'(-4,\ 5,\ 1)$이므로 $\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QB}$의 최솟값은
$\overline{A'B'} = \sqrt{(-4-1)^2 + (5-2)^2 + (1+3)^2} = 5\sqrt{2}$

12) 정답 ①



점 B$(4,\ 5,\ 2)$에서 xy평면에 내린 수선의 발을 B$'$, 선분 AB$'$이 원 C와 만나는 점을 P$'$이라고 하면 $\overline{BP} \geq \overline{BP'}$이다.
$\overline{BB'} = 2$, $\overline{AB} = \sqrt{(4-2)^2 + (5-3)^2 + 2^2} = 2\sqrt{3}$
이므로 $\overline{AB'} = 2\sqrt{2}$
$\overline{P'B'} = \overline{AB'} - \overline{AP'} = \sqrt{2}$
직각삼각형 BP$'$B$'$에서
$\overline{BP'} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 2^2} = \sqrt{6}$
따라서 최솟값은 $\sqrt{6}$이다.

13) 정답 ⑤

점 P가 삼각형 ABC의 내부에 있을 때는 점 P가 삼각형 ABC의 무게중심일 때이므로
P$(a,\ b,\ c)$는 $\mathrm{P}\left(\frac{3+5+1}{3},\ \frac{-1-3+4}{3},\ \frac{4+2+6}{3}\right)$
즉, P$(3,\ 0,\ 4)$
점 P가 삼각형 ABC의 외부에 있을 때는 사각형 ABPC가 평행사변형을 이룰 때이다.
선분 AP의 중점 $\left(\frac{a+3}{2},\ \frac{b-1}{2},\ \frac{c+4}{2}\right)$와 선분 BC의 중점 $\left(\frac{5+1}{2},\ \frac{-3+4}{2},\ \frac{2+6}{2}\right)$이 일치하므로
$a = 3,\ b = 2,\ c = 4$
즉, P$(3,\ 2,\ 4)$
마찬가지 방법으로 사각형 ABCP가 평행사변형을 이룰 때와 사각형 APBC가 평행사변형을 이룰 때도 구하면 P$(-1,\ 6,\ 8)$, P$(7,\ -8,\ 0)$이 될 수 있으므로 점 P가 아닌 것은 ⑤이다.

14) 정답 ①

점 P는 선분 AB의 중점이므로
$\left(\frac{a+1}{2},\ \frac{b+2}{2},\ \frac{c+3}{2}\right) = (-1,\ -1,\ -1)$
에서 $a = -3,\ b = -4,\ c = -5$
따라서 $a + b + c = -12$

15) 정답 ④

xy평면 위에 있는 원의 방정식은
$x^2 + (y-6)^2 = 9,\ z = 0$이므로
점 P의 좌표를 P$(a,\ b,\ 0)$이라고 하면
$a^2 + (b-6)^2 = 9$
…… ㉠
점 Q의 좌표는 $\mathrm{Q}\left(\frac{2a}{3},\ \frac{2b}{3},\ \frac{10}{3}\right)$이므로
$\frac{2a}{3} = x,\ \frac{2b}{3} = y$라고 하면
$a = \frac{3x}{2},\ b = \frac{3y}{2}$
이를 ㉠에 대입하면

$\left(\dfrac{3x}{2}\right)^2+\left(\dfrac{3y}{2}-6\right)^2=9$

즉, $\dfrac{9}{4}x^2+\dfrac{9}{4}(y-4)^2=9$

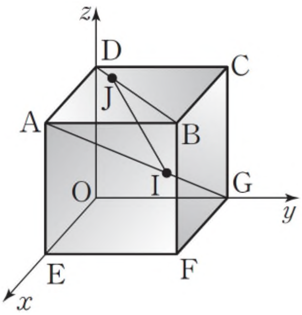
따라서 점 Q가 나타내는 도형의 방정식이

$x^2+(y-4)^2=4,\ z=\dfrac{10}{3}$이므로

점 Q가 나타내는 도형의 길이는 $2\pi\times2=4\pi$

16)정답 ②

점 H를 좌표공간의 원점 O로, 세 직선 HE, HG, HD를 각각 x축, y축, z축으로 잡으면 세 점 E, G, D의 좌표는 각각 $(6,\ 0,\ 0)$, $(0,\ 6,\ 0)$, $(0,\ 0,\ 6)$
으로 놓을 수 있다.



두 점 A, G의 좌표는 각각 $(6,\ 0,\ 6)$, $(0,\ 6,\ 0)$이므로
선분 AG를 $2:1$로 내분하는 점 I의 좌표는

$\left(\dfrac{2\times0+1\times6}{2+1},\ \dfrac{2\times6+1\times0}{2+1},\ \dfrac{2\times0+1\times6}{2+1}\right)$

즉 $(2,\ 4,\ 2)$

또 두 점 B, D의 좌표는 각각 $(6,\ 6,\ 6)$, $(0,\ 0,\ 6)$이므로

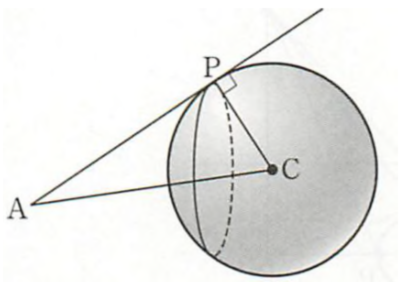
선분 BD를 $5:1$로 내분하는 점 J의 좌표는

$\left(\dfrac{5\times0+1\times6}{5+1},\ \dfrac{5\times0+1\times6}{5+1},\ \dfrac{5\times6+1\times6}{5+1}\right)$

즉 $(1,\ 1,\ 6)$

따라서 $\overline{\mathrm{IJ}}=\sqrt{(1-2)^2+(1-4)^2+(6-2)^2}=\sqrt{26}$

17) 정답 ②



주어진 구의 방정식은

$(x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=3-k$

이므로 구의 중심을 C라고 하면 $\mathrm{C}(1,\ -1,\ 1)$이고

$\overline{\mathrm{CA}}=\sqrt{(3-1)^2+(1+1)^2+(2-1)^2}=3$

점 $\mathrm{A}(3,\ 1,\ 2)$에서 구에 그은 접선의 접점을 P라고 하면

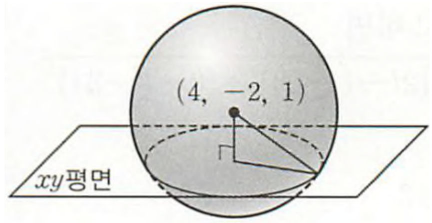
$\overline{\mathrm{CA}}^2=\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{PC}}^2$

$\overline{\mathrm{AP}}=2$이므로 $9=4+\overline{\mathrm{PC}}^2$, $\overline{\mathrm{PC}}=5$

따라서 구의 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$이므로

$3-k=5$에서 $k=-2$

18) 정답 ⑤



$x^2+y^2+z^2-8x+4y-2z+17=0$에서

$(x-4)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=4$이므로

구의 중심의 좌표는 $(4,\ -2,\ 1)$, 반지름의 길이는 2이다.

따라서 구의 중심에서 xy평면까지의 거리는 1이다.

이때, 구가 xy평면에 의하여 잘리는 단면은 중심의 좌표가 $(4,\ -2,\ 0)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$인 원이므로 구하는 단면의 넓이는 3π이다.

[다른 풀이]

구 $x^2+y^2+z^2-8x+4y-2z+17=0$이 xy평면과 만나는 z좌표가 0이므로 구의 방정식에 $z=0$을 대입하면

$x^2+y^2-8x+4y+17=0$

즉, $(x-4)^2+(y+2)^2=3,\ z=0$

따라서 단면의 중심의 좌표가 $(4,\ -2,\ 0)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$인 원이다.

19) 답. ③

구의 중심을 C라 하면 점 C의 좌표는 $(4,\ 6,\ 8)$

점 C에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H의 좌표는 $(4,\ 0,\ 0)$

이 때 $\overline{\mathrm{CH}}=\sqrt{(4-4)^2+(0-6)^2+(0-8)^2}=10$이므로

점 P의 좌표가 $(4,0,0)$일 때 점 P에서 구 $(x-4)^2+(y-6)^2+(z-8)^2=49$ 위의 점까지의 거리는 최소이다. 따라서 구하는 최솟값은 $10-7=3$

20) 정답 ③

구 S의 중심의 좌표를 $(a,\ b,\ c)$라고 하면 구 S가 x축에 접하므로 접점의 좌표는 $(a,\ 0,\ 0)$이고 반지름의 길이는 $\sqrt{b^2+c^2}$이므로

$b^2+c^2=10$

…… ㉠

같은 방법으로

$a^2+c^2=10$

…… ㉡

$a^2+b^2=10$

…… ㉢

㉠+㉡+㉢에서 $2(a^2+b^2+c^2)=30$이므로

$a^2+b^2+c^2=15$

따라서 구 S의 중심에서 원점까지의 거리는 $\sqrt{15}$이다.

21) 답. 40

구 $(x-2n)^2+(y+n)^2+(z-n)^2=10^2$의 중심은 $(2n,\ -n,\ n)$이고 반지름의 길이는 10이다. 이 구와 xy 평면이 만나야 하므로 $n \le 10$ …… ㉠

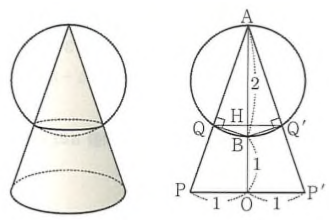
또 이 구와 yz 평면이 마나지 않아야 하므로 $2n>10$

$n>5$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $5<n\le 10$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 n은 6, 7, 8, 9, 10이고, 그 합은 $6+7+8+9+10=40$

22) 정답 11



[그림1] [그림2]

점 A와 원 C 위의 점 P를 이은 선분이 나타내는 도형은 [그림1]과 같이 원뿔이 되므로 구하는 도형은 원뿔과 구의 교점의 집합이다.

z축을 포함하는 평면으로 [그림2]와 같이 자른 후 점 Q의 z축에 대하여 대칭인 점을 Q′, 선분 QQ′의 중점을 H, z축과 구의 교점 중 점 A가 아닌 점을 B라 하면 점 Q가 나타내는 도형은 점 H로부터 거리가 일정하고 $\overline{\mathrm{QQ'}}\perp\overline{\mathrm{AH}}$인 원이다.

$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{10}$이므로

$$\overline{\mathrm{AQ}}=2\times\cos(\angle\mathrm{PAO})=\frac{6}{\sqrt{10}}$$

$$\therefore\ \overline{\mathrm{QH}}=\overline{\mathrm{AQ}}\sin(\angle\mathrm{PAO})=\frac{6}{\sqrt{10}}\times\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{3}{5}$$

점 Q가 나타내는 도형은 반지름의 길이가 $\frac{3}{5}$인 원이므로 구하는 도형 전체의 길이는 $2\pi\times\frac{3}{5}=\frac{6}{5}\pi$

따라서 $a+b=5+6=11$

[다른 풀이]

점 Q에서 z축에 내린 수선의 발을 R라 하면 좌표공간에서 점 Q가 나타내는 도형은 $\overline{\mathrm{RQ}}$를 반지름으로 하는 원이다.

$\overline{\mathrm{RQ}}=r$이라 하면

$\overline{\mathrm{OA}}:\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{AR}}:\overline{\mathrm{RQ}}$

$3:1=\overline{\mathrm{AR}}:r$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AR}}=3r$

구의 중심을 M이라 하면

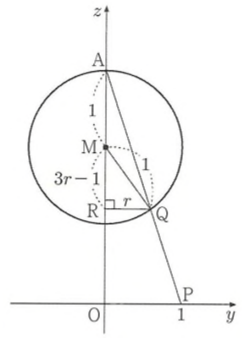
$\overline{\mathrm{MR}}=3r-1$

직각삼각형 MRQ에서

$(3r-1)^2+r^2=1$,

$9r^2-6r+1+r^2=1$, $r(5r-3)=0$

$\therefore\ r=\frac{3}{5}$

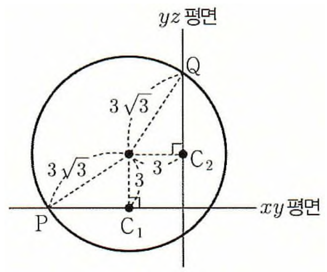


구하는 도형 전체의 길이는 반지름의 길이가 $\frac{3}{5}$인 원의 둘레의 길이와 같으므로 $2\pi\cdot\frac{3}{5}=\frac{6}{5}\pi$

따라서 $a=5$, $b=6$이므로 $a+b=11$

23) 정답 45

구 $(x-3)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=27$을 S라 하자.

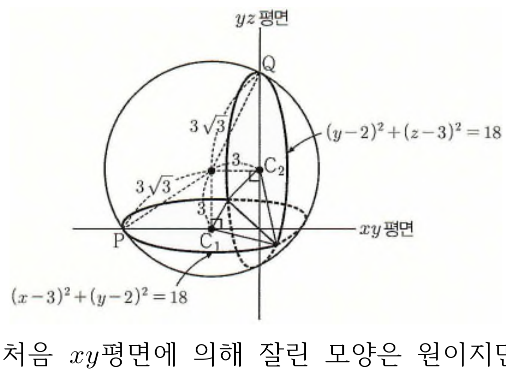


구 S의 중심의 좌표가 (3, 2, 3)이므로 구 S가 xy평면에 의해 잘린 단면은 중심의 좌표가 (3, 2, 0)인 원이다. 원의 중심을 C_1, 원 위의 한 점을 P라 할 때, 원의 반지름의 길이는

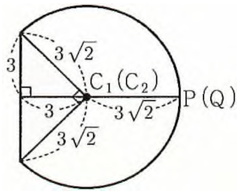
$$\overline{\mathrm{C_1P}}=\sqrt{(3\sqrt{3})^2-3^2}=3\sqrt{2}$$

또한 구 S가 yz평면에 의해 잘린 단면은 중심의 좌표가 (0, 2, 3)인 원이다. 원의 중심을 C_2, 원 위의 한 점을 Q라 할 때, 원의 반지름의 길이는

$$\overline{\mathrm{C_2Q}}=\sqrt{(3\sqrt{3})^2-3^2}=3\sqrt{2}$$



구 S가 처음 xy평면에 의해 잘린 모양은 원이지만 yz평면에 의해 한 번 더 잘릴 때, 원의 일부분이 잘려져 나가 다음 그림과 같은 모양이 된다.



이때 구 S가 yz평면에 의해 잘릴 때, 이미 xy평면에 의해 구의 일부분이 잘려져 나가 있으므로 yz평면에 의해 잘린 단면 역시 위의 그림과 같다.

이 단면의 넓이는 중심각의 크기가 $\frac{3}{2}\pi$인 부채꼴의 넓이와 나머지 부분인 삼각형의 넓이의 합과 같고 xy평면에 의해 잘리고 남은 단면과 yz평면에 의해 잘리고 남은 단면 모두 넓이가 같으므로 구하는 단면의 넓이는 한 단면의 넓이의 2배를 해 주면 된다.

넓이의 합$=2$(부채꼴의 넓이 + 직각삼각형의 넓이)

$$=2\left(\frac{1}{2}\cdot(3\sqrt{2})^2\cdot\frac{3\pi}{2}+\frac{1}{2}\cdot(3\sqrt{2})^2\right)$$
$$=27\pi+18$$
$$=a\pi+b$$

따라서 $a+b=27+18=45$

24) 정답 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

점 M은 선분 AB의 중점이므로 $\mathrm{M}(1,\ 1,\ 0)$이다.

선분 CM 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{CP}}:\overline{\mathrm{PM}}$을 $m:n\ (m>0,\ n>0)$이라고 하면

$m:n=\frac{m}{m+n}:\frac{n}{m+n}=t:(1-t)\ (0<t<1)$

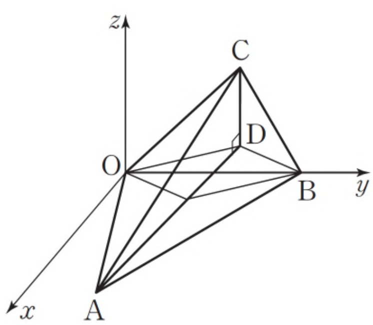
즉, 점 P는 선분 CM을 $t:(1-t)$로 내분하는 점이다.

따라서 점 P의 좌표는 $\mathrm{P}(t,\ t,\ 2-2t)$이다.

$$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{t^2+t^2+(2-2t)^2}$$
$$=\sqrt{6t^2-8t+4}$$
$$=\sqrt{6\left(t-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{4}{3}}$$

따라서 선분 OP의 길이의 최솟값은 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$이다.

25) 정답 ①



삼각형 OAB의 무게중심 G의 좌표는

$\left(\frac{0+6+0}{3},\ \frac{0+2+7}{3},\ \frac{0+0+0}{3}\right)$

즉 $(2,\ 3,\ 0)$

점 C에서 xy평면에 내린 수선의 발을 D의 좌표는 $(a,\ b,\ 0)$이므로 선분 GD의 중점의 좌표는

$\left(\frac{2+a}{2},\ \frac{3+b}{2},\ 0\right)$

선분 OB의 중점의 좌표는

$\left(0,\ \frac{7}{2},\ 0\right)$

조건 (가)에서 사각형 OGBD가 평행사변형이므로 선분 GD의 중점과 선분 OB의 중점은 일치한다.

즉 $\frac{2+a}{2}=0,\ \frac{3+b}{2}=\frac{7}{2}$에서

$a=-2,\ b=4$

이때 점 D의 좌표는 $(-2,\ 4,\ 0)$이므로

$\overline{\mathrm{AD}}=\sqrt{(-2-6)^2+(4-2)^2+(0-0)^2}=2\sqrt{17}$

조건 (나)에서

$\tan\theta=\frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\overline{\mathrm{AD}}}=\frac{\overline{\mathrm{CD}}}{2\sqrt{17}}=\frac{1}{2}$

$\overline{\mathrm{CD}}=\sqrt{17}$

이때 $c>0$이므로 점 C의 좌표는 $(-2,\ 4,\ \sqrt{17})$이다.

따라서

$\overline{\mathrm{OC}}=\sqrt{(-2)^2+4^2+(\sqrt{17})^2}=\sqrt{37}$

26) 정답 ③

구 $x^2+y^2+(z-3)^2=k^2$의 xy평면 위로의 정사영을 구하면

$x^2+y^2=k^2$

구 $(x-3)^2+(y-4)^2+(z-5)^2=4$의 xy평면 위로의 정사영을 구하면

$(x-3)^2+(y-4)^2=4$

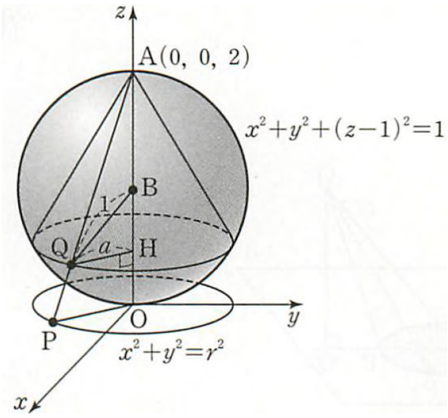
xy평면 위의 두 원이 서로 외접하므로 두 원의 중심 $(0,\ 0)$, $(3,\ 4)$ 사이의 거리는 반지름의 길이의 합과 같으므로

$\sqrt{(3-0)^2+(4-0)^2}=|k|+2$

$|k|=3$

따라서 $k^2=9$

27) 정답 ④



그림과 같이 구 S의 중심을 B, 점 Q에서 z축에 내린 수선의 발을 H, $\overline{\mathrm{QH}}=a\ (0<a<1)$라고 하면 $\overline{\mathrm{BH}}=\sqrt{1-a^2}$

두 삼각형 AQH와 APO는 닮은 도형이고 점 H의 좌표가 1보다 작으므로

$\overline{\mathrm{AH}}=1+\sqrt{1-a^2}$ 이므로

$\overline{\mathrm{AH}}:\overline{\mathrm{QH}}=\overline{\mathrm{AO}}:\overline{\mathrm{PO}}$

즉, $(1+\sqrt{1-a^2}):a=2:r$

$2a=r+r\sqrt{1-a^2}$

$a=\dfrac{4r}{r^2+4}$, (단, $0<r<2$)

따라서 구하는 원뿔의 부피 $V(r)$는

$$V(r)=\frac{1}{3}\times\pi\times\overline{\mathrm{QH}}^2\times\overline{\mathrm{AH}}$$
$$=\frac{1}{3}\pi\times a^2\times(1+\sqrt{1-a^2})$$
$$=\frac{\pi}{3}\times\left(\frac{4r}{r^2+4}\right)^2\times\left(1+\frac{4-r^2}{r^2+4}\right)$$
$$=\frac{128}{3}\pi\times\frac{r^2}{(r^2+4)^3}$$

$$V'(r)=\frac{128}{3}\pi\times\frac{2r(r^2+4)^3-r^2\times3(r^2+4)^2\times2r}{(r^2+4)^6}$$
$$=\frac{128}{3}\pi\times\frac{4r(2-r^2)}{(r^2+4)^4}$$

$0<r<2$이므로 $V'(r)=0$에서 $r=\sqrt{2}$이고 함수 $V(r)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

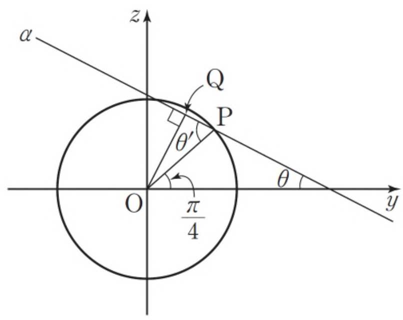
r	(0)	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	(2)
$V'(r)$		$+$	0	$-$	
$V(r)$		↗	극대	↘	

따라서 $r=\sqrt{2}$일 때, 원뿔의 부피 $V(r)$는 최댓값을 갖는다.

28) 정답 9

점 P를 지나는 평면을 α, 원 C의 중심을 Q라 하자. 구 S와 평면 α의 교선인 원의 xy평면 위로의 정사영의 넓이가 최대가 되려면 평면 α와 xy평면이 이루는 각의 크기가 최소가 되어야 한다. 그러기 위해서는 점 Q의 z좌표가 최대가 되어야 하므로 평면 α는 yz평면과 수직이어야 한다.

오른쪽 그림은 구 S를 yz평면으로 자른 단면이고, 선분 OP와 y축이 이루는 예각의 크기는 $\frac{\pi}{4}$이다.



이때 평면 α와 xy평면이 이루는 각의 크기를 θ라 하면 θ는 직선 PQ와 y축이 이루는 예각의 크기와 같다.

직각삼각형 OPQ에서 $\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{50}$, $\overline{\mathrm{PQ}}=1$이므로 $\overline{\mathrm{OQ}}=7$이다.

$\angle\mathrm{OPQ}=\theta'$이라 하면 $\sin\theta'=\dfrac{7}{\sqrt{50}}$, $\cos\theta'=\dfrac{1}{\sqrt{50}}$이므로

$$\cos\theta=\cos\left(\theta'-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\theta'\cos\frac{\pi}{4}+\sin\theta'\sin\frac{\pi}{4}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{50}}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{7}{\sqrt{50}}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{4}{5}$$

원 C의 xy평면 위로의 정사영의 넓이의 최댓값은 $\pi\times\cos\theta=\dfrac{4}{5}\pi$이므로 $p=5$, $q=4$

따라서 $p+q=5+4=9$