

01

[풀이]

지수법칙에 의하여

$$8^{\frac{1}{3}} = (2^3)^{\frac{1}{3}} = 2^{3 \times \frac{1}{3}} = 2$$

이므로

$$\therefore 2^2 \times 8^{\frac{1}{3}} = 4 \times 2 = 8$$

답 ④

02

[풀이]

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + n + 1}{2n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{1}{n^2}}$$

$$= \frac{3 + 0 + 0}{2 + 0} = \frac{3}{2}$$

답 ③

03

[풀이]

집합 A가 집합 B의 부분집합이므로

$7 \in A$ 이면 $7 \in B$ 이어야 한다.

따라서 a는 7일 수 밖에 없다.

답 ③

04

[풀이]

$$f(3) = 4, g(4) = 5 \text{ 이므로}$$

합성함수의 정의에 의하여

$$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(4) = 5$$

답 ⑤

05

[풀이]

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하자.

$p \Rightarrow q$ 이므로 $P \subset Q$ 이다. 즉, $a \in Q$ 이다.

$$a^2 - 3a - 4 \leq 0, (a - 4)(a + 1) \leq 0$$

풀면

$$-1 \leq a \leq 4$$

따라서 실수 a의 최댓값은 4이다.

답 ④

06

[풀이]

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 $x = 1$ 에서 극솟값을 가지므로 $f'(1) = 0$ 이다.

함수 $f(x)$ 의 도함수는

$$f'(x) = 3x^2 - a$$

$$f'(1) = 3 - a = 0$$

$$\therefore a = 3$$

답 ②

07

[풀이]

시그마의 성질에 의하여

$$\sum_{k=1}^{10} (2a_k^2 - a_k) = 2 \sum_{k=1}^{10} a_k^2 - \sum_{k=1}^{10} a_k$$

$$= 2 \times 7 - 3 = 11$$

답 ④

08

[풀이]

함수 $y = \sqrt{2(x+3)}$ 의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼 평행이동하면 함수

$$y = \sqrt{2(x-m+3)} = \sqrt{2x-2m+6}$$

의 그래프와 일치한다.

문제에서 주어진 조건에 의하여

$$-2m + 6 = 0$$

$$\therefore m = 3$$

답 ②

09

[풀이]

문제에서 주어진 유리함수의 방정식을 정리하면

$$y = \frac{3(x-1)+4}{x-1} = 3 + \frac{4}{x-1}$$

이 함수의 두 점근선의 방정식은 각각

$$x = 1, y = 3$$

$$\therefore a + b = 4$$

답 ④

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.

<http://cafe.naver.com/2math>

<https://atom.ac/books/5074>

10

[풀이]

$x \rightarrow 1^-$ 일 때, $f(x)$ 는 1보다 작은 값을 가지면서 1에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$$

$x \rightarrow 2^+$ 일 때, $f(x)$ 는 1보다 큰 값을 가지면서 1에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2$$

답 ⑤

11

[풀이]

수열 $\left\{\left(\frac{x}{5}\right)^n\right\}$ 은 첫째항과 공비가 모두 $\frac{x}{5}$ 인 등비수열이다.

등비급수의 수렴 조건에 의하여

$$\frac{x}{5} = 0 \text{ 또는 } -1 < \frac{x}{5} < 1$$

풀면

$$-5 < x < 5$$

이때, 정수 x 가 가질 수 있는 값을 모두 쓰면

$$-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$$

따라서 문제에서 주어진 등비급수가 수렴하도록 하는 모든 정수 x 의 개수는

$$2 \times 4 + 1 = 9$$

답 ⑤

12

[풀이]

두 집합 $A \cap B^C$, $A \cap B$ 에 대하여

$$(A \cap B^C) \cap (A \cap B) = \emptyset,$$

$$(A \cap B^C) \cup (A \cap B) = A$$

이므로 확률의 덧셈정리에 의하여

$$\therefore P(A \cap B^C) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$$

답 ②

13

[풀이]

문제에서 주어진 두 점을 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{\log_2 10 - \log_2 5}{2 - 1} = \log_2 \frac{10}{5} = \log_2 2 = 1$$

(\because 로그의 성질, 로그의 정의)

답 ①

14

[풀이]

이 인공지능 시스템에 고양이 사진을 입력할 사건을 A , 이 인공지능 시스템이 입력된 사진을 고양이 사진으로 인식할 사건을 B 라고 하자.

수학적 확률의 정의에 의하여

$$P(B) = \frac{36}{80}, P(A \cap B) = \frac{32}{80}$$

구하는 조건부 확률은

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{32}{80}}{\frac{36}{80}} = \frac{32}{36} = \frac{8}{9}$$

답 ⑤

[참고]

조건부 확률의 정의를 이용하여 확률을 구할 수도 있다.

(단위: 장)

	인식	고양이 사진(B)	강아지 사진(B^C)	합계
입력				
고양이 사진(A)		32	8	40
강아지 사진(A^C)		4	36	40
합계		36	44	80

조건부 확률의 정의에 의하여

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{32}{36} = \frac{8}{9}$$

15

[풀이]

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 이라고 하자.

$r = 0$ 이라고 가정하자.

문제에서 주어진 두 등식은 각각

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.

<http://cafe.naver.com/2math>

<https://atom.ac/books/5074>

$$0 = 4(0 - a_1), \sum_{k=1}^6 a_k = a_1 = 15$$

각각을 정리하면

$$a_1 = 0, a_1 = 15$$

이는 가정에 모순이다. 따라서 $r \neq 0$ 이다.

$a_1 = 0$ 이라고 가정하자.

문제에서 주어진 두 번째 등식에서

$$\sum_{k=1}^6 a_k = 0 \neq 15$$

이는 가정에 모순이다. 따라서 $a_1 \neq 0$ 이다.

일반항 a_n 은

$$a_n = a_1 r^{n-1} (a_1 \neq 0, r \neq 0)$$

이므로

문제에서 주어진 두 등식은 각각

$$a_1 r^2 = 4a_1 (r-1) \Rightarrow (r-2)^2 = 0 \text{에서 } r = 2$$

$$\sum_{k=1}^6 a_k = \frac{a_1 (r^6 - 1)}{r - 1} = 15 \Rightarrow a_1 = \frac{15}{63}$$

일반항 a_n 은

$$a_n = \frac{15}{63} \times 2^{n-1}$$

세 수 a_1, a_3, a_5 는 이 순서대로 공비가 $4 (= 2^2)$ 인 등비 수열이므로

$$\therefore a_1 + a_3 + a_5 = \frac{a_1 (4^3 - 1)}{4 - 1}$$

$$= \frac{15}{63} \times \frac{63}{3} = 5$$

답 ③

16

[풀이]

점 P의 시간 t 에서의 속도는

$$v(t) = 3t^2 + 2at + b$$

점 P의 시간 t 에서의 가속도는

$$a(t) = 6t + 2a$$

시간 $t = 1$ 에서 점 P가 운동 방향을 바꾸므로

$$v(1) = 3 + 2a + b = 0$$

시간 $t = 2$ 에서 점 P의 가속도가 0이므로

$$a(2) = 12 + 2a = 0$$

a, b 에 대한 연립일차방정식을 풀면

$$a = -6, b = 9$$

$$\therefore a + b = 3$$

답 ①

17

[풀이1]

함수 $f(x)$ 의 도함수는

$$f'(x) = 2ax$$

문제에서 주어진 항등식에 두 함수 $f(x), f'(x)$ 의 방정식을 대입하면

$$4(ax^2 + b) = (2ax)^2 + x^2 + 4$$

정리하면

$$(4a - 4a^2 - 1)x^2 + 4(b - 1) = 0$$

항등식의 필요충분조건에 의하여

$$(2a - 1)^2 = 0, b = 1$$

풀면

$$a = \frac{1}{2}, b = 1$$

함수 $f(x)$ 의 방정식은

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$$

$$\therefore f(2) = 3$$

답 ①

[풀이2]

함수 $f(x)$ 의 도함수는

$$f'(x) = 2ax$$

문제에서 주어진 항등식에 $x = 0$ 을 대입하면

$$4f(0) = (f'(0))^2 + 4$$

$$f(0) = b, f'(0) = 0 \text{이므로}$$

$$4b = 4 \text{ 즉, } b = 1$$

문제에서 주어진 항등식에 $x = 1$ 을 대입하면

$$4f(1) = (f'(1))^2 + 5$$

$$f(1) = a + 1, f'(1) = 2a \text{이므로}$$

$$4a + 4 = 4a^2 + 5$$

정리하면

$$4a^2 - 4a + 1 = 0, (2a - 1)^2 = 0$$

풀면

$$a = \frac{1}{2}$$

함수 $f(x)$ 의 방정식은

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$$

$$\therefore f(2) = 3$$

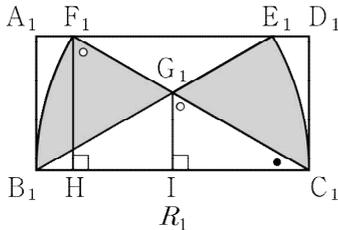
답 ①

18

[풀이]

그림 R_n 에서 새롭게 그려지는  모양의 도형의 넓이를 a_n 이라고 하자.

두 점 F_1, G_1 에서 선분 B_1C_1 에 내린 수선의 발을 각각 H, I 라고 하자.



(단, $\bullet = 30^\circ, \circ = 60^\circ$)

원의 정의에 의하여 $\overline{C_1F_1} = \overline{C_1B_1} = 2$ 이므로

직각삼각형 C_1F_1H 에서 삼각비의 정의에 의하여

$$\sin(\angle HC_1F_1) = \frac{\overline{F_1H}}{\overline{C_1F_1}} = \frac{1}{2}$$

이므로 $\angle HC_1F_1 = 30^\circ$ 이다.

직각삼각형 C_1G_1I 에서 특수각의 삼각비의 정의에 의하여

$$\overline{G_1I} = \overline{C_1I} \times \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

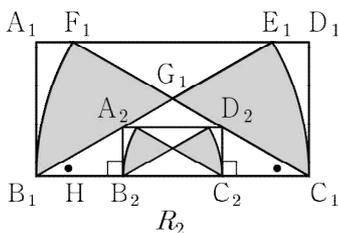
$$\frac{a_1}{2} = (\text{◇} C_1F_1B_1 \text{의 넓이}) - (\text{△} C_1G_1B_1 \text{의 넓이})$$

$$= 4\pi \times \frac{30}{360} - \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$= \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} \text{이므로}$$

$$a_1 = \frac{2\pi}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$\overline{A_2B_2} = x$ 로 두자.



(단, $\bullet = 30^\circ$)

두 직각삼각형 $A_2B_1B_2, D_2C_2C_1$ 에서 특수각의 삼각비의 정의에 의하여

$$\overline{B_1B_2} = \overline{C_2C_1} = \sqrt{3}x$$

이므로

$$\overline{B_1C_1} = \overline{B_1B_2} + \overline{B_2C_2} + \overline{C_2C_1}$$

$$= 2x + 2\sqrt{3}x = 2$$

정리하면

$$x = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

두 직사각형 $A_1B_1C_1D_1, A_2B_2C_2D_2$ 의 닮음비는 $1:x$ 이

므로 넓이의 비는 $1:x^2$ 이다.

$$a_2 = x^2 a_1 = \frac{2-\sqrt{3}}{2} a_1$$

마찬가지의 방법으로 2 이상의 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \frac{2-\sqrt{3}}{2} a_n$$

수열 $\{a_n\}$ 의 귀납적 정의는

$$a_1 = \frac{2\pi}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3}, a_{n+1} = \frac{2-\sqrt{3}}{2} a_n$$

등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{\frac{2\pi}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{2-\sqrt{3}}{2}} = \frac{4\sqrt{3}\pi - 12}{9}$$

답 ②

19

[풀이]

문제에서 주어진 부등식을 변형하면

$$a + 2 < b \leq c + 2$$

표를 이용하여 위의 부등식을 만족시키는 모든 순서쌍 (a, b, c) 를 찾자.

a	b	c
×	1	1, 2, 3, 4, 5, 6
×	2	1, 2, 3, 4, 5, 6
×	3	1, 2, 3, 4, 5, 6
1	4	2, 3, 4, 5, 6
1, 2	5	3, 4, 5, 6
1, 2, 3	6	4, 5, 6

순서쌍 (a, b, c) 의 개수는 곱의 법칙과 합의 법칙에 의하여

$$1 \times 5 + 2 \times 4 + 3 \times 3 = 22$$

구하는 확률은 수학적 확률의 정의에 의하여

$$\frac{22}{6^3} = \frac{11}{108}$$

답 ④

20

[풀이]

음이 아닌 정수 a, b, c, d 가 $2a+2b+c+d=2n$ 을 만족시키려면 음이 아닌 정수 k 에 대하여 $c+d=2k$ 이어야 한다.

($\because c+d=2(n-a-b)$ 이고, $n-a-b$ 는 정수이다.)

$c+d=2k$ 인 경우는 (1) 음이 아닌 정수 k_1, k_2 에 대하여 $c=2k_1, d=2k_2$ 인 경우이거나 (2) 음이 아닌 정수 k_3, k_4 에 대하여 $c=2k_3+1, d=2k_4+1$ 인 경우이다.

(\because 짝수)+(짝수)=(짝수),

(짝수)+(홀수)=(홀수),

(홀수)+(홀수)=(짝수)

이므로, 두 정수의 합이 짝수이면 서로 합하는 두 정수는 모두 짝수이거나 모두 홀수이다.)

(1) $c=2k_1, d=2k_2$ 인 경우:

문제에서 주어진 방정식에 대입하여 정리하면

$$a+b+k_1+k_2=n$$

(단, $a \geq 0, b \geq 0, k_1 \geq 0, k_2 \geq 0$)

방정식 $a+b+k_1+k_2=n$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, k_1, k_2 의 모든 순서쌍 (a, b, k_1, k_2) 의 개수는 a, b, k_1, k_2 중에서 중복을 허용하여 n 개를 택하는 중복조합의 수 ${}_4H_n$ 와 같다. 그러므로 방정식 $2a+2b+c+d=2n$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d 의 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는 ${}_4H_n$ 이다.

이때, ${}_4H_n = {}_{4+n-1}C_n = {}_{n+3}C_3$ 이다.

(2) $c=2k_3+1, d=2k_4+1$ 인 경우:

문제에서 주어진 방정식에 대입하여 정리하면

$$a+b+k_3+k_4=n-1$$

(단, $a \geq 0, b \geq 0, k_3 \geq 0, k_4 \geq 0$)

방정식 $a+b+k_3+k_4=n-1$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, k_3, k_4 의 모든 순서쌍 (a, b, k_3, k_4) 의 개수는 a, b, k_3, k_4 중에서 중복을 허용하여 $n-1$ 개를 택하는 중복조합의 수 ${}_4H_{n-1}$ 와 같다. 그러므로 $2a+2b+c+d=2n$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d 의 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는 ${}_4H_{n-1}$ 이다.

이때, ${}_4H_{n-1} = {}_{4+n-1-1}C_{n-1} = {}_{n+2}C_3$ 이다.

(1), (2)에 의하여 $2a+2b+c+d=2n$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d 의 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수 a_n 은

$$a_n = {}_4H_n + {}_4H_{n-1} = {}_{n+3}C_3 + {}_{n+2}C_3$$

이다. 자연수 m 에 대하여

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^m {}_4H_{n-1} &= \sum_{n=1}^m {}_{n+2}C_3 \\ &= {}_3C_3 + {}_4C_3 + {}_5C_3 + \dots + {}_{m+2}C_3 = {}_{m+3}C_4 \end{aligned}$$

이므로

$$\sum_{n=1}^8 a_n = \sum_{n=1}^8 {}_4H_n + \sum_{n=1}^8 {}_4H_{n-1}$$

$$= \sum_{n=1}^8 {}_{n+3}C_3 + \sum_{n=1}^8 {}_{n+2}C_3$$

$$= 2 \sum_{n=1}^8 {}_{n+2}C_3 + {}_{11}C_3 - {}_3C_3$$

$$= 2 \times {}_{11}C_4 + {}_{11}C_3 - {}_3C_3$$

$$= 660 + 165 - 1$$

$$= \boxed{824}$$

이다.

(가): $f(n) = {}_{n+3}C_3$

(나): $g(n) = {}_{n+2}C_3$

(다): $r = 824$

$$\therefore f(6) + g(5) + r$$

$$= {}_9C_3 + {}_7C_3 + 824 = 84 + 35 + 824 = 943$$

답 ③

21

[풀이]

두 조건 (가), (나)에서

$$f(-1) = -1 + a - b > -1$$

$$f(1) - f(-1) = 2 + 2b > 8$$

정리하면

$$a > b > 3$$

ㄱ. (참)

함수 $f(x)$ 의 도함수는

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라고 하자.

$$D/4 = a^2 - 3b > b^2 - 3b > 0$$

($\because a > b, b > 3$)

따라서 방정식 $f'(x) = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

ㄴ. (거짓)

이차함수 $f'(x)$ 에 대하여

판별식: $D > 0$

$$\text{대칭축: } x = -\frac{a}{3} < -1$$

경계에서의 함숫값:

$$f(-1) = 3 - 2a + b = (3 - a) + (b - a) < 0,$$

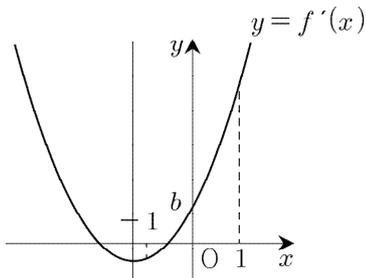
이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.

<http://cafe.naver.com/2math>

<https://atom.ac/books/5074>

$$f(1) = 3 + 2a + b > 0$$

함수 $f'(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



사이값 정리에 의하여

방정식 $f'(x) = 0$ 은 구간 $(-1, 1)$ 에서 실근을 갖는다.

그런데 구간 $(-1, 1)$ 에서 함수 $f'(x)$ 는 증가하므로 실근의 개수는 1이다.

$-1 < x < 1$ 인 모든 실수 x 에 대하여

$$f'(x) \geq 0 \text{인 것은 아니므로}$$

(다시 말하면 $-1 < x < 1$ 에 속하는

어떤 x 에 대하여 $f'(x) < 0$ 이므로)

보기 ㄴ에서 주어진 명제는 거짓이다.

ㄷ. (참)

문제에서 주어진 방정식을 쓰면

$$x^3 + ax^2 + bx - x(3k^2 + 2ak + b) = 0$$

\Leftrightarrow

$$x = 0$$

또는

$$x^2 + ax - 3k^2 - 2ak = 0 \quad \dots (*)$$

만약 이차방정식 (*)이 모두 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가지면 문제에서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 3이다. 만약 이차방정식 (*)이 서로 다른 두 허근을 가지면 문제에서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 1이다. 따라서 다음의 두 경우가 가능하다. (\leftarrow 귀류법)

(1) 이차방정식 (*)이 서로 다른 두 실근을 갖는 경우 (단, 0을 실근으로 갖는다.)

(*)에 $x = 0$ 을 대입하여 정리하면

$$k(3k + 2a) = 0 \text{ 풀면 } k = 0 \text{ 또는 } k = -\frac{2a}{3}$$

$k = 0$ 을 (*)에 대입하여 정리하면

$$x^2 + ax = 0 \text{ 풀면 } x = 0 \text{ 또는 } x = -a (\neq 0)$$

이때, 문제에서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

$$k = -\frac{2a}{3} \text{을 (*)에 대입하여 정리하면}$$

$$x^2 + ax = 0 \text{ 풀면 } x = 0 \text{ 또는 } x = -a (\neq 0)$$

이때, 문제에서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

(2) 이차방정식 (*)이 중근을 갖는 경우 (단, 0을 실근으

로 갖지 않는다.)

이차방정식 (*)의 판별식을 D 라고 하자.

$$D = a^2 - 4(-3k^2 - 2ak) = 0$$

정리하면

$$12k^2 + 8ak + a^2 = 0, (2k + a)(6k + a) = 0$$

풀면

$$k = -\frac{a}{2} \text{ 또는 } k = -\frac{a}{6}$$

이때, $-\frac{a}{2}$ 와 $-\frac{a}{6}$ 은 0 또는 $-\frac{2a}{3}$ 일 수 없다.

(1), (2)에서

$$k = 0, k = -\frac{2a}{3}, k = -\frac{a}{2}, k = -\frac{a}{6}$$

따라서 실수 k 의 개수는 4이다.

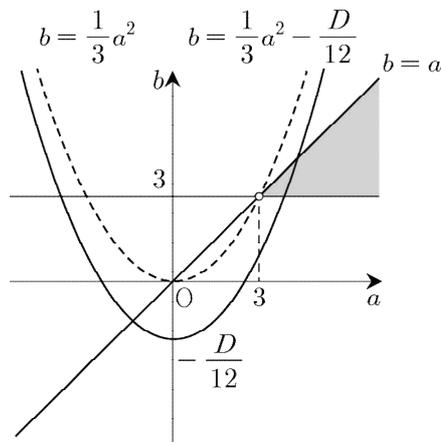
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

[참고1]

보기 ㄱ이 참임을 다음과 같이 증명할 수도 있다.

부등식의 영역 $b > a > 3$ 을 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.



(단, 경계는 제외한다.)

이차함수 $b = \frac{1}{3}a^2 - \frac{D}{12}$ 의 그래프는 위의 그림에서 색칠된 영역을 지나므로 이 이차함수의 y 절편은 0보다 작다.

$$-\frac{D}{12} < 0 \text{에서 } D > 0$$

따라서 이차방정식 $f'(x) = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

[참고2]

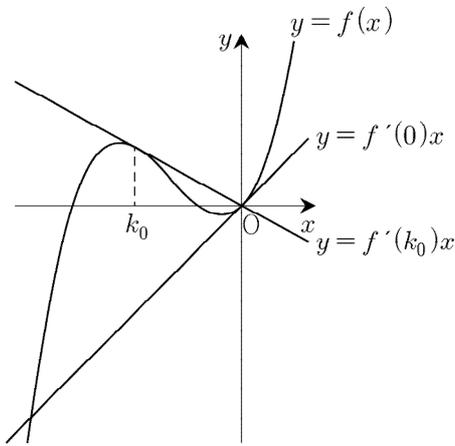
보기 ㄷ이 참임을 다음과 같이 증명할 수도 있다.

원점을 지나는 직선 $y = f'(k)x$ 와 곡선 $y = f(x)$ 의 교점의 개수가 2가 되도록 직선과 곡선을 그리면 다음과 같다.

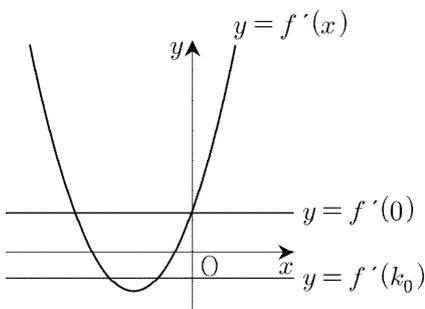
이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.

<http://cafe.naver.com/2math>

<https://atom.ac/books/5074>



곡선 $y=f(x)$ 와 두 직선 $y=f'(0)$, $y=f'(k_0)$ 의 위치관계는 다음과 같다.



곡선 $y=f'(x)$ 와 두 직선 $y=f'(0)$, $y=f'(k_0)$ 의 교점의 개수는 모두 2이고, 4개의 교점의 x좌표는 모두 다르다.

따라서 문제에서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 k 의 개수는 4이다.

22

[풀이]

$${}_8P_2 = 8 \times 7 = 56$$

답 ④

23

[풀이]

함수 $f(x)$ 의 도함수는

$$f'(x) = 3x^2 - 4x$$

$$\therefore f'(3) = 15$$

답 15

24

[풀이1]

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라고 하자.

일반항 a_n 은 $a_n = a_1 + (n-1)d$ 이므로

$$a_5 = a_1 + 4d = 5, \quad a_{15} = a_1 + 14d = 25$$

a_1, d 에 대한 연립일차방정식을 풀면

$$a_1 = -3, \quad d = 2$$

일반항 a_n 은 $a_n = 2n - 5$ 이므로

$$a_{20} = 2 \times 20 - 5 = 35$$

답 35

[풀이2]

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라고 하자.

네 수 $a_5, a_{10}, a_{15}, a_{20}$ 은 이 순서대로 공차가 $5d$ 인 등차수열을 이룬다.

등차중앙의 정의에 의하여

$$2a_{10} = a_5 + a_{15}$$

$$\text{즉, } 2a_{10} = 5 + 25 \text{에서 } a_{10} = 15$$

등차중앙의 정의에 의하여

$$2a_{15} = a_{10} + a_{20}$$

$$\text{즉, } 2 \times 25 = 15 + a_{20} \text{에서}$$

$$\therefore a_{20} = 35$$

답 35

25

[풀이]

$$11 = 3 + 3 + 3 + 1 + 1$$

$$= 3 + 3 + 5$$

$$= 3 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

따라서 방법의 수는 3이다.

(즉, 자연수 5를 홀수인 자연수로 분할하는 수와 같다.)

답 3

26

[풀이]

$$(1+2x)(1+x)^5$$

$$= (1+x)^5 + 2x(1+x)^5$$

$(1+x)^5$ 의 전개식에서 x^3, x^4 의 계수는 각각

$${}_5C_3, \quad {}_5C_4$$

이므로, 문제에서 주어진 다항식의 전개식에서 x^4 의 계수는

$${}_5C_4 + 2{}_5C_3 = {}_5C_1 + 2{}_5C_2 = 5 + 2 \times 10 = 25$$

답 25

[참고]

다음과 같은 식 변형도 가능하다.

$$(1+2x)(1+x)^5 = \{(1+x)^2 - x^2\}(1+x)^5$$

$$= (1+x)^7 - x^2(1+x)^5$$

$$x^4 \text{의 계수는 } {}_7C_4 - {}_5C_2 = {}_7C_3 - {}_5C_2 = 25$$

$$(1+2x)(1+x)^5 = (1+x+x)(1+x)^5$$

$$= (1+x)^6 + x(1+x)^5$$

$$x^4 \text{의 계수는 } {}_6C_4 + {}_5C_3 = {}_6C_2 + {}_5C_2 = 25$$

27

[풀이]

조건 (나)에서 주어진 식을 정리하자.

$$A \cap (A^c \cup B) = (A \cap A^c) \cup (A \cap B)$$

$$= \emptyset \cup (A \cap B) = A \cap B \neq \emptyset \text{ 이므로}$$

$n(A \cap B) \geq 1$ 이다.

$$n(B - A) = n(U) - n(A - B) - n(A \cap B)$$

$$= 25 - 11 - n(A \cap B) (\because \text{조건(가), (다)})$$

$$\leq 13$$

(단, 등호는 $n(A \cap B) = 1$ 일 때 성립한다.)

따라서 구하는 값은 13이다.

답 13

28

[풀이]

이차방정식 $f(x) = 0$ 이 서로 다른 두 허근을 갖는다고 가정하자.

모든 실수 x 에 대하여

$$f(x) > 0 \quad (\leftarrow \text{최고차항의 계수가 양수인 경우})$$

또는

$$f(x) < 0 \quad (\leftarrow \text{최고차항의 계수가 음수인 경우})$$

이므로 조건 (가)에서 주어진 함수는 실수 전체의 집합에서 연속이다. 이는 가정에 모순이다.

이차방정식 $f(x) = 0$ 가 중근을 갖는다고 하자.

인수정리에 의하여

$$f(x) = k(x - \alpha)^2 \text{ (단, } k \text{는 } 0 \text{이 아닌 상수)}$$

조건 (가)에서 주어진 함수는

$$y = \frac{x}{k(x - \alpha)^2}$$

$\alpha = 0$ 이면 $y = \frac{1}{kx}$ 이므로, 이 함수는 $x = 0$ 에서만 불연속이다. (\because 함수가 $x = 0$ 에서 정의되지 않기 때문이다.)

$\alpha \neq 0$ 이면 이 함수는 $x = \alpha$ 에서만 불연속이다. (\because 함수가 $x = \alpha$ 에서 정의되지 않기 때문이다.)

정리하면 이 함수는 $x = \alpha$ 에서만 불연속이다. 이는 가정에 모순이다.

따라서 이차방정식 $f(x) = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

인수정리에 의하여

$$f(x) = k(x - \beta)(x - \gamma)$$

(단, k 는 0이 아닌 상수, $\beta < \gamma$)

조건 (가)에서 주어진 함수는

$$y = \frac{x}{k(x - \beta)(x - \gamma)}$$

$\beta = 0$ 이면 $y = \frac{1}{k(x - \gamma)}$ 이므로, 이 함수는 $x = \gamma$ 에서만 불연속이다. (\because 함수가 $x = \gamma$ 에서 정의되지 않기 때문이다.)

$\gamma = 0$ 이면 $y = \frac{1}{k(x - \beta)}$ 이므로, 이 함수는 $x = \beta$ 에서만 불연속이다. (\because 함수가 $x = \beta$ 에서 정의되지 않기 때문이다.)

이는 가정에 모순이다. 따라서 $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$ 이다.

이 함수는 $x = \beta$, $x = \gamma$ 에서 불연속이므로 $\beta = 1$, $\gamma = 2$ 이다.

함수 $f(x)$ 의 방정식은

$$f(x) = k(x - 1)(x - 2)$$

조건 (나)에서 함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} k(x - 1) = k = 4$$

함수 $f(x)$ 의 방정식은

$$f(x) = 4(x - 1)(x - 2)$$

$$\therefore f(4) = 24$$

답 24

29

[풀이1]

좌표평면에서 점 (p, q) 가 두 곡선 $y = f(x)$,

$y = f^{-1}(x)$ 의 교점이라고 하자.

$$f(p) = q, f^{-1}(p) = q$$

역함수의 성질에 의하여

$$f^{-1}(q) = p, f(q) = p$$

이므로 점 (q, p) 는 두 곡선 $y = f(x)$, $y = f^{-1}(x)$ 의 교점이다.

따라서 곡선 $y = f(x)$ 는 두 점 (p, q) , (q, p) 를 모두 지난다. 이때, 두 점 (p, q) , (q, p) 는 직선 $y = x$ 에 대하여 서로 대칭이다.

$p = q$ 인 경우: 두 곡선 $y = f(x)$, $y = f^{-1}(x)$ 의 교점은

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.

<http://cafe.naver.com/2math>

<https://atom.ac/books/5074>

직선 $y = x$ 위에 있다.

$p \neq q$ 인 경우: 두 곡선 $y = f(x)$, $y = f^{-1}(x)$ 의 교점은 기울기가 -1 인 직선 위에 있다.

이제 다음의 두 경우를 생각할 수 있다.

(1) 3개의 교점이 모두 직선 $y = x$ 위에 있는 경우
문제에서 주어진 함수의 방정식에서

$$f(-1) = -a + b = -1$$

$$f(1) = c + \frac{5}{2} = 1 \text{ 즉, } c = -\frac{3}{2}$$

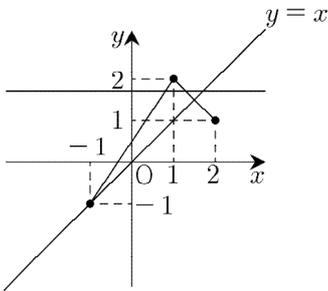
$$f(2) = 4c + 5 = 2 \text{ 즉, } c = -\frac{3}{4}$$

연립방정식의 해가 존재하지 않으므로 이는 가정에 모순이다.

따라서 3개의 교점이 모두 직선 $y = x$ 위에 있을 수 없다.

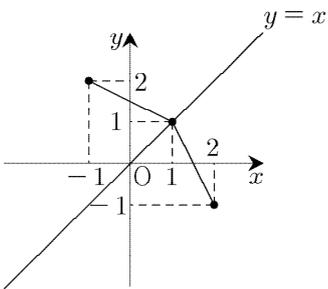
(2) 3개의 교점 중에서 하나는 직선 $y = x$ 위에 있고, 나머지 두 개는 기울기가 -1 인 직선 위에 있는 경우
다음의 세 경우로 나누어진다.

• 점 $(-1, -1)$ 이 직선 $y = x$ 위에 있는 경우



함수 $f(x)$ 는 일대일대응이 아니므로, 역함수를 갖지 못한다.

• 점 $(1, 1)$ 이 직선 $y = x$ 위에 있는 경우



함수 $f(x)$ 는 일대일대응(감소함수)이므로, 역함수를 갖는다.

문제에서 주어진 함수 $f(x)$ 의 방정식에서

$$f(-1) = -a + b = 2 \quad \dots \textcircled{A}$$

$$f(1) = c + \frac{5}{2} = 1 \text{ 즉, } c = -\frac{3}{2} \quad \dots \textcircled{B}$$

$$f(2) = 4c + 5 = -1 \text{ 즉, } c = -\frac{3}{4}$$

함수 $f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 연속이어야 하므로

함수의 연속의 정의에 의하여

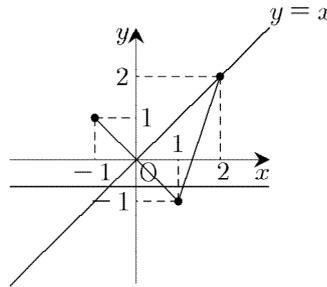
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = a + b = c + \frac{5}{2} = f(1)$$

$$\text{즉, } a + b = c + \frac{5}{2} \quad \dots \textcircled{C}$$

\textcircled{A} , \textcircled{B} , \textcircled{C} 을 연립하면

$$a = -\frac{1}{2}, \quad b = \frac{3}{2}, \quad c = -\frac{3}{2}$$

• 점 $(2, 2)$ 가 직선 $y = x$ 위에 있는 경우



함수 $f(x)$ 는 일대일대응이 아니므로, 역함수를 갖지 못한다.

이상에서

$$a = -\frac{1}{2}, \quad b = \frac{3}{2}, \quad c = -\frac{3}{2}$$

$$\therefore 2a + 4b - 10c = -1 + 6 + 15 = 20$$

답 20

[풀이2]

함수 $f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 연속이어야 하므로
함수의 연속의 정의에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = a + b = c + \frac{5}{2} = f(1)$$

$$\text{즉, } a + b = c + \frac{5}{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

연속함수 $f(x)$ 가 역함수를 가지므로

함수 $f(x)$ 는 증가함수 또는 감소함수이다.

(\Leftrightarrow 함수 $f(x)$ 는 일대일대응이다.)

구간 $[1, \infty)$ 에서 함수 $f(x)$ 는

$$c = 0 \text{ 이면 } f(x) = \frac{5}{2}x \text{ (← 일차함수)}$$

$$c \neq 0 \text{ 이면 } f(x) = c \left(x + \frac{5}{4c} \right)^2 - \frac{25}{16c} \text{ (← 이차함수)}$$

이때, 이차함수의 대칭축은 $x = -\frac{5}{4c}$ 이다.

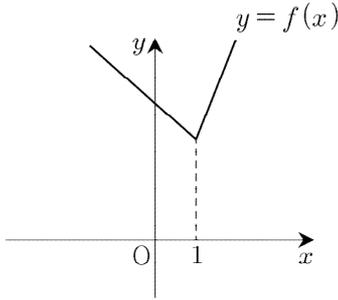
(1) $c = 0$ 인 경우

$$c = 0 \text{ 을 } \textcircled{1} \text{ 에 대입하면 } b = \frac{5}{2} - a \text{ 이므로}$$

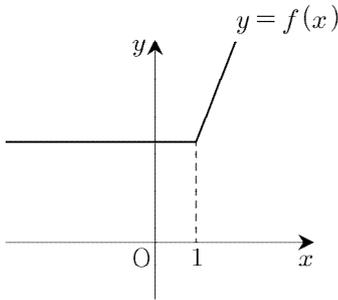
함수 $f(x)$ 의 방정식은

$$f(x) = \begin{cases} a(x-1) + \frac{5}{2} & (x < 1) \\ \frac{5}{2}x & (x \geq 1) \end{cases}$$

$a < 0$ 일 때, 함수 $f(x)$ 의 그래프는

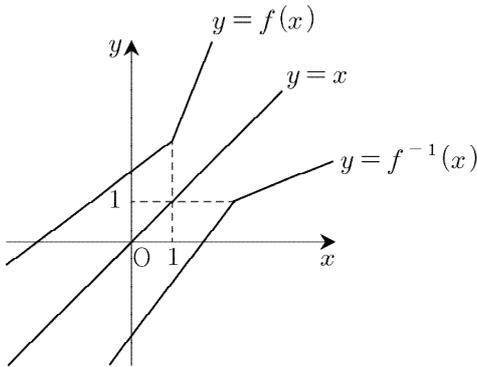


함수 $f(x)$ 는 일대일대응이 아니므로
 함수 $f(x)$ 는 역함수를 갖지 않는다.
 $a = 0$ 일 때, 함수 $f(x)$ 의 그래프는

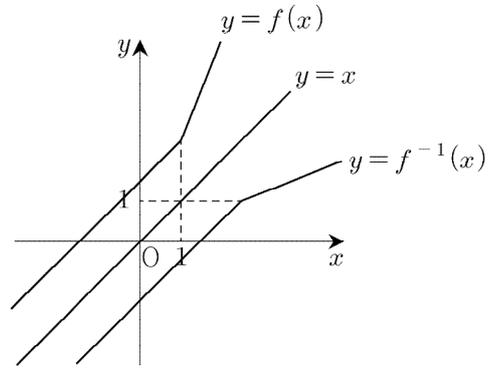


함수 $f(x)$ 는 일대일대응이 아니므로
 함수 $f(x)$ 는 역함수를 갖지 않는다.

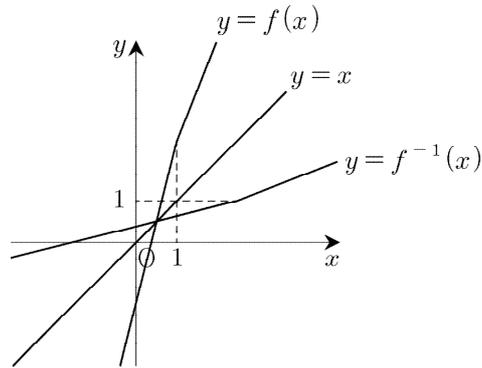
$0 < a < 1$ 일 때, 두 함수 $f(x), f^{-1}(x)$ 의 그래프는



두 함수 $f(x), f^{-1}(x)$ 의 그래프는 만나지 않는다.
 $a = 1$ 일 때, 두 함수 $f(x), f^{-1}(x)$ 의 그래프는



두 함수 $f(x), f^{-1}(x)$ 의 그래프는 만나지 않는다.
 $a > 1$ 일 때, 두 함수 $f(x), f^{-1}(x)$ 의 그래프는

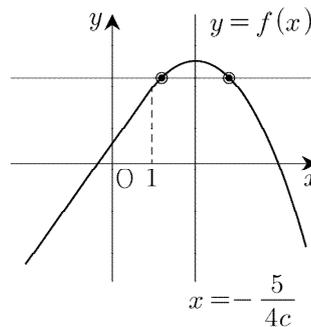


두 함수 $f(x), f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점의 개수는 1
 ($\neq 3$)이므로 문제에서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.
 따라서 $c \neq 0$ 이고, $f(x)$ 는 이차함수이다. (\leftarrow 귀류법)

(2) $c \neq 0$ 인 경우

$$-\frac{5}{4c} > 1 \text{ 즉, } -\frac{5}{4} < c < 0 \text{ 일 때,}$$

함수 $f(x)$ 의 그래프는



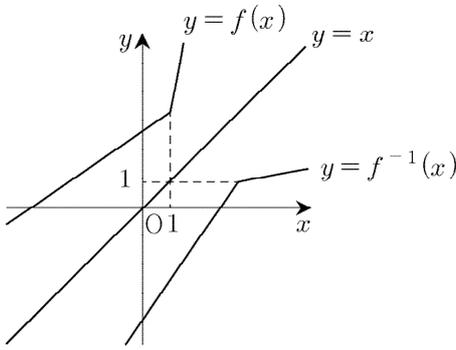
함수 $f(x)$ 는 일대일대응이 아니므로
 함수 $f(x)$ 는 역함수를 갖지 않는다.

따라서 $c \leq -\frac{5}{4}$ 또는 $c > 0$ 이다.

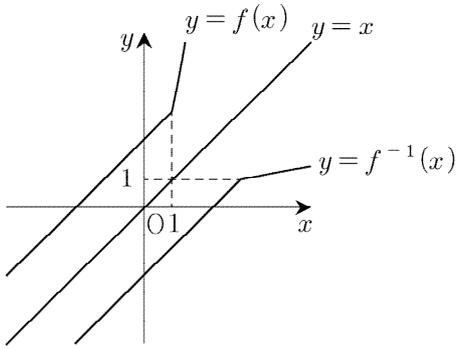
• $c > 0$ 인 경우

함수 $f(x)$ 는 증가함수여야 하므로 $a > 0$ 이다.

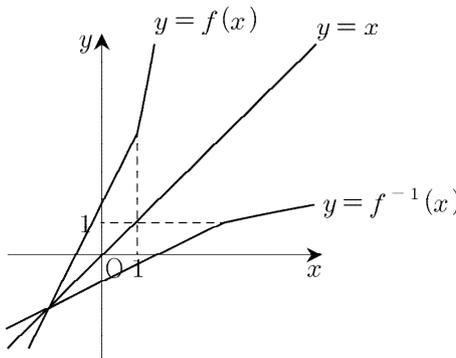
$0 < a < 1$ 일 때, 두 함수 $f(x), f^{-1}(x)$ 의 그래프는



두 함수 $f(x)$, $f^{-1}(x)$ 의 그래프는 만나지 않는다.
 $a=1$ 일 때, 두 함수 $f(x)$, $f^{-1}(x)$ 의 그래프는



두 함수 $f(x)$, $f^{-1}(x)$ 의 그래프는 만나지 않는다.
 $a > 1$ 일 때, 두 함수 $f(x)$, $f^{-1}(x)$ 의 그래프는



두 함수 $f(x)$, $f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점의 개수는 1 ($\neq 3$)이므로 문제에서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

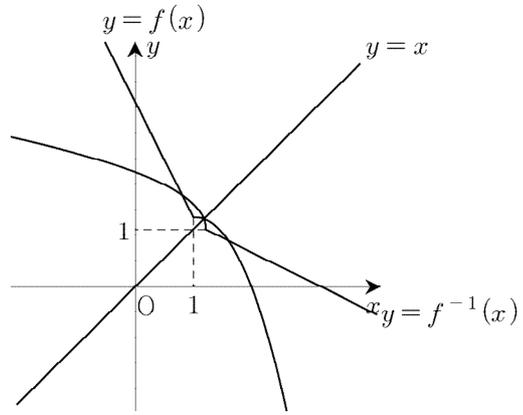
따라서 $c \leq -\frac{5}{4}$ 이다.

• $c \leq -\frac{5}{4}$ 인 경우

함수 $f(x)$ 는 감소함수여야 하므로 $a < 0$ 이다.

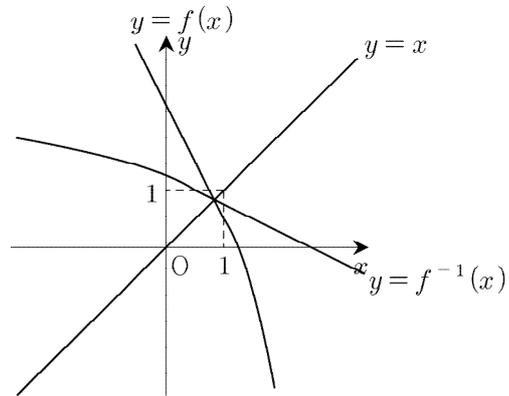
(경우1) 두 함수 $f(x)$, $f^{-1}(x)$ 의 교점 중에서 x 좌표가 1인 점이 존재하지 않는 경우 (즉, $f(1) \neq 1$ 인 경우)

$c = -\frac{5}{4}$ 일 때, 두 함수 $f(x)$, $f^{-1}(x)$ 의 그래프는



교점 중에서 x 좌표가 1인 점은 없다.

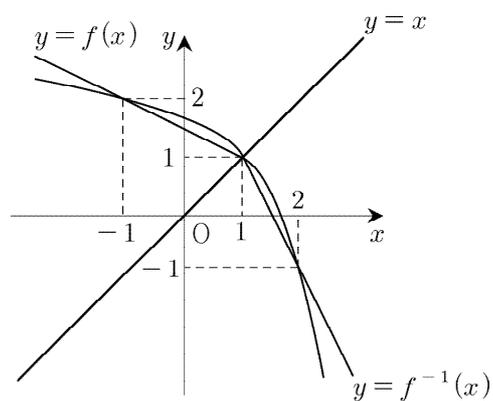
$c < -\frac{5}{4}$ 이고 $c \neq -\frac{3}{2}$ 일 때, 두 함수 $f(x)$, $f^{-1}(x)$ 의 그래프는



교점 중에서 x 좌표가 1인 점은 없다.

(경우2) 두 함수 $f(x)$, $f^{-1}(x)$ 의 교점 중에서 x 좌표가 1인 점이 존재하는 경우 (즉, $f(1) = 1$ 인 경우)

$c = -\frac{3}{2}$ 일 때, 두 함수 $f(x)$, $f^{-1}(x)$ 의 그래프는



교점 중에서 x 좌표가 1인 점이 있다.

문제에서 원하는 경우는 (경우2)이다.

$c = -\frac{3}{2}$ 을 ㉠에 대입하면 $a + b = 1 \dots \text{㉡}$

함수 $f(x)$ 의 방정식은

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & (x < 1) \\ -\frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x & (x \geq 1) \end{cases}$$

세 교점의 좌표를 모두 쓰면

$$(-1, -a+b), (1, 1), (2, -1)$$

이때, 두 점 $(-1, -a+b), (2, -1)$ 은 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로

$$-a + b = 2 \quad \dots \textcircled{C}$$

$\textcircled{C}, \textcircled{E}$ 을 연립하면

$$a = -\frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}$$

$$\therefore 2a + 4b - 10c = -1 + 6 + 15 = 20$$

답 20

30

[풀이]

보기 (가)에서 주어진 등식에서

$$n = 1 \text{ 일 때, } f(1) = f(1)f(2) \quad \dots \textcircled{A}$$

$n \geq 2$ 일 때,

$$\sum_{k=1}^n f(k) = f(n)f(n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) = f(n-1)f(n)$$

위의 두 등식을 변변히 빼면

$$f(n) = f(n)\{f(n+1) - f(n-1)\}$$

(단, $n \geq 2$)

정리하면

$$f(n) = 0 \text{ 또는 } f(n+1) - f(n-1) = 1$$

(단, $n \geq 2$)

n 에 2, 3, 4, 5를 대입하면 각각

$$f(2) = 0 \text{ 또는 } f(3) - f(1) = 1 \quad \dots \textcircled{A}$$

$$f(3) = 0 \text{ 또는 } f(4) - f(2) = 1 \quad \dots \textcircled{B}$$

$$f(4) = 0 \text{ 또는 } f(5) - f(3) = 1 \quad \dots \textcircled{C}$$

$$f(5) = 0 \text{ 또는 } f(6) - f(4) = 1 \quad \dots \textcircled{D}$$

조건 (나)에 의하여

$$\frac{f(5) - f(3)}{5 - 3} \leq 0 \text{ 즉, } f(5) - f(3) \leq 0$$

이므로 \textcircled{C} 에서 $f(4) = 0$ 일 수 밖에 없다.

조건 (나)에 의하여

$$\frac{f(6) - f(4)}{6 - 4} \leq 0 \text{ 즉, } f(6) - f(4) \leq 0$$

이므로 \textcircled{D} 에서 $f(5) = 0$ 일 수 밖에 없다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

$$f(1) = 0 \text{ 또는 } f(2) = 1 \quad \dots \textcircled{A}$$

$$f(2) = 0 \text{ 또는 } f(3) - f(1) = 1 \quad \dots \textcircled{B}$$

$$f(3) = 0 \text{ 또는 } f(2) = -1 \quad \dots \textcircled{C}$$

$$f(4) = 0 \quad \dots \textcircled{B}$$

$$f(5) = 0 \quad \dots \textcircled{D}$$

(1) $f(1) = 0$ 인 경우

$$\textcircled{C}: f(2) = 0 \text{ 또는 } f(3) = 1$$

$f(2) = 0$ 이면 \textcircled{C} 에서 $f(3) = 0$ 이다.

그런데

$$f(1) = f(2) = f(3) = f(4) = f(5) = 0$$

을 만족시키는 사차함수 $f(x)$ 는 존재하지 않는다.

이는 가정에 모순이다.

따라서 \textcircled{C} 에서 $f(2) \neq 0, f(3) = 1$ 이다.

$$f(3) = 1 \text{ 이면 } \textcircled{B} \text{에서 } f(2) = -1$$

이상을 정리하면

$$f(1) = f(4) = f(5) = 0, f(2) = -1, f(3) = 1$$

$f(2)f(3) < 0$ 이므로 사이값 정리에 의하여

방정식 $f(x) = 0$ 은 구간 $(2, 3)$ 에서 적어도 하나 이상의 실근을 갖는다.

그런데 사차방정식 $f(x) = 0$ 의 서로 다른 실근의 최대개수는 4이므로 방정식 $f(x) = 0$ 은 구간 $(2, 3)$ 에서 오직 하나의 실근을 갖는다. 이 실근을 α 라고 하자.

인수정리에 의하여 함수 $f(x)$ 의 방정식을

$$f(x) = k(x-1)(x-4)(x-5)(x-\alpha)$$

(단, k 는 0이 아닌 상수, $2 < \alpha < 3$)

$$f(2) = 6k(2-\alpha) = -1,$$

$$f(3) = 4k(3-\alpha) = 1$$

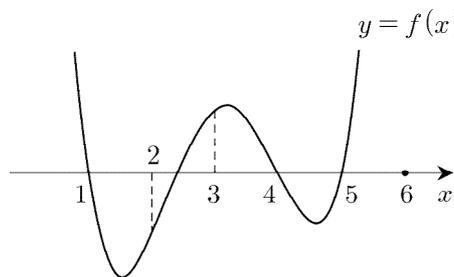
연립하면

$$k = \frac{5}{12}, \alpha = \frac{12}{5}$$

함수 $f(x)$ 의 방정식은

$$f(x) = \frac{5}{12}(x-1)(x-4)(x-5)\left(x - \frac{12}{5}\right)$$

함수 $f(x)$ 의 그래프는



위의 그래프에서 두 점 $(4, f(4)), (6, f(6))$ 을 잇는 직선의 기울기는 양수이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(2) $f(2) = 1$ 인 경우

\textcircled{C} 에서 $f(3) = 0$ 이고,

$$\textcircled{B} \text{에서 } f(1) = f(3) - 1 = -1$$

이상을 정리하면

$$f(1) = -1, f(2) = 1,$$

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.

$$f(3) = f(4) = f(5) = 0$$

$f(1)f(2) < 0$ 이므로 사이값 정리에 의하여

방정식 $f(x) = 0$ 은 구간 $(1, 2)$ 에서 적어도 하나 이상의 실근을 갖는다.

그런데 사차방정식 $f(x) = 0$ 의 서로 다른 실근의 최대개수는 4이므로 방정식 $f(x) = 0$ 은 구간 $(1, 2)$ 에서 오직 하나의 실근을 갖는다. 이 실근을 β 라고 하자.

인수정리에 의하여 함수 $f(x)$ 의 방정식을

$$f(x) = k(x-3)(x-4)(x-5)(x-\beta)$$

(단, k 는 0이 아닌 상수, $1 < \beta < 2$)

$$f(1) = -24k(1-\beta) = -1,$$

$$f(2) = -6k(2-\beta) = 1$$

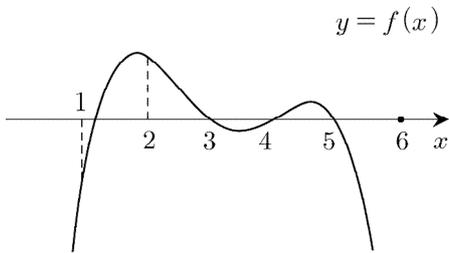
연립하면

$$k = -\frac{5}{24}, \quad \beta = \frac{6}{5}$$

함수 $f(x)$ 의 방정식은

$$f(x) = -\frac{5}{24}(x-3)(x-4)(x-5)\left(x - \frac{6}{5}\right)$$

함수 $f(x)$ 의 그래프는



$$\therefore 128 \times f\left(\frac{5}{2}\right) = 65$$

답 65

[참고]

조건 (가), (나)에서 아래의 표를 얻을 수 있다.

(← 발견적 추론)

$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$	$f(4)$	$f(5)$	$f(6)$
0	0	0	0	$\neq 0$	1
0	0	0	$f(4)$	1	$f(4) + 1$
0	0	-1	1	0	$f(6)$
0	0	$\neq -1$	1	$\neq 0$	2
0	-1	1	0	0	$f(6)$
0	-1	1	0	$\neq 0$	1
0	$\neq -1$	1	$\neq 0$	2	$f(2) + 2$
-1	1	0	0	0	$f(6)$
-1	1	0	0	$\neq 0$	1
-1	1	0	$f(4)$	1	$f(4) + 1$
-2	1	-1	2	0	$f(6)$
$\neq -2$	1	$f(1) + 1$	2	$\neq 0$	3

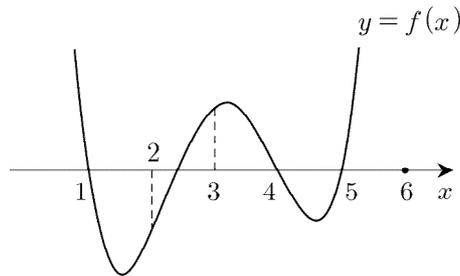
경우1

경우2

(경우1)에서 함수 $f(x)$ 의 방정식은

$$f(x) = \frac{5}{12}(x-1)(x-4)(x-5)\left(x - \frac{12}{5}\right)$$

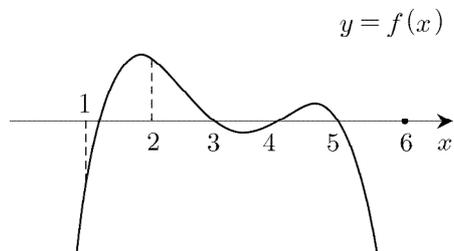
함수 $f(x)$ 의 그래프는



(경우2)에서 함수 $f(x)$ 의 방정식은

$$f(x) = -\frac{5}{24}(x-3)(x-4)(x-5)\left(x - \frac{6}{5}\right)$$

함수 $f(x)$ 의 그래프는



이 중에서 (경우2)만이 문제에서 주어진 모든 조건을 만족시킨다.

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.

<http://cafe.naver.com/2math>

<https://atom.ac/books/5074>