

제 2 교시

수학 영역 (가)형

성명		수험 번호												
----	--	-------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

2019 수능대비 ebs 수능완성(수학 가) p151 33번 8050-0391

좌표공간에서 구 $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2z - 20 = 0$ 이 평면 $x + 2y - 2z + k = 0$ 과 만날 때 생기는 원 위의 서로 다른 네 점 P, Q, R, S 와 구의 중심 C에 대하여 $\overline{PQ} = 6$ 이고 $(\overline{RP} + \overline{CR}) \cdot (\overline{SQ} + \overline{CS})$ 가 최솟값을 갖도록 하는 양수 k의 값은?

수완 해설 풀이

$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2z - 20 = 0$ 에서

$(x+2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 25$

이므로 구의 중심은 C(-2, 0, 1), 반지름의 길이는 5 이다.

$(\overline{RP} + \overline{CR}) \cdot (\overline{SQ} + \overline{CS}) = \overline{CP} \cdot \overline{CQ}$

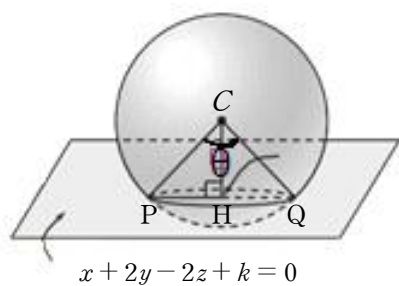
즉, $\overline{CP} \cdot \overline{CQ} = |\overline{CP}| \times |\overline{CQ}| \times \cos \theta$

$= 25 \cos \theta \dots\dots \textcircled{1}$

$\overline{PQ} = 6$ 이고, $\textcircled{1}$ 에서 $(\overline{RP} + \overline{CR}) \cdot (\overline{SQ} + \overline{CS})$ 가 최솟값을 가지려면 $\cos \theta$ 가 최솟값을 가질 때 이므로 $0 < \theta < \pi$ 에서 θ 의 값이 최대 이어야 한다.

따라서 구 $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2z - 20 = 0$ 이 평면 $x + 2y - 2z + k = 0$ 에 의해 잘린 단면 (원)의 지름의 양끝 점이 P, Q 일 때 θ 의 값이 최대가 된다.

(그림)



그림과 같이 구의 중심 C(-2, 0, 1)에서 평면 $x + 2y - 2z + k = 0$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{CH} = \frac{|-2+0-2+k|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}} = \frac{|k-4|}{3}$

$\overline{PQ} = 6$ 이므로 $\overline{PH} = 3$

직각삼각형 CHP에서 $\overline{CP} = 5$ 이므로 $\overline{CH} = 4$

즉, $\frac{|k-4|}{3} = 4$ 에서 $|k-4| = 12$

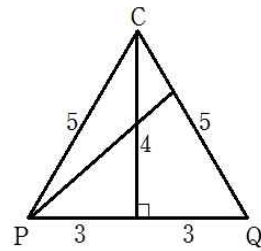
$k > 0$ 이므로 $k = 16$

But

$\overline{PQ} = 6$ 이고 구 $(x+2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 25$ 의 반지름이 5 로

이미 정해져 있다.

즉, 평면에 의해 잘린 단면(원) 기준이 아니라 P, Q가 구 위에 있다는 사실이 중요한 것이다.



즉, 길이가 정해져 있는데 $(\overline{RP} + \overline{CR}) \cdot (\overline{SQ} + \overline{CS}) = \overline{CP} \cdot \overline{CQ}$ 의

값은 $|\overline{CQ}| \times |\overline{CP}| \cos \theta = 5 \times \frac{7}{5} = 7$ 이다.

최솟값을 가질 때?? 헛 소리이다..

아마 집필진들의 출제 의도는 이거였을 것이다.

$\overline{CP} \cdot \overline{CQ}$ 가 최소가 되는 θ 를 찾아내는 것,

이 때, 단면(원) 위에서 점 P, Q가 어디에 있어야 하는지를,

$\overline{PQ} = 6$ 을 통해 단면(원)의 반지름이 3인 것을 알아내는 것

그런데 사실 θ 는 $\cos \theta = \frac{7}{25}$ 를 갖는 고정된 값 이라는 것을 간과한 것이다!

따라서 이 문항의 설정은 명백한 오류이다.