자이고사 2회

수학 영역 (가형) 해설

★ 1페이지 ★

1.  ②

2. $=\cos\pi=-1$. ①

3. $=\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}\times 2}=e^2$. ⑤

4. $\mathrm{P}(\mathrm{A})=\frac{3}{4}$, $\mathrm{P}(\mathrm{B})=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(\mathrm{B}^C)=\frac{3}{4}$. ④

5. 포물선의 준선은 $x=-1$이므로 점 P에서 준선까지의 거리는 8. ④

6. 진수조건으로 $x-1\neq 0$이고 $(x-1)^2\leq 4$에서 $-1\leq x\leq 3$이므로 $x=-1, 0, 2, 3$. ③

7. A와 B의 중점 $\mathrm{M}\left(-\frac{1}{2}, \frac{a+2}{2}, 0\right)$에서 $a=-2$일 때 M은 x축 위에 있다. ①

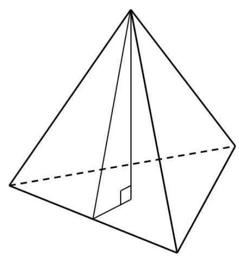
★ 2페이지 ★

8. $=\Big[\ x\sin x\ \Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\frac{\pi}{2}-1$. ⑤

9. $\mathrm{E}(\mathrm{X})=18\times\frac{1}{3}=6$, $\mathrm{V}(\mathrm{X})=\mathrm{E}(\mathrm{X})\times\frac{2}{3}=4$, $\mathrm{E}(\mathrm{X}^2)=\mathrm{V}(\mathrm{X})+\{\mathrm{E}(\mathrm{X})\}^2=40$. ⑤

10. $f(1)=3$이고 $f'(x)=5x^4+1$에서 $f'(1)=6$이므로 $g'(3)=\frac{1}{6}$. ②

11. 오른쪽에서 직각삼각형의 (빗변)$=3x$라 하면 (가까운 변)$=x$, (먼 변)$=2\sqrt{2}x$이므로 $\tan\theta=2\sqrt{2}$. ③



12. $\int_1^9 x^{-\frac{1}{2}}dx = \left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_1^9 = 6-2=4$. ④

★ 3페이지 ★

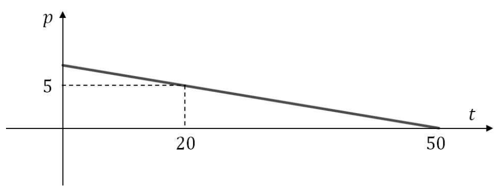
13. 모서리 1개를 임의로 골랐을 때, 나머지 11개의 모서리 중 꼬인 위치에 있는 모서리는 4개이다. ③

14. 타원의 중심이 $(0, 2)$이므로 타원의 두 초점 사이 거리는 4, 장축의 길이는 6이다. 따라서 단축의 길이는 $\sqrt{6^2-4^2}=2\sqrt{5}$이며, $a=\left(2\sqrt{5}\times\frac{1}{2}\right)^2=5$, $b=\left(6\times\frac{1}{2}\right)^2=9$이다.
한편 쌍곡선의 중심이 $(0, -2)$이므로 쌍곡선의 두 초점 사이 거리는 4, 주축의 길이는 2이다. 따라서 $c+d=\left(4\times\frac{1}{2}\right)^2$이고 $d=\left(2\times\frac{1}{2}\right)^2=1$이므로 $c=3$이다.
$\therefore a+b+c+d=5+9+3+1=18$. ②

15. (가) : $\int \csc x\,dx$에서 x를 $2t$로 치환하면 $\int 2\csc 2t\,dt$이므로 $f(t)=2\csc 2t$이다.
(나) : $\int \frac{\sec^2 t}{\tan t}dt = \ln\tan t + C = \ln\tan\frac{x}{2} + C$이고 $\ln\tan\frac{\pi}{4}=0$이므로 $g(x)=\ln\tan\frac{x}{2}$이다.
따라서 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)\times e^{g\left(\frac{\pi}{3}\right)} = 2\csc\frac{2\pi}{3}\times\tan\frac{\pi}{6} = 2\times\frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3}$. ④

★ 4페이지 ★

16. 선생님이 썰을 푸는 시간을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(18, 5^2)$을 따른다. 또 선생님이 16번 수업을 했을 때 썰을 푸는 시간의 평균을 $\overline{\mathrm{X}}$라 하면 $\overline{\mathrm{X}}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(18, \left(\frac{5}{4}\right)^2\right)$을 따른다.



한편 $p=-\frac{1}{6}(t-50)$ $(0\le t\le 50)$의 그래프를 그리면 위와 같다. 이때  선생님이 16번 수업을 했을 때 진도나간 페이지의 총 수가 80 미만이려면 1번 수업했을 때 진도나간 페이지가 평균 5 이하여야 하므로, 썰을 푼 시간이 평균 20(분) 이상이어야 한다.
$\therefore \mathrm{P}(\overline{\mathrm{X}}\ge 20)=\mathrm{P}(\mathrm{Z}\ge 1.6)=0.5-0.4452=0.0548$. ⑤

17. $xf'(x) = -\{f(x)\}^2$이고, $f(x) \neq 0$이므로 $-\dfrac{xf'(x)}{\{f(x)\}^2} = 1$이고 $\dfrac{-f'(x)}{\{f(x)\}^2} = \dfrac{1}{x}$이다.

이때 $\dfrac{-f'(x)}{\{f(x)\}^2} = \left(\dfrac{1}{f(x)}\right)'$임을 이용해 양변을 적분하면 $\dfrac{1}{f(x)} = \ln x + C$이고,

$x = e$를 대입하면 $1 = 1 + C$, $C = 0$ $\therefore f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$

$\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{f(x)}{x} dx = \int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx$에서 $\ln x = t$로 치환하면 $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t} dt = \Big[\ \ln t\ \Big]_1^2 = \ln 2$. ②

18. (가) : 처음으로 고른 2대 중 1대가 A_1이고 나머지 1대가 다른 $n-1$대 중 하나일 확률은 $\dfrac{1 \times (n-1)}{{}_n\mathrm{C}_2} = \dfrac{2}{n}$이다. 따라서 $f(n) = \dfrac{2}{n} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$이다.

(나) : A_1이 첫 번째 '도전자'이고 '우승자'가 될 확률은 $\dfrac{1}{n} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-2}$, 두 번째 '도전자'이고 '우승자'가 될 확률은 $\dfrac{1}{n} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-3}$, ⋯⋯ , $(n-2)$번째 '도전자'이고 '우승자'가 될 확률은 $\dfrac{1}{n} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^1$이다. 따라서 A_1이 '우승자'가 될 확률은

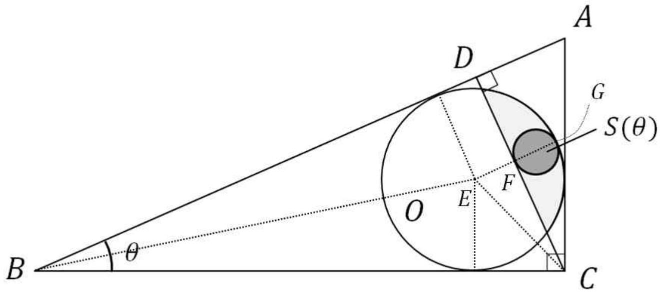
$$g(n) = f(n) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-2} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{2}{n} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{n} \times \frac{\frac{2}{3}\left\{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\right\}}{1 - \frac{2}{3}}$$

$= \dfrac{2}{n}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} + \dfrac{2}{n} - \dfrac{2}{n}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-2} = \dfrac{2}{n} - \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$이다.

(다) : A_1이 '우승자'가 되지 않을 확률은 $1 - g(n)$인데, 이때 $A_2, A_3, \cdots, A_n$이 '우승자'가 될 확률은 모두 같으므로 A_2가 '우승자'가 될 확률은 $h(n) = \dfrac{1 - g(n)}{n-1}$이다.

$f(4) = \dfrac{4}{27}$, $g(3) = \dfrac{2}{3} - \dfrac{4}{27}$, $h(4) = \dfrac{1 - g(4)}{3} = \dfrac{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^3}{3} = \dfrac{1}{6} + \dfrac{2}{81}$이므로

$\{f(4) + g(3)\} \times h(4) = \dfrac{2}{3} \times \left(\dfrac{1}{6} + \dfrac{2}{81}\right) = \dfrac{31}{243}$. ⑤



19. 오른쪽과 같이 원 O의 중심을 E, 주어진 영역에 포함되는 반지름이 가장 큰 원이 선분 CD와 만나는 점을 F, 원 O와 만나는 점을 G라 하자. $\overline{BC}=\cos\theta$, $\overline{BD}=\cos^2\theta$이다.

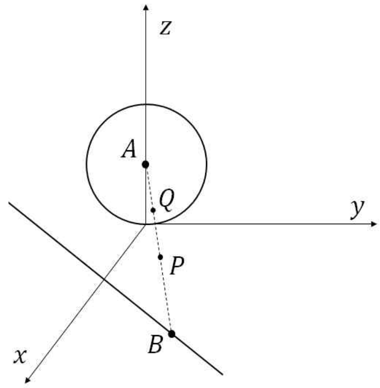
O의 반지름을 r이라 하면 선분 BC에서 $r+\dfrac{r}{\tan\frac{\theta}{2}}=\cos\theta$, $r=\dfrac{\cos\theta\tan\frac{\theta}{2}}{\tan\frac{\theta}{2}+1}$이다.

한편 E에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{HD}=\overline{BD}-\overline{BH}=\cos^2\theta-\dfrac{r}{\tan\frac{\theta}{2}}$

이때 $\overline{FG}=r-\overline{HD}=r+\dfrac{r}{\tan\frac{\theta}{2}}-\cos^2\theta=\cos\theta-\cos^2\theta$이므로 $S(\theta)=\dfrac{\pi}{4}(\cos\theta-\cos^2\theta)^2$

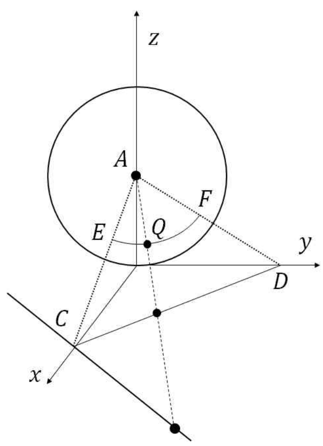
$$\therefore \lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^4}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\pi}{4}\left(\frac{\cos\theta-1+1-\cos^2\theta}{\theta^2}\right)^2=\frac{\pi}{4}\left(\frac{\cos\theta-1}{\theta^2}+\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}\right)^2$$

$$=\frac{\pi}{4}\left(-\frac{1}{2}+1\right)^2=\frac{\pi}{16}.\ ①$$



20. ㄱ. 직선 AB의 방정식은 $x=\dfrac{y}{t}=\dfrac{z-1}{-t-1}$이다. 이 직선 위의 점 P의 좌표를 $(k, tk, (-t-1)k+1)$이라 하면 $(-t-1)k+1=0$에서 $k=\dfrac{1}{t+1}$이고, 점 P의 좌표는 $\left(\dfrac{1}{t+1}, \dfrac{t}{t+1}, 0\right)$이다. 이는 직선 $y=x$, $z=0$ 위의 점이다. **(참)**

ㄴ. $t>0$이므로 $0<\dfrac{1}{t+1}<1$이고, 점 $C(1,0,0)$과 점 $D(0,1,0)$에 대해 점 P는 선분 CD 위를 움직인다. 구와 선분 AC와의 교점, 선분 AD와의 교점을 각각 E, F라 할 때 점 Q는 호 EF 위를 움직이며, $\angle EAF=60^\circ$이므로 Q의 자취의 길이는 $\dfrac{\pi}{3}$이다. **(거짓)**



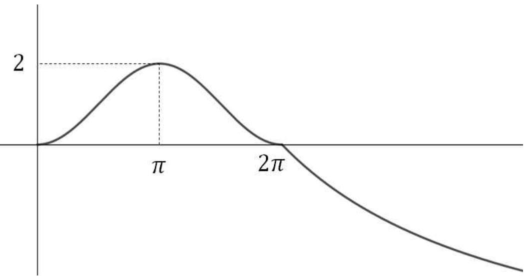
ㄷ. 점 R이 존재하는 영역의 넓이는 삼각형 ACD에서 부채꼴 AEF를 뺀 부분의 넓이와 같으므로 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{2})^2-\dfrac{1}{6}\times\pi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\pi}{6}$.

(참) **정답 ㄱ, ㄷ ③**

21. $\frac{f(x)-k}{x}$는 두 점 $(0,k)$와 $(x,f(x))$ 사이의 기울기인데 이것이 $\tan g(x)$와 같으므로 $g(x)$는 두 점 $(0,k)$와 $(x,f(x))$를 지나는 직선 l이 x축의 양의 방향과 이루는 각도와 같으며, $0 \le g(x) < \pi$이므로 직선 l의 기울기가 0 또는 양수일 때는 $0 \le g(x) < \frac{\pi}{2}$, 직선 l의 기울기가 음수일 때는 $\frac{\pi}{2} < g(x) < \pi$이다.

$g(x)$가 $x=t$에서 극값을 가지며 연속이기 위해서는 두 점 $(x,f(x))$와 $(0,k)$ 사이의 기울기가 $x=t$ 주변에서 증가하다가 감소하거나, 감소하다가 증가해야 한다.

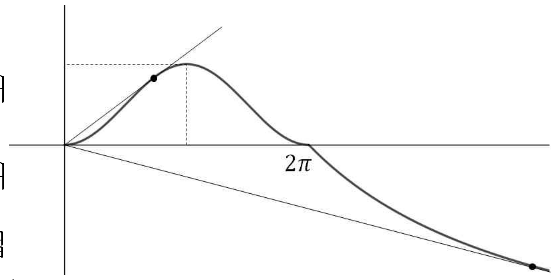
함수 $f(x)$의 그래프는 오른쪽과 같다. $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$에서 변곡점을 가지며, 그 점에서의 기울기는 각각 1, -1이다. 또 $x \to 2\pi+$일 때 접선의 기울기는 -1이다.



$k=0$, 2, $\frac{3}{2}\pi+1$일 때로 경우를 나누어 $g(x)$의 극점을 찾자.

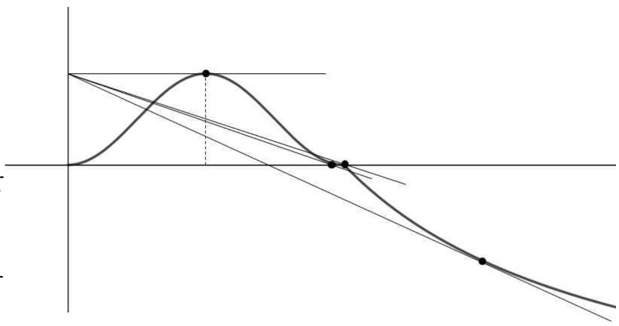
ㄱ) $k=0$인 경우 :

$0 < x \le 2\pi$일 때 $0 \le g(x) < \frac{\pi}{2}$이고, $x > 2\pi$일 때 $\frac{\pi}{2} < g(x) < \pi$이다. 점 $(0,0)$에서 $f(x)$에 접선 두 개를 오른쪽 그림과 같이 그을 수 있는데, 이때 접점의 x좌표에서 $g(x)$가 극값을 가진다. 따라서 $h(0)=2$.

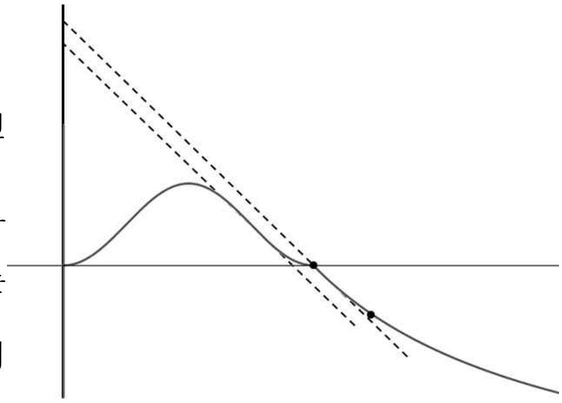


ㄴ) $k=2$인 경우 :

$x=\pi$일 때 $g(x)=0$이고, $0<x<\pi$, $x>\pi$일 때 $\frac{\pi}{2} < g(x) < \pi$이다. 점 $(0,2)$와 $(2\pi,0)$ 사이의 기울기가 -1보다 크므로 $g(x)$가 극값을 가지는 경우는 오른쪽 그림과 같이 $x=\pi$, 구간 $(\pi,2\pi)$, $x=2\pi$, 구간 $(2\pi,\infty)$에 각각 하나씩 총 4곳이 있다. 그런데 이때 $x=\pi$인 경우는 $g(x)$가 불연속이 되므로 조건을 만족시키지 못한다. 따라서 $h(2)=3$.



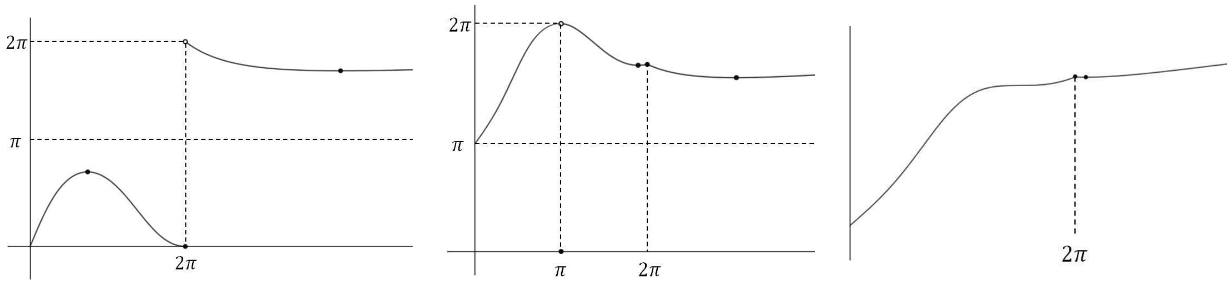
ㄷ) $k=\frac{3}{2}\pi+1$인 경우 :



모든 양수 x에 대해 $\frac{\pi}{2}<g(x)<\pi$이다. $f(x)$의 변곡점 $\left(\frac{3}{2}\pi, 1\right)$에서의 접선이 $\left(0, \frac{3}{2}\pi+1\right)$을 지나므로, $0<x<2\pi$일 때 $g(x)$가 극점을 가지는 경우는 없다. 한편 함수 $\frac{(2\pi)^2}{x}-2\pi$ 위의 점 $(2\pi, 0)$에서 그은 접선은 $(0, 2\pi)$를 지나는데 $k<2\pi$이므로 $x=2\pi$에서 $g(x)$는 극값을 가지며, 구간 $(2\pi, \infty)$의 한 점에서도 극값을 가지게 된다. 따라서 $h\left(\frac{3}{2}\pi+1\right)=2$.

$\therefore h(0)\times h(2)\times h\left(\frac{3}{2}\pi+1\right)=2\times3\times2=12$. ②

★ $k=0$, 2, $\frac{3}{2}\pi+1$일 때 $g(x)$의 그래프 개형



$k=0$　　$k=2$　　$k=\frac{3}{2}\pi+1$

22. ${}_{20}C_5=\frac{20\times19\times18\times17\times16}{5\times4\times3\times2\times1}=19\times\frac{18\times17\times16}{3\times2\times1}=19\times{}_{18}C_3$. **답 19**

23. $f'(x)=\frac{4x^3+2x}{x^4+x^2}=\frac{4x^2+2}{x^3+x}$이므로 $-f'(-1)=-\left(\frac{4+2}{-1-1}\right)=3$. **답 3**

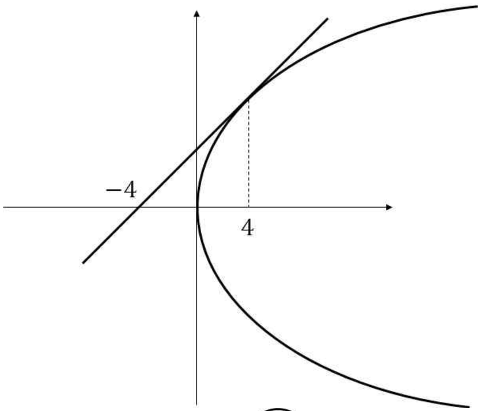
24. ${}_4C_1\times x\times2^3\times x+{}_4C_2\times x^2\times2^2\times3=(32+72)x^2=104x^2$ **답 104**

★ 7페이지 ★

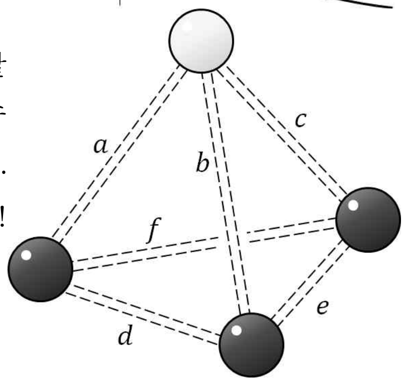
25. $\frac{1}{x}(\ln y)+(\ln x)\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=0$에 $x=e^2$, $y=e^4$를 대입하면

$\frac{4}{e^2}+\frac{2}{e^4}\cdot\frac{dy}{dx}=0$,　$\frac{dy}{dx}=-2e^2$,　$a=2$, $b=2$.　**답 22**

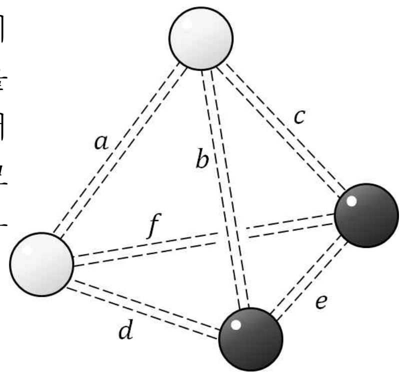
26. 방정식을 미분하면 $2yy'=16$이고, $y'=1$에서 $y=8$, $x=4$이다. 따라서 $\mathrm{P}(4,8)$이다. P에서의 접선과 수직인 직선은 $y=-(x-4)+8$이고, 이를 포물선의 방정식과 연립하면 $(-x+12)^2=16x$, $x^2-40x+144=0$에서 $x=4$ 또는 $x=36$이다. **답 36**



27. 1) 흰 공 1개, 검은 공 3개를 사용하는 경우 :
공을 배열하는 방법은 1가지밖에 없다. 이때 오른쪽과 같이 여섯 개의 모서리를 a, b, c, d, e, f라고 하자. 6가지 색깔의 막대 중 먼저 a, b, c에 올 막대 세 개를 고르는 경우의 수는 ${}_6\mathrm{C}_3$이며, 이를 배열하는 경우의 수는 원순열로 $2!$이 된다. 그 다음 나머지 세 막대를 d, e, f에 배열하는 경우의 수는 $3!$이므로 ${}_6\mathrm{C}_3\times 2!\times 3!=20\times 2\times 6=240$



2) 흰 공 2개, 검은 공 2개를 사용하는 경우 :
공을 배열하는 방법은 역시 1가지밖에 없으며, 오른쪽과 같이 여섯 개의 모서리를 a, b, c, d, e, f라고 하자. 먼저 a와 e에 올 막대를 고르는 경우의 수는 6×5이다. 이때 정사면체를 모서리 a와 e의 중점을 이은 직선을 축으로 180° 회전시키면 모양이 같아지므로, 나머지 네 막대를 b, c, d, f에 배열하는 경우의 수는 $4!\times\dfrac{1}{2}$이다. $6\times 5\times 4!\times\dfrac{1}{2}=360$

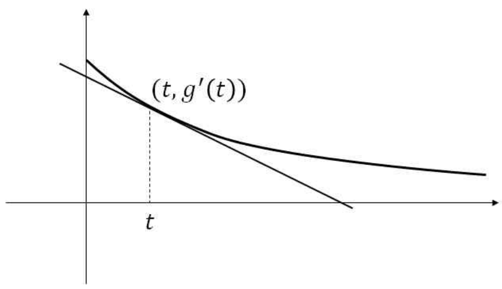


3) 흰 공 3개, 검은 공 1개를 사용하는 경우 :
경우의 수는 1)과 같다.

이로부터 $\mathrm{N}=2\times 240+360=840$. **답 84**

28. 함수 $f(x)$가 $x>0$에서 증가함수이고 아래로 볼록하며, $g(x)$는 증가함수이고 위로 볼록하다. 따라서 $g'(x)$는 항상 0보다 큰 감소함수이다.

$g'(t)$를 대략적으로 그리면 오른쪽과 같다. $\mathrm{A}(t, g'(t))$에서 x축에 내린 수선의 발은 $\mathrm{C}(t,0)$이며, 점 A에서의 접선의 방정식은 $y=g''(t)(x-t)+g'(t)$이므로 $y=0$을 대입하면 $x=t-\dfrac{g'(t)}{g''(t)}$이고, 이는 오른쪽 그림에서 t보다 크다.



따라서 삼각형의 넓이 $S(t)=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{g'(t)}{g''(t)}\right)\times g'(t)=-\frac{\{g'(t)\}^2}{2g''(t)}$이다.

$$\int_2^{20}\frac{1}{S(t)}dt=\int_2^{20}-\frac{2g''(t)}{\{g'(t)\}^2}=\left[\frac{2}{g'(t)}\right]_2^{20}=\frac{2}{g'(20)}-\frac{2}{g'(2)}$$

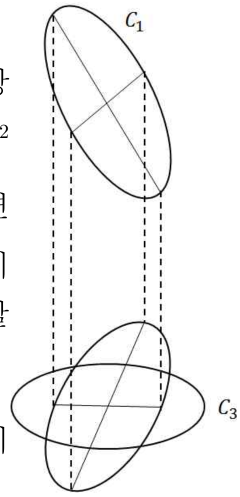
이때 $f(4)=20$, $f'(4)=9$이고, $f(1)=2$, $f'(1)=3$이므로 역함수의 미분법을 사용하면

$\frac{2}{g'(20)}-\frac{2}{g'(2)}=2\times9-2\times3=12$. **답 12**

<u>★ 8페이지 ★</u>

29. 타원 C_2의 평면 α로의 정사영이 원이 되려면 타원의 단축이 평면 α와 평행해야 하고, 장축의 α로의 정사영의 길이가 단축과 같아야 한다. (추가설명 해설 뒤에 첨부)
타원의 장축의 길이가 4, 단축의 길이가 2이므로 평면 α는 xy평면과 60°의 각도를 이뤄야 하고, 원 C_3의 지름은 2가 된다.

타원의 단축을 x축, 장축을 y축으로 가정하면 C_1을 포함하는 평면은 y축을 포함하며 xy평면과 60°의 각도를 이룬다. 따라서 C_1을 포함하는 평면의 법선벡터를 $(\sqrt{3},0,1)$로 놓을 수 있다. 또 평면 α는 x축과 평행하며 xy평면과 60°의 각도를 이루며, α의 법선벡터를 $(0,-\sqrt{3},1)$로 가정할 수 있다. 이때 두 평면이 이루는 각을 θ라 하면 $\cos\theta=\frac{1}{4}$이다.

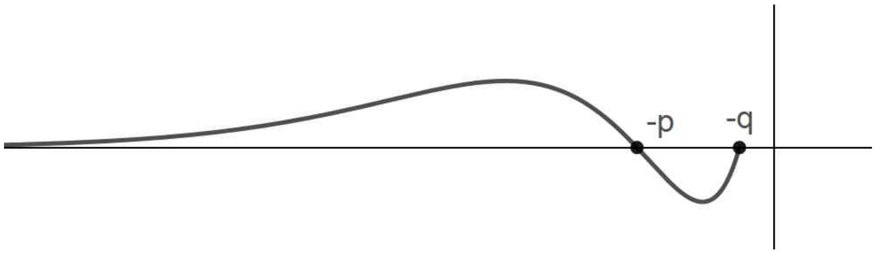


오른쪽 그림과 같이 원 C_1의 평면 α로의 정사영은 중심이 점 B이고 장축의 길이가 4, 단축의 길이가 1인 타원이다. 이때 $|\overrightarrow{PQ}|^2=(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AQ})^2$ $=|\overrightarrow{PA}|^2+2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{AQ}+|\overrightarrow{AQ}|^2$에서 $\overrightarrow{PA}$와 $\overrightarrow{AQ}$가 이루는 각을 θ_1이라 하면 $\cos\theta_1$이 최대일 때 $|\overrightarrow{PQ}|^2$가 최대이다. 따라서 C_1 위의 점 중 평면 α에서 가장 거리가 먼 점을 P로 잡고, 점 P의 α로의 정사영을 P′이라 할 때 C_3 위의 점 중 P′에서 가장 거리가 먼 점을 Q로 잡는다.

이때 선분 PP′의 길이는 $\overline{AB}+2\sin\theta=\sqrt{5}+\frac{\sqrt{15}}{2}$이고, 선분 P′Q의 길이는 $\frac{3}{2}$이므로 $|\overrightarrow{PQ}|^2=\left(\sqrt{5}+\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2=11+5\sqrt{3}$이다. $a=11$, $b=5$. **답 55**

★ 추가설명
타원의 단축의 길이를 x라 하면, 타원의 중심을 지나고 평면 α와 평행한 선분의 길이는 무조건 x 이상이고, 이 선분의 평면 α로의 정사영 역시 길이가 x 이상이다. 그런데 타원의 단축의 평면 α로의 정사영은 항상 길이가 x 이하이기 때문에, 타원의 α 위로의 정사영이 원이 되려면 무조건 타원의 단축이 평면 α와 평행해야 한다.

30. (가)에서 $p>q$이므로 $a^{\frac{x}{q}}(x+p)(x+q)$ $(x\le -q)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

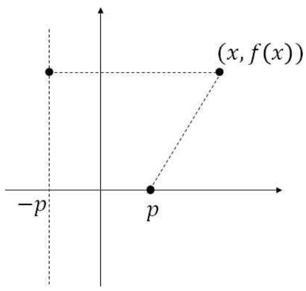


(다)에서 $(x, f(x))$와 $(p, 0)$ 사이 거리는 $\sqrt{(x-p)^2+\{f(x)\}^2}$이므로 $(x-p)^2+\{f(x)\}^2 \ge (x+p)^2$, $\{f(x)\}^2 \ge 4px$, $x>0$일 때 $f(x)\ge 2\sqrt{px}$ 또는 $f(x)\le -2\sqrt{px}$이다. 그런데 $f'(-q)>0$이고 (나)에서 $-q<x\le q$일 때 $f(x)$가 아래로 볼록하지 않으므로 $x>0$일 때 $f(x)>0$이고, 따라서 $f(x)\ge 2\sqrt{px}$이다.

한편 (나)에서 $f(q)=2\sqrt{pq}$인데 이는 $2\sqrt{px}$에 $x=q$를 대입한 값과 같으므로, $f(x)$는 $x=q$에서 $2\sqrt{px}$에 접한다. $y=2\sqrt{px}$의 $x=q$에서의 접선의 기울기는 $\sqrt{\frac{p}{q}}$이고, 접선의 방정식은 $y=\sqrt{\frac{p}{q}}(x-q)+2\sqrt{pq}=\sqrt{\frac{p}{q}}(x+q)$이다. 이 직선이 $(-q, 0)$을 지나므로, (나)에서 $f''(x)\ge 0$이려면 $f(x)$가 $-q<x\le q$에서 접선의 방정식과 같아야 한다.

★ 다른 방법

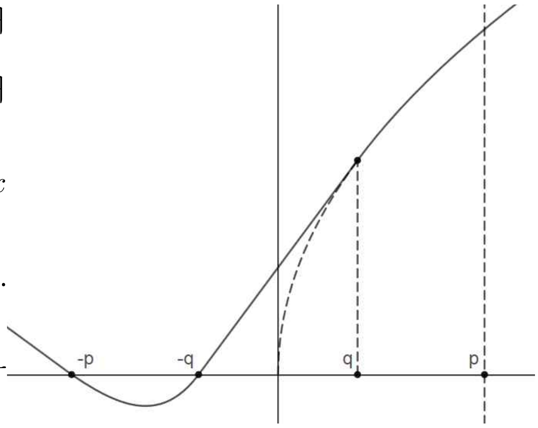
$|x+p|$는 x에서 $-p$까지의 거리와 같으므로, (다)를 그림으로 나타내면 오른쪽과 같다. 이때 $(x, f(x))$와 $(p, 0)$ 사이 거리가 $|x+p|$와 같다면 $(x, f(x))$는 점 $(p, 0)$을 초점으로 하고 $x=-p$를 준선으로 하는 포물선 위의 점이 되고, $|x+p|$보다 크다면 $(x, f(x))$는 포물선 밖의 점이 된다.



따라서 포물선의 식에 대입하면 $\{f(x)\}^2 \ge 4px$이다. 한편 포물선 위의 점 $(q, 2\sqrt{pq})$에서의 접선은 점 $(-q, 0)$을 지나기 때문에, (나)에서 $f''(x)\ge 0$이려면 $f(x)$가 $-q<x\le q$에서 접선의 방정식과 같아야 한다.

$f(x)$가 $x=-q$에서 미분가능해야 하므로, $y=a^{\frac{x}{q}}(x+p)(x+q)$를 미분해 $-q$를 대입한 값이 $\sqrt{\frac{p}{q}}$이어야 한다. $y'=\frac{1}{q}a^{\frac{x}{q}}\ln a(x+p)(x+q)+a^{\frac{x}{q}}(2x+p+q)$이므로 $a^{-1}(p-q)=\sqrt{\frac{p}{q}}$에서 $a=(p-q)\sqrt{\frac{q}{p}}$이고, a가 유리수이므로 $\sqrt{\frac{q}{p}}$가 유리수이다.

완성된 $f(x)$의 그래프는 오른쪽과 같다. 이때 $\int_0^p f(x)dx$가 최소가 되어야 하므로, $x>q$일 때 $f(x)=2\sqrt{px}$여야 한다. 또 p가 커질수록 $\int_0^p f(x)dx$는 커지며, q 역시 커질수록 $\int_0^p f(x)dx$가 커진다. 따라서 $\int_0^p f(x)dx$가 최소가 되려면 p, q가 모두 가능한 한 작아야 한다.



$\sqrt{\frac{q}{p}}$가 유리수이고 $p>q$이면 가장 작은 p와 q의 값으로 $p=4,\ q=1$이 가능하다. 이때 $a=(4-1)\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{3}{2}$이다. 따라서

$$f(x)=\begin{cases}\left(\frac{3}{2}\right)^x(x+4)(x+1) & (x\leq -1)\\ 2(x+1) & (-1<x\leq 1)\\ 4\sqrt{x} & (x>1)\end{cases}$$

이므로

$$\int_0^4 f(x)dx=\int_0^1 2(x+1)dx+\int_1^4 4\sqrt{x}\,dx$$

$$=\left[\ x^2+2x\ \right]_0^1+\left[\ \frac{8}{3}x\sqrt{x}\ \right]_1^4=3+\frac{56}{3}=\frac{65}{3}$$

$\therefore m=\frac{65}{3}, n=\frac{3}{2},\quad 6(m+n)=139.$ **답** 139