

관계 포락선의 개념과 이산적 동역학계의 수렴성 판단

By Unskilled Worker

1. 서론

경제학이나 물리학에서는 어떠한 변수가 함수에 반복적으로 대입됨으로써 어떠한 평형 상태로 진입할 수 있는지를 판단해야 하는 경우가 많다. 이러한 과정에서 가장 중요한 두 과제 중 하나는 그 수렴 지점을 찾는 것이며, 둘째는 변수가 수렴 지점 주변에 충분히 가깝게 위치할 때 그 지점에 무한히 가까이 다가갈 수 있어야 한다는 것이다.

즉, 이산적인 동역학을 나타내는 수열 $x_{n+1} = f(x_n)$ 에 대해 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 의 값이 x^* 로 존재할 수 있고(존재성), 0 이상인 서로 다른 두 실수 ϵ_1, ϵ_2 가 존재하여 $\bar{x} \in (x^* - \epsilon_1, x^* + \epsilon_2)$ 인 모든 $\bar{x}$ 에 대해 $x_0 = \bar{x}$ 인 수열 $x_{n+1} = f(x_n)$ 이 모두 x^* 로 수렴하는 x^* 를 찾는 것(수렴성)이다. 차등의 목적으로, 이 글은 미적분학적 이론과 기하학적 직관을 결합한 관계 포락선 변환법을 제시함으로써 앞 두 과제를 능률적으로 해결할 수 있는 방법론을 제시하고자 한다.

2. 관계 포락선

2.1. 관계 포락선의 개념

미분가능한 함수 $y = f(x)$ 가 존재하여 그 정의역에 속하는 임의의 실수를 t 라고 두자. 그리고 두 점 $(t, 0), (f(t), 1)$ 을 잇는 직선을 그리자. 그렇다면 그 직선의 방정식은 $y = \frac{-1}{(t-f(t))}(x-t)$ 이 된다. 이때 t 를 적절한 범위 내에서의 매개변수로 둔다면 이 관계식에 대한 포락선을 그릴 수 있다.

즉, 포락선 공식에 따라 $F(x, y, t) = (t-f(t))y + x - t = 0$ 이고 $\frac{\partial F}{\partial t} = (1-f'(t))y - 1 = 0$ 인 두 조건을 만족하는 x, y 의 관계식 $g(x, y) = 0$ 을 찾을 수 있다는 것이다. 이 $y = f(x) : \mathbb{R}^2 \Rightarrow g(x, y) = 0 : \mathbb{R}^2$. 로의 변환을 관계 포락선 변환이라고 한다. 이때 음함수 $g(x, y) = 0$ 는 쉽게 도출될 수 없는 경우가 많으므로, 일반적으로 $g(x, y) = 0$ 의 경우보다 유용한 매개변수 함수 $x = f_1(t), y = f_2(t)$ 의 꼴로 명증하도록 한다.

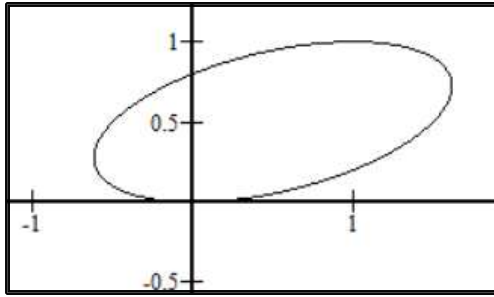
관계 포락선 변환

미분가능한 함수 $y = f(x)$ 에 대하여, 다음과 같은 매개변수 함수로 나타나는 $x = f_1(t), y = f_2(t)$ 를 도출하는 것을 **관계 포락선 변환(RELT)**이라고 정의한다.

$$y = f(x) \Rightarrow \begin{cases} x = t - \frac{t-f(t)}{1-f'(t)} \\ y = \frac{1}{1-f'(t)} \end{cases} \Leftrightarrow g(x, y) = 0$$

이를테면, 함수 $y = 1 + \frac{1}{x}$ 를 관계 포락선 변환 시, $x = t - \frac{(t-1-1/t)}{(1+1/t^2)} = \frac{t^2+2t}{t^2+1}$ 이고

$y = \frac{t^2}{t^2+1}$ 로서, t 를 소거하려면 $t^2 = \frac{y}{1-y}$ 로 치환해 $x = f_1(t)$ 에 대입하면 되므로,



$y = 1 + 1/x$ 의 관계 포락선

$(x-y)^2 = 4y(1-y)$ 라는 관계식이 도출된다. 이 식을 그래프로 그리면 왼쪽 그림과 같다.

연습으로서, 독자들에게 다음 함수를 관계 포락선 변환해 $x = f_1(t), y = f_2(t)$ 매개변수 함수로 나타낼 것을 권장한다. 또한, $t, f(t), f'(t)$ 를 혼동하지 않도록 유의하라.

예제1) $y = \cos(x)$ 를 RELT하라.

예제2) $y = -\ln(x)$ 를 RELT하라.

예제3) $y = rx(1-x)$ 를 RELT하라(r 은 상수).

2.2. 관계 포락선의 성질과 그 구분

관계 포락선을 매개변수를 통해 나타낼 때, 그 성질이 동역학계의 존재성과 수렴성을 판단하는데 중요한 기준으로서 작용하게 된다. 따라서 양 성질에 대한 구체적인 논의에 들어가기 이전에 관련 성질을 이해하는 것이 필요할 것이다.

2.2.1 관계 포락선의 미분

관계 포락선을 나타내는 관계식 $g(x, y) = 0$ 을 만족하는 지점 (x, y) 에 대하여 그 점을 지나 는 접선의 기울기는 $-\frac{\partial g}{\partial x} / \frac{\partial g}{\partial y}$ 와 같다. 그리고 관계 포락선이 $x = f_1(t), y = f_2(t)$ 의 형태일 때는 임의의 t 를 삽입해 도출된 지점 (x, y) 에서의 관계 포락선의 접선의 기울기는 $\frac{dy}{dt} / \frac{dx}{dt}$ 가 된다. 그러나 이 글에서 더 중시하는 것은 접선의 구체적인 값이 아니라, 접선의 기울기가 0이 되거나 y 축에 평행한 지점을 조사하는 과정이다.

그런데 접선의 기울기가 y 축에 평행한 지점은 특별한 성질을 지니고 있다. 이 경우엔 $\frac{dx}{dt} = 0$ 이라는 필요조건을 가진다. 조건이 필요조건이 되는 이유는 $\frac{dy}{dt}$ 도 모두 0이 될 수 있기 때문이다. 한편 이 조건을 관계 포락선의 정의에 적용하면 다음과 같다.

$\frac{dx}{dt} = 1 - \frac{(1-f'(t))^2 + f''(t)(t-f(t))}{(1-f'(t))^2} = 0$ 이고 $f'(t) \neq 1$ 이므로 $f''(t)(t-f(t)) = 0$ 은 $\frac{dx}{dt} = 0$ 에 대한

필요충분조건이며, $\frac{dy}{dt} = \frac{f''(t)}{(1-f'(t))^2} = 0$ 이고 $f'(t) \neq 1$ 이므로 $f''(t) = 0$ 은 $\frac{dy}{dt} = 0$ 에 대한 필요

충분조건이 된다. 그런데 앞서 $\frac{dy}{dt} / \frac{dx}{dt}$ 가 관계 포락선에 있어서 접선의 기울기와 같다고 하였으므로 $f''(t) \neq 0$ 이고 $f(t) = t$ 이면 그 점에서 접선의 기울기는 필요충분적으로 발산한다. 또한 정의에 따라 $f(t) = t$ 이면 $x = t$ 이다.

한편, $f''(t) = 0$ 이거나 $f'(t) = 1$ 이면(그 점에서만) 그 점에서의 관계 포락선에 대한 접선의 기울기를 직접적으로는 구할 수 없으므로 그 조건을 생각하지 않고 우선 $\frac{dy}{dt} / \frac{dx}{dt}$ 만을

계산하면 $\frac{-1}{t-f(t)}$ 가 된다. 이 경우에도 $f(t) = t$ 인 경우에만 접선의 기울기가 필요충분적으로 발산하는 것을 볼 수 있다. 물론 정의에 따라 $x = t$ 이다. 따라서 다음 정리가 성립한다.

수직 접선의 정리

미분가능한 원함수 $y = f(x)$ 와 관계 포락선 변환으로 도출된 음함수 $g(x, y) \equiv 0$ 에 대해

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x} / \frac{\partial g}{\partial y} \right| = \left| \frac{dy}{dt} / \frac{dx}{dt} \right| \text{가 무한으로 발산} \Leftrightarrow f(t) = t = x = f(x)$$

미분가능한 함수에 관한 수열 $x_{n+1} = f(x_n)$ 에 대해, x_0 이 임의의 구간 내에 위치할 때 수열이 x^* 로 수렴한다고 한다면 $x^* = f(x^*)$ 를 만족해야 한다. 그렇기에 우리는 이 정리를 통해 관계 포락선의 그래프를 보고 $f(x) = x$ 가 어디에 위치하는지를 간단히 알 수 있다.

예로서, 앞의 예시 $y = 1 + 1/x$ 에 관계 포락선 변환을 취해 $x = 1 + 1/x$ 의 근의 위치를 살펴보자. 우선 $f(x) = x$ 의 근은 $x^2 - x - 1 = 0$ 의 해이다. 한편, $\frac{dx}{dt} = \frac{(2t+2)(t^2+1) - (t^2+2t)(2t)}{(t^2+1)^2}$
 $= \frac{-2(t^2-t-1)}{(t^2+1)^2}$ 이고 $\frac{dy}{dt} = \frac{2t}{(t^2+1)^2}$ 이므로 $\left| \frac{dy}{dt} / \frac{dx}{dt} \right|$ 가 발산하는 부분은 $t^2 - t - 1 = 0$ 의 근
 이므로 $f(t) = t$ 를 만족하는 실수 t 들의 집합은 $x = f(x)$ 를 만족하는 실수 x 들의 집합과 같다는 것을 볼 수 있다.

2.2.2 관계 포락선의 이제 미분

관계 포락선의 미분이 근의 존재성을 찾는 것이었다면, 이제 미분의 경우에는 동역학계가 어떻게 수렴, 발산할지를 판단하는데 기여한다. 여기서는 관련 개념들을 개괄하고, 구체적인 방법은 후술토록 하겠다.

흔히 이제도함수가 양수인지 음수인지에 따라 볼록 함수와 오목 함수를 구분한다. 매개변수 함수에 대해서도 유사한 개념을 차용할 수 있다. 하지만 여기서는 x 에 대한 y 의 변화가 아니라, 공통 매개변수 t 로부터의 x, y 각각의 변화를 탐구해야 한다. x 의 변화는 좌우 방향의 벡터에, y 의 변화는 상하 방향의 벡터에 조건화되므로, 다음과 같은 구분법을 제시할 수 있다.

매개변수 함수의 이제 미분

두 번 미분 가능한 매개변수 함수 $x = f_1(t), y = f_2(t)$ 에 대하여

$\frac{d^2x}{dt^2} > 0$ 이면 x 에 대해 Vector Convex 벡터 볼록이고, $\frac{d^2x}{dt^2} < 0$ 이면 x 에 대해 Vector Concave 벡터 오목하다.

$\frac{d^2y}{dt^2} > 0$ 이면 y 에 대해 벡터 볼록이고, $\frac{d^2y}{dt^2} < 0$ 이면 y 에 대해 벡터 오목하다.

3. 관계 포락선과 동역학계의 수렴성

이제 본격적으로 관계 포락선이 $x_{n+1} = f(x_n)$ 로 표현되는 동역학계의 수렴, 발산을 어떻게 설명하는지를 보이도록 하겠다. 우선 그 유형을 $f(x^*) = x^*$ 를 만족하는 x^* 에 대해 관계 포락선 함수가 그 점에서 연속적인지, 불연속적인지에 따라, $f'(x^*) \neq 1$ 인 비특이적 경우와 $f'(x^*) = 1$ 인 특이적 경우를 나눈다. 그 기준은 각 유형에서 수렴성이 어떻게 성립하

는지를 유형을 세분화 하여 설명하고자 한다.

마지막으로 관계 포락선 함수를 응용할 수 있는 대표적인 예시로서, 로지스틱 사상 (Logistic Map)이라 칭해지는 동역학계 $x_{n+1} = rx_n(1-x_n)$ 에서 r 의 변화가 x_n 의 수렴, 발산을 어떻게 결정짓는지를 관계 포락선을 통해 해석하는 것이 챕터 3, 4의 골자이다.

3.1. 비특이점의 경우

앞 정리에 따라 $x = f(x)$ 를 만족하는 x 를 지나고 y 축에 대해 평행인 직선은 그 함수의 관계 포락선이 연속일 때 그와 접하게 된다. 한편 $x^* = f(x^*)$ 를 만족하는 x^* 들 중 다음 조건을 만족하는 x^* 는 쌍방 수렴성을 만족한다고 한다.

쌍방 수렴성의 조건

연속 함수 $y = f(x)$ 와 $x^* = f(x^*)$ 를 만족하는 x^* 에 대해
 $0 < \forall \epsilon_1 < \exists \epsilon_2 \Rightarrow x^* + \epsilon_1 > f(x^* - \epsilon_1) \wedge x^* - \epsilon_1 < f(x^* + \epsilon_1)$

또, 함수 $y = f(x)$ 가 미분 가능하면
 $|f'(x^*)| < 1$

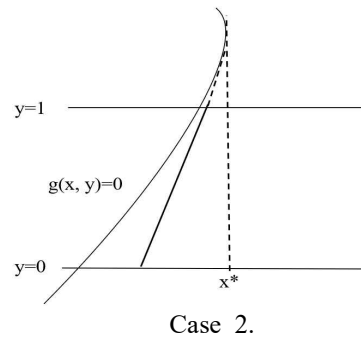
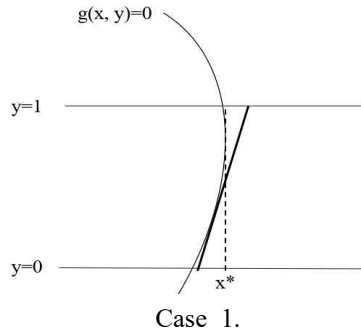
앞 정리를 풀어 쓰면 어떠한 양수가 존재하고 그 수와 0 사이에 있는 임의로 선택된 수 ϵ_1 은 $x^* + \epsilon_1 > f(x^* - \epsilon_1)$ 와 $x^* - \epsilon_1 < f(x^* + \epsilon_1)$ 의 두 부등식을 동시에 만족한다는 것이다. 후자의 정리는 앞 정리에 대해 x^* 를 $f(x^*)$ 로 바꾸고 ϵ_1 에 0으로 향하는 극한을 취하면 증명된다. 이 수렴성을 만족하면, $\bar{x} \in (x^* - \epsilon_2, x^* + \epsilon_2)$ 인 모든 $\bar{x}$ 에 대해 $x_0 = \bar{x}$ 인 수열 $x_{n+1} = f(x_n)$ 이 모두 x^* 로 수렴한다.

한편, 두 번 이상 미분 가능한 함수 $y = f(x)$ 에 대해 쌍방 수렴성이 만족되려면 관계 포락선 함수가 $y = x^{1/3}$ 의 그래프가 $x = 0$ 근방에서 가지는 형태와 같이 수직인 접선을 지니면서 좌우로 계속 증가하는 형태 수직 변곡점을 가지지 않아야 한다. 실제로, $\frac{dx}{dt}$ 의 값이 $t = x^*$ 에서 0이 된다는 존재성이 만족될 때 그 점에서 $x = f_1(t)$ 가 변곡점을 형성하고 $y = f_2'(t) \neq 0$ 인 관계 포락선은 존재하지 않는다. 이것은 $x = f_1(t)$ 가 변곡점을 가질 시 $y = f_2'(t) = 0$ 이어야 한다는 것과 동치이다.

Proof: 두 번 미분 가능한 원함수 $y = f(x)$ 와 관계 포락선 변환으로 도출된 두 매개변수 함수 $x = f_1(t)$ 와 $y = f_2(t)$ 가 있을 때, 수직 접선의 정리에 따라 $x^* = f(x^*)$ 를 만족하는 x^* 에 대해 수직선 $x = x^*$ 는 $x = f_1(t)$ 와 $y = f_2(t)$ 가 연속인 이상, 관계 포락선 함수에 접하게 된다. 그리고 $\frac{dx}{dt}$ 는 0이 된다. 그런데 정의에 따라 $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{-f''(t)(t-f(t)) + f''(t)(1-f'(t)^3 - 2f''(t)^2(t-f(t))(1-f'(t)))}{(1-f'(t))^4}$ 이고 수직 접선의 정리에 따라 $t = f(t)$ 이므로 결과적으로 $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{f''(t)}{1-f'(t)}$ 이다. 따라서 $x = f_1(t)$ 가 변곡점을 지닐 때 $f''(t) = 0$ 임이 보장된다. 한편 $\frac{dy}{dt} = \frac{f'(t)}{(1-f'(t))^2}$ 이다. 이 식은 $f'(t) \neq 1$ 일 경우에는 물론 0이며, $f'(t) - 1 = 0$ 이라면 $g(x, y) = 0$ 은 $x = x^*$ 인 점에서 특이점을 지니므로 변곡점을 형성할 수 없다. 따라서 관계 포락선에서 변곡점이 형성되려면 $\frac{dy}{dt} \neq 0$ 임을 전제해야 한다. Q.E.D.

$f(t)=1$ 이 되어 관계 포락선이 불연속적이 되는 경우에 대한 설명은 후술토록 하겠다. 그렇기에 우선 관계 포락선이 $x^*=f(x^*)$ 인 x^* 에 대해 $f(x^*) \neq 1$ 을 전제한 비특이적 경우에서 쌍방 수렴성이 어떤 경우에 만족되는지를 먼저 살펴보자.

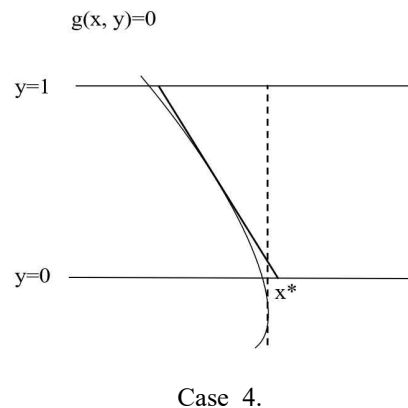
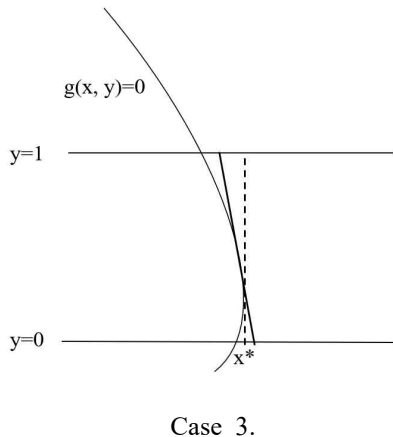
3.1.1. 비특이적 쌍방 수렴성



좌측의 그림은 관계 포락선 함수에 대해 $t=f(t)$ 인 t 에 대해 $y=f_2(t)$ 가 0과 1 사이에 존재하는 경우이며, 우측의 그림은 1보다 큰 곳에 위치하는 부분이다. 또 각 그림에서 우상향하는 선분은 두 점 $(x, 0)$, $(f(x), 1)$ 을 연결한 것이며 정의에 따라 $g(x, y)=0$ 과 접하게 된다.

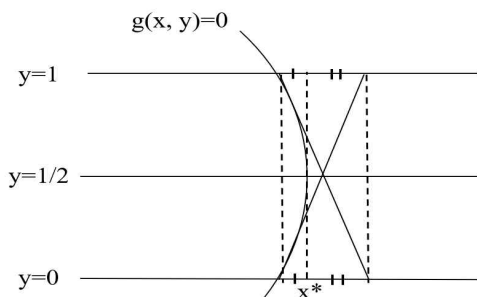
기하학적인 직관을 도입하면, 좌측 그림에서 $\left| \frac{dy}{dt} / \frac{dx}{dt} \right|$ 이 무한으로 발산하게 되는 t 에 대해 $y=f_2(t) > 1/2$ 이면 $t=x^*$ 에 적절히 가까운 좌우에서 $(x, 0)$ 과 $(f(x), 1)$ 을 지나는 직선을 그리면 $f(x)$ 와 x^* 의 차가 x 와 x^* 차보다 작아짐을 파악할 수 있다. 이는 우측 그림의 경우에서도 동일하다. 다시 말해, 수직 접선을 그릴 수 있는 $t=x^*$ 에 대해 $y=f_2(t) > 1/2$ 이면 x^* 가 연속 함수에서의 쌍방 수렴성의 조건을 만족하게 된다는 것이다. 한편 $f(x)$ 가 미분 가능한 함수일 때, $t=f(t)=x$ 를 만족하면 $y=f_2(t) = \frac{1}{1-f'(t)} > \frac{1}{2}$, 즉 $|f'(t)| < 1$ 이므로 쌍방 수렴성의 미분 가능한 경우도 역시 만족하고 있음을 볼 수 있다. 그리고 이 조건은 x, y 에 대한 벡터 오목, 벡터 볼록에 관계 없이 성립한다.

3.1.2. 비특이적 쌍방 비 수렴성

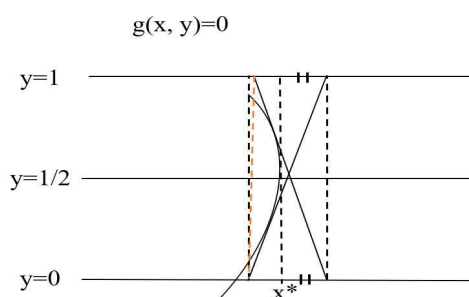


좌측 그림은 접점이 0과 1/2 사이에 위치하는 사례이며, 우측은 0이하에 위치하는 사례이다. 이러한 경우는 쌍방 수렴성을 x^* 좌우에서 모두 만족시키지 못하고 있다. 즉, x^* 주변에서 아무리 작은 양수 ϵ_1 을 잡아도 $x^* + \epsilon_1 > f(x^* + \epsilon_1)$ 와 $x^* - \epsilon_1 < f(x^* - \epsilon_1)$ 를 동시에 만족시킬 수 없다는 것이다. 그러므로 미분가능한 함수 $f(x)$ 에 대해 $t = f(t) = x$ 가 성립할 때, $y = f_2(t) = \frac{1}{1 - f'(t)} < \frac{1}{2}$ 일 때, 곧 $|f'(t)| > 1$ 인 경우에 수렴성이 만족되지 않음을 명증할 수 있다.

3.1.3 비특이적 조건부 쌍방 수렴성



Case 5.



Case 6.

앞서 $\left| \frac{dy}{dt} / \frac{dx}{dt} \right|$ 이 무한으로 발산하는 지점의 y 좌표가 1/2 초과면 쌍방 수렴성을 만족하며, 1/2 미만이면 만족하지 못하는 것을 보였다. 그렇다면 1/2에서 y 좌표가 형성된다면, 그 점에서는 쌍방 수렴성이 만족되는가? 그 답은 조건부 긍정이다.

좌측 그림 Case 5.는 x^* 가 관계 포락선과 만나는 접점의 y 좌표가 1/2인 경우이다. 그리고 x^* 의 좌우에서 ϵ_1 만큼 떨어진 지점에서 관계 포락선에 접선을 그었을 때 $0 < \forall \epsilon_1 < \exists \epsilon_2 \Rightarrow x^* + \epsilon_1 = f(f(x^* + \epsilon_1)) \wedge x^* - \epsilon_1 = f(f(x^* - \epsilon_1)) \Leftrightarrow f^{-1}(x) = f(x)$ ($x^* - \epsilon_2 < \forall x < x^* + \epsilon_2$) ... ①의 명제가 만족되는 경우이다. 즉, 관계 포락선 함수 $g(x, y) = 0$ 이 $y = 1/2$ 에 대해 국소적으로 대칭일 때, $f(x)$ 는 x^* 근방에서 $y = x$ 에 대칭이라는 것이다. 이 경우 동역학계 $x_{n+1} = f(x_n)$ 는 x_0 이 x^* 와 적절히 가깝더라도 어느 순간 x_n 은 x^* 좌우에서 수렴하지 않고 진동하기 시작한다.

우측 그림 Case. 6.는 x^* 가 관계 포락선과 만나는 접점의 y 좌표가 1/2인 경우임은 동일하다. 그러나 앞 명제 ①이 만족되지 않아 관계 포락선 함수 $g(x, y) = 0$ 이 $y = 1/2$ 에 대해 대칭을 이루지 못하고 붉은 사선이 발생한 경우이다. 이 경우 동역학계 $x_{n+1} = f(x_n)$ 는 x_0 이 x^* 에 상당히 가까울 경우 x^* 로 쌍방 수렴하거나 발산하는 케이스가 나누어질 수 있다. 그 기준은 다음과 같다.

비특이적 조건부 쌍방 수렴성 판단

세 번 이상 미분 가능한 함수 $y = f(x)$ 에 대해, $x^* = f(x^*)$, $f'(x^*) = -1$ 이고
근방에서 역함수 관계가 성립하지 않을 때

$$-\frac{2f^{(3)}(x^*) + 3f^{(2)}(x^*)^2}{6} < 0 \text{이면 쌍방 수렴하고, } -\frac{2f^{(3)}(x^*) + 3f^{(2)}(x^*)^2}{6} > 0 \text{이면 발산한다.}$$

Proof: $x^*=f(x^*)$ 이고 $x=x^*$ 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 바뀌지 않는 비특이점 경우 중, $f'(x^*)=-1$ 이어서 관계 포락선 함수와 수직선 $x=x^*$ 의 접점이 $1/2$ 이 될 때, x^* 가 쌍방 수렴성을 만족하려면 명제 $0 < \forall \epsilon_1 < \exists \epsilon_2 \Rightarrow \epsilon_1 > f(f(x^*+\epsilon_1)-x^*) \wedge \epsilon_1 > x^*-f(f(x^*-\epsilon_1)) \dots \textcircled{1}$ 이 성립해야 한다. $y=f(x)$ 는 미분 가능하므로 우측의 논리합에 대해 한쪽 명제만 성립하면 다른 명제도 성립함은 자명하다. 이때 0과 적절한 작은 양수 구간 사이에서 열린 구간으로 정의된 함수 $g(\epsilon_1) \equiv \frac{f(f(\epsilon_1+x^*)-f(f(x^*)))}{\epsilon_1}$ 를 정의하자.

$\textcircled{1}$ 에 따라 $\lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0+} g(\epsilon_1)=1$ 이다. 또 함수 $f(x)$ 가 두 번 이상 미분 가능하다고 전제한 뒤 로피탈의 정리를 쓰면

$$\lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0+} g'(\epsilon_1) = \lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0+} \frac{g(\epsilon_1)-1}{\epsilon_1} = \lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0+} \frac{f'(f(\epsilon_1+x^*))f'(\epsilon_1+x^*)-1}{2\epsilon_1} = \lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0+} \frac{f''(f(\epsilon_1+x^*))f'(\epsilon_1+x^*)+f'(f(\epsilon_1+x^*))f''(\epsilon_1+x^*)}{2} = 0$$

이 된다. 그런데 $g(\epsilon_1)$ 는 구간 내에서 구간 내에서 감소 함수가 되어야 하므로, $\lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0+} g''(\epsilon_1) < 0$ 을 만족해야 한다.

$f(x)$ 가 세 번 이상 미분 가능하다고 전제하고 로피탈의 정리를 쓰면 $\lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0+} g''(\epsilon_1) = -\frac{2f'''(x^*)+3f''(x^*)^2}{6}$ 이

된다. 상계의 조건은 $-\epsilon_1$ 에 대한 경우를 고려해도 동일하다. 그리고 $\lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0+} g''(\epsilon_1) = -\frac{2f'''(x^*)+3f''(x^*)^2}{6} > 0$ 이

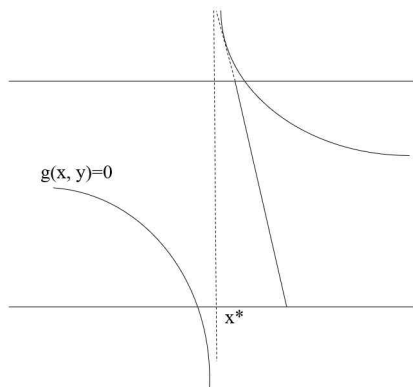
되면 쌍방 수렴성이 성립하지 않는다는 것은 위 증명으로부터 자연히 도출된다. Q.E.D.

$-\frac{2f'''(x^*)+3f''(x^*)^2}{6}$ 의 값이 0이 되는 경우에는 $g(\epsilon_1)$ 가 0 근방에서 감소한다는 것을 여타의 방법으로 명증해야 할 것이다.

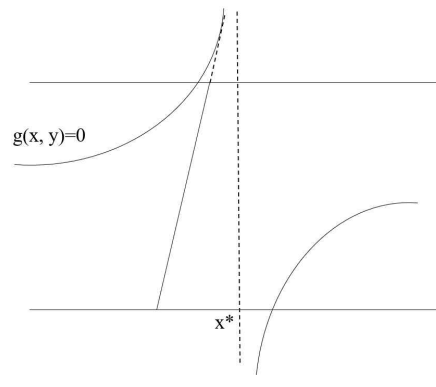
3.2 특이점의 경우

특이점 케이스에 속할 수 있는 유형은 두 가지로 분류할 수 있다. 첫 번째 유형은 관계 포락선 함수가 특정 지점에서 $\pm\infty$ 으로 발산하는 불연속성을 지니는 경우로, $f'(x^*)=1$, $f''(x^*) \neq 0$ 인 경우이다. 두 번째 유형은 두 번 이상 미분 가능한 원함수 $y=f(x)$ 와 $x^*=f(x^*)$ 를 만족하는 x 에 대해, $f'(x^*)=1$ 이고 $f''(x)$ 가 $x=x^*$ 의 좌우에서 부호가 바뀌는 경우이다. 이 중 첫 번째 유형은 **일방 수렴성**이라는 새로운 개념을 제시해야 한다는 것에 주목할 필요가 있다.

3.2.1 특이적 일방 수렴성



Case 1.



Case 2.

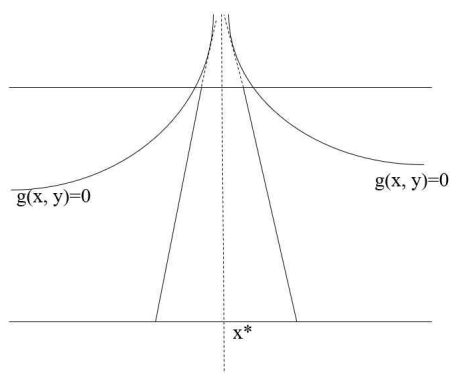
위 두 그래프는 일방 수렴성을 표현하는 경우를 두 가지로 나눈 것이다. 좌측 그림은 x^* 보다 적절히 큰 수에서 x_0 이 정해질 때만 x_n 이 x^* 으로 수렴하는 경우이며 우측 그림은 x^*

보다 작은 수에 대해서만 수렴성이 성립하는 경우이다. 이러한 형태의 수렴성이 만족되려면 관계 포락선 그래프가 불연속점을 갖되, 좌우가 각각 서로 다른 부호로 발산해야 한다. 즉, 앞선 비특이점의 경우에는 좌우 모두 수렴하는 경우와 모두 발산하는 경우로 수렴 여부가 나누어졌는데, 특이점의 경우에는 한쪽에서는 수렴하고 한쪽에서는 발산하는 반-수렴의 경우가 발생하는 것이다. 이러한 성질을 **일방 수렴성**이라 정의한다.

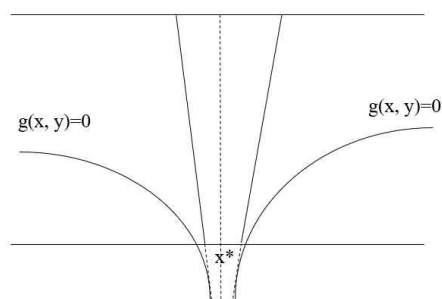
일방 수렴성이 만족되려면 관계 포락선에 특이점이 존재하고 그 특이점 좌우가 서로 다른 부호로 발산해야 한다. 이 경우 각 수식에 존재하는 분모를 0으로 만드는 $f'(x^*)=1$ 이 필요조건이 된다 그리고 관계 포락선이 $x=x^*$ 의 좌우에서 서로 다른 부호로 발산해야 한다.

관계 포락선의 정의에 따라 $\frac{dx}{dt} = \frac{-f''(t)(t-f(t))}{(1-f'(t))^2}$ 이고 $\frac{dy}{dt} = \frac{f''(t)}{(1-f'(t))^2}$ 임으로부터 $f''(t) \neq 0$ 일 때 $\frac{dx}{dt}$ 와 $\frac{dy}{dt}$ 의 부호 차이로 인해 두 번째 조건이 만족됨을 파악할 수 있다.

3.2.2 특이적 쌍방 (비)수렴성



Case 3.



Case 4.

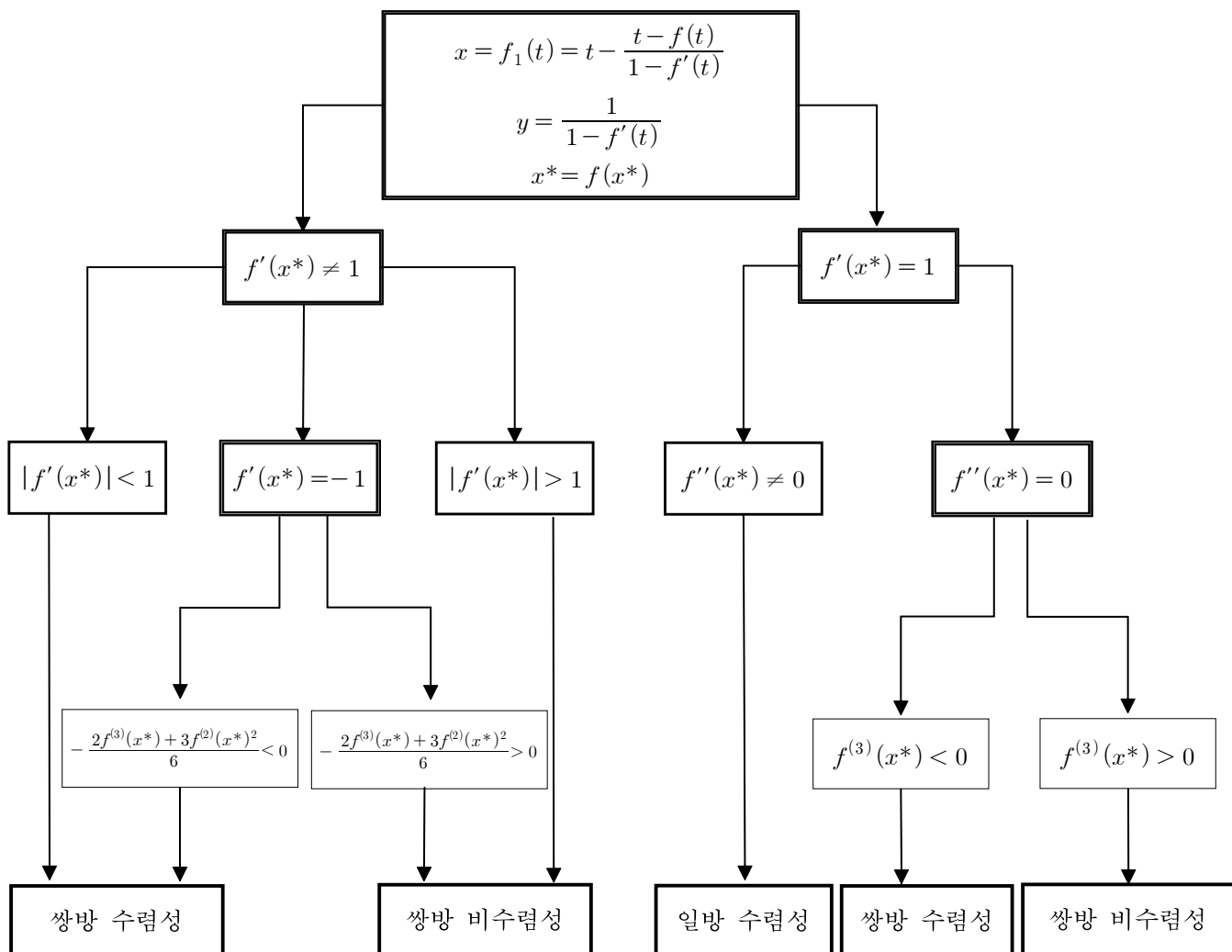
관계 포락선 함수가 특이점을 갖되, 일방 수렴성의 경우와 달리 같은 부호로 발산하는 경우에는 쌍방 수렴성이나 쌍방 비수렴성이 성립한다. 이때 $f'(x^*)=1$ 임은 동일하나, $f''(x^*)$ 가 좌우에서 부호가 바뀌는 변곡점이 된다는 것이 앞의 특이적 일방 수렴성과 구별되는 점이다.

좌측은 쌍방 수렴성이 성립하는 경우이다. $\frac{dx}{dt} = \frac{-f''(t)(t-f(t))}{(1-f'(t))^2}$ 이고 $\frac{dy}{dt} = \frac{f''(t)}{(1-f'(t))^2}$ 라는 관계 포락선의 정의를 다시 고려해보자. $y=f''(x)$ 가 $x=t=x^*$ 좌측에서 양수이고 우측에서 음수일 때는 관계 포락선의 y 좌표가 $x=x^*$ 좌우에서 증가하다 감소하는 Case.3의 사례에 대응됨을 알 수 있다. 반대로 $y=f''(x)$ 가 $x=t=x^*$ 좌측에서 음수고 우측에서 양수일 때 관계 포락선의 좌표가 감소하다 증가하는 Case 4.의 사례에 대응됨을 알 수 있다. 이 차이는 앞의 필요조건이 만족되고 $y=f(x)$ 가 세 번 이상 미분 가능하다고 전제할 때, $f^{(3)}(x^*) < 0$ 라면 Case 3, $f^{(3)}(x^*) > 0$ 라면 Case 4.라는 분류법으로 간단히 표현된다.

3.3. 수렴성 판단 알고리즘

다음은 지금까지 논의한 쌍방 수렴성, 쌍방 비수렴성, 조건부 쌍방 수렴성, 일방 수렴성

등을 판단하는 알고리즘 수형도를 나타낸 것이다. 원함수 $y=f(x)$ 는 세 번 이상 미분 가능한 것으로 전제한다.



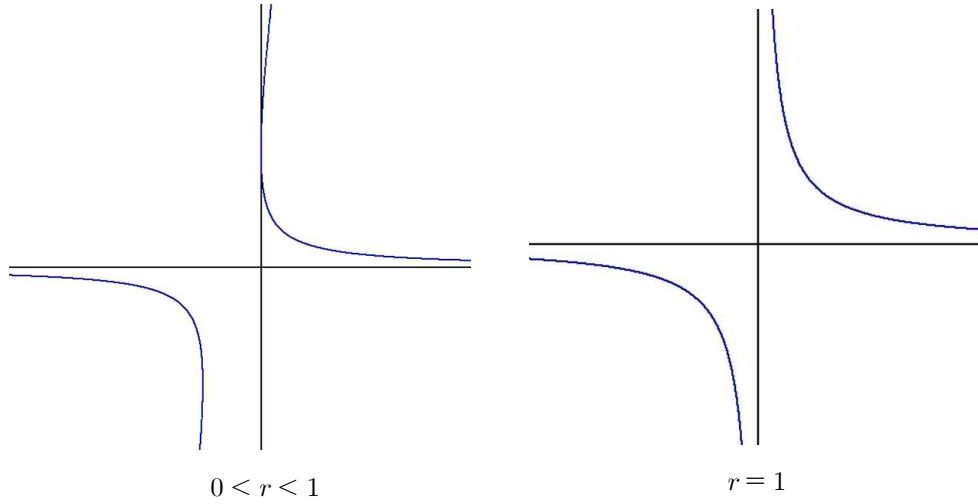
4. 로지스틱 사상의 수렴성 판단

로지스틱 사상이란 $x_{n+1} = rx_n(1-x_n)$, $x_0 \geq 0$, $r \geq 0$ 으로 정의되는 수열이다. 이 수열은 r 의 변화에 따라 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 의 수렴, 발산 여부가 달라진다. 이 챕터에서는 로지스틱 사상을 관계 포락선 변환해 분석함으로써 수열의 수렴, 발산 여부를 판단하는 예시를 보여주고자 한다. 우선 로지스틱 사상의 관계 포락선 변환은 정의에 따라 다음과 같이 나타난다.

REL T of Logistic Map

$$y = rx(1-x) \Rightarrow \begin{cases} x = t - \frac{rt^2 + (1-r)t}{2rt + 1 - r} \\ y = \frac{1}{2rt + 1 - r} \end{cases}$$

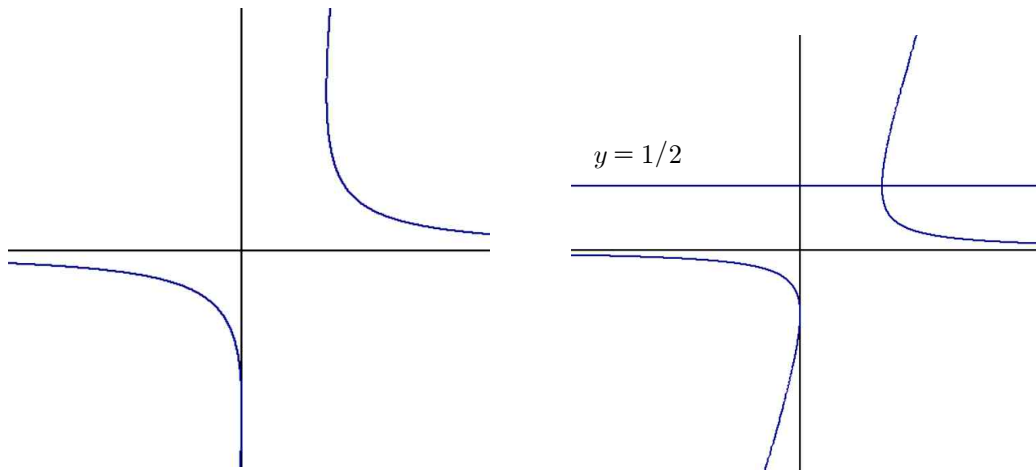
4.1. $0 < r < 1, r = 1$



좌측 그림은 $0 < r < 1$ 의 경우의 로지스틱 사상을 관계 포락선 변환한 것이며, 우측 그림은 $r = 1$ 일 때의 경우이다. 우선 전자의 경우 y 좌표가 양수인 점 하나, 음수인 점 하나씩에 수직 접선이 그려질 수 있는 모습을 띄고 있다. 그리고 $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ 를 계산해 y 좌표가 양수인 수직 접점의 좌표를 계산해보면 $(0, \frac{1}{1-r})$ 이다. 따라서 접점의 y 좌표가 $1/2$ 보다 크기 때문에 $0 < r < 1$ 에서의 로지스틱 사상은 $x = 0$ 과 어떠한 음수 μ 에서 존재성을 가지며, $x = 0$ 에서는 쌍방 수렴성을, $x = \mu$ 에서는 쌍방 비수렴성을 보인다.

우측 그림은 $r = 1$ 의 경우로서, 관계 포락선 함수가 $x = 0$ 인 지점에서 부호가 반대인 상태로 발산하고 있는 모습이다. 따라서 $r = 1$ 에서의 로지스틱 사상은 $x = 0$ 에서 우측으로부터의 일방 수렴성을 보인다.

4.2. $1 < r < 3, r = 3$

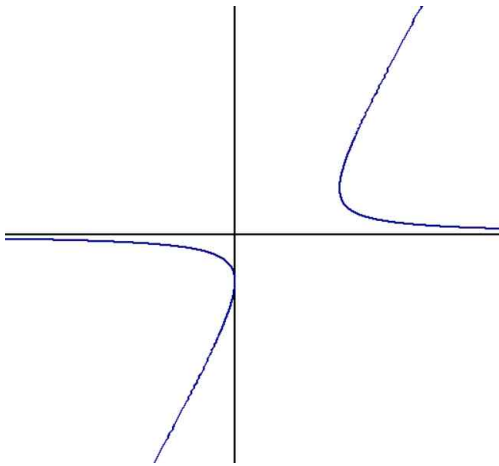


좌측 그림은 $1 < r < 3$ 일 때의 로지스틱 사상을 관계 포락선 변환한 것이다. 이 경우 $x = 0, 1 - \frac{1}{r}$ 에서 수직 접선이 형성되는 것을 볼 수 있다. $x = 0$ 일때는 물론 쌍방 비수렴

성을 지닌다. 한편 $x = 1 - \frac{1}{r}$ 일 때의 접점의 y 좌표는 $\frac{1}{r-1}$ 로서 $1 < r < 3$ 일 때 쌍방 수렴성을 만족함이 드러난다.

한편 우측 그림은 $r = 3$ 인 경우로 수직 접점의 y 좌표가 $1/2$ 이 되는 지점이 존재하는 경우이다. 이때 $f(x) = 3x(1-x)$ 이고 문제가 되는 $x^* = 2/3$ 이다. 앞서 제시된 비특이적 조건부 쌍방 수렴성 판단 기준을 도입해 $-\frac{2f^{(3)}(x^*) + 3f^{(2)}(x^*)^2}{6}$ 의 값을 계산하면, $-18 < 0$ 이 성립하므로, 쌍방 수렴성을 가짐을 파악할 수 있다.

4.3. $r > 3$



$r > 3$ 일 때 로지스틱 사상을 관계 포락선 변환하면 좌측 그림과 같은 형태를 지닌다. 이때로 앞선 경우와 같이 $x = 0, 1 - \frac{1}{r}$ 에서 수직 접선이 형성되며, $x = 0$ 에서는 쌍방 비수렴성이 성립한다. 그리고 $x = 1 - \frac{1}{r}$ 일 때 역시 접점의 y 좌표는 $\frac{1}{r-1}$ 로 $r > 3$ 일 때 그것은 $0 < \frac{1}{r-1} < \frac{1}{2}$ 의 범위를 지니므로 앞선 경우와 달리 두 수직 접점에서 모두 쌍방 비수렴성을 지니게 된다.