

1. 좌표평면에서 점 $A(1, -1)$ 을 지나고 법선벡터가 $\vec{n}=(1, 2)$ 인 직선이 점 $(3, a)$ 를 지날 때, 실수 a 의 값은?
- ① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

2. 좌표평면에서 방향벡터가 $\vec{u}=(1, 2)$ 인 직선 위의 두 점 A, B 에서 직선 $-x+1=\frac{y+3}{2}$ 에 내린 수선의 발을 각각 A', B' 이라 하자. $\overline{AB}=5$ 일 때, 선분 $A'B'$ 의 길이는?
- ① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3
④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

3. 두 직선

$$l_1 : x = \frac{y+2}{2}, l_2 : x+ky+2=0$$

에 대하여 다음 조건을 만족하는 상수 a, b 에 대하여 ab 의 값은?

- (가) 두 직선이 서로 평행할 때, 상수 k 의 값 a
(나) 두 직선이 서로 수직일 때, 상수 k 의 값 b

- ① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

4. 두 점 $A(2, 1), B(6, 1)$ 에 대하여 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$ 을 만족시키는 점 P 가 나타내는 도형의 길이는? [3점]
- ① 2π ② 3π ③ 4π
④ 6π ⑤ 10π

5. 수직선 위를 움직이는 점 P 의 시각 t 에서의 위치 $x=f(t)$ 가 $f(t)=4\sin\frac{\pi}{2}t+3\cos\frac{\pi}{2}t$ 이다. $t=5$ 에서의 점 P 의 가속도는?
- ① $-2\pi^2$ ② $-\pi^2$ ③ 0
④ π^2 ⑤ $2\pi^2$

6. 수직선 위를 움직이는 점 P 의 시각 t 에서의 위치 $x=f(t)$ 가 $f(t)=\sin 2t+\sqrt{3}\cos 2t$ 이다. 점 P 의 속력의 최댓값은?
- ① 2 ② $2\sqrt{2}$ ③ 4
④ $4\sqrt{2}$ ⑤ 8

7. 좌표평면 위를 움직이는 점 P 의 시각 $t(\pi \leq t < 2\pi)$ 에서의 위치 (x, y) 가

$$x = 2\sin t, y = t + \cos t$$

이다. 점 P 의 속도와 가속도를 각각 $\vec{v}, \vec{a}$ 라 할 때, 두 벡터 $\vec{v}, \vec{a}$ 가 서로 수직이 되도록 하는 모든 실수 t 의 개수는?

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

8. 좌표평면 위를 움직이는 점 P 의 시각 t 에서의 위치 (x, y) 가 $x = e^{2t}\cos t, y = e^{2t}\sin t$ 이다. 점 P 의 시각 t 에서의 가속도를 $\vec{a}$ 라 할 때, $|\vec{a}|^2 = me^{4t}$ 이다. 상수 m 의 값을 구하시오.

9. 좌표평면 위를 움직이는 점 $P(x, y)$ 의 시각 t 에서의 위치가 $x = \sqrt{3}(1-t^2)+2t, y = -2\sqrt{3}t+(1+t^2)$ 이다. $t=1$ 에서의 점 P 의 속도가 x 축 방향과 이루는 각의 크기를 θ 라고 할 때, $\cos^2\theta$ 의 값은?

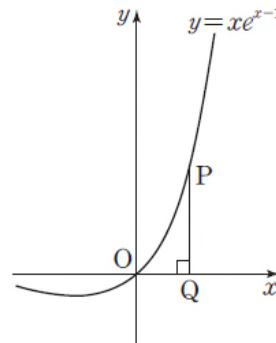
(단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)

- ① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{7}{8}$

10. 좌표평면 위를 움직이는 점 $P(x, y)$ 의 시각 t 에서의 위치가 $x = 2\sin t - 2\cos t, y = 3\sin t \cos t$ 일 때, 점 P 의 속력의 최댓값은?

- ① $\frac{8}{3}$ ② 3 ③ $\frac{10}{3}$
④ $\frac{11}{3}$ ⑤ 4

11. 그림과 같이 점 P 가 원점을 출발하여 곡선 $y = xe^{x-1}$ 을 따라 매초 4의 일정한 속력으로 움직인다. $x=1$ 일 때, 점 P 에서 x 축에 내린 수선의 발 Q 의 속력은?
(단, 점 P 는 x 좌표가 증가하는 방향으로 움직인다.)



- ① $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{3\sqrt{5}}{5}$
④ $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\sqrt{5}$

12. 좌표평면에서 두 점 $A(1, 2)$, $B(1, -2)$ 에 대하여 시각 t 에서의 점 P 의 위치가 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} \sin t + \overrightarrow{OB} \cos t$ 로 주어질 때, 점 P 의 속력의 최솟값을 구하시오. (단, O 는 원점이다.)

13. 좌표평면 위를 움직이는 점 $P(x, y)$ 의 시각 t 에서의 위치가 $x = 3\sqrt{2}e^t \cos t$, $y = 3\sqrt{2}e^t \sin t$ 일 때, $t=0$ 에서 $t=\alpha$ 까지 점 P 가 움직인 거리가 18이다. 실수 α 의 값은?

① $\ln 2$ ② $\ln 3$ ③ $\ln 4$
 ④ $\ln 5$ ⑤ $\ln 6$

14. $x > 0$ 에서 정의된 함수 $f(x) = \frac{x^2}{8} - \ln x$ 에 대하여 닫힌 구간 $[1, 2]$ 에서 곡선 $y = f(x)$ 의 길이는?

① $\frac{1}{4} + \ln 2$ ② $\frac{3}{8} + \ln 2$ ③ $\frac{1}{2} + \ln 2$
 ④ $\frac{1}{4} + 2 \ln 2$ ⑤ $\frac{3}{8} + 2 \ln 2$

15. 좌표평면 위를 움직이는 점 P 의 시각 $t (t > 0)$ 에서의 위치 (x, y) 가 $x = \ln t$, $y = \frac{1}{4} \left(t + \frac{4}{t} \right)$ 이다. 시각 $t=1$ 에서 $t=2$ 까지 점 P 가 움직인 거리는?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$
 ④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

16. 좌표평면 위를 움직이는 점 P 의 시각 $t (t \geq 0)$ 에서의 위치 (x, y) 가 $x = 3 \sin \pi t + 4 \cos \pi t$, $y = 3 \cos \pi t - 4 \sin \pi t$ 이다. 시각 $t=0$ 에서 $t=a$ 까지 점 P 가 움직인 거리가 20π 일 때, a 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

17. $x=0$ 에서 $x=6$ 까지 곡선 $y = \frac{1}{3}(x^2+2)^{\frac{3}{2}}$ 의 길이를 구하시오.

18. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x 에 대하여 $\{f(x) - 2f'(x)\}\{f(x) + 2f'(x)\} = 4$ 이다.

(나) $\int_0^3 f(x)dx = a$ (단, $a > 0$)

$x=0$ 에서 $x=3$ 까지 곡선 $y=f(x)$ 의 길이는?

- ① $\frac{a}{4}$ ② $\frac{a}{2}$ ③ a
 ④ $2a$ ⑤ $4a$

19. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t 에서의 위치 (x, y) 가 $x = e^t + e^{-t}$, $y = 2t$ 일 때, 시각 $t = \ln 2$ 에서 시각 $t = \ln 3$ 까지 점 P가 움직인 거리는?

- ① 1 ② $\frac{13}{12}$ ③ $\frac{7}{6}$
 ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{4}{3}$

20. 좌표평면 위를 움직이는 점 $P(x, y)$ 의 시각 t 에서의 위치가 $x = e^{-t} \cos t$, $y = e^{-t} \sin t$ 일 때, 점 P가 시각 $t=0$ 에서 시각 $t=a$ ($a > 0$)까지 움직인 거리를 $s(a)$ 라고 하자. 이때 $\lim_{a \rightarrow \infty} s(a)$ 의 값을 구하여라.

21. 실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖고 $f(0)=0$, $f(3)=4$ 를 만족시키는 모든 함수 $f(x)$ 에 대하여 $\int_0^3 \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx$ 의 최솟값은?

- ① 1 ② 3 ③ 5
 ④ 7 ⑤ 9

22. 양의 실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(t)$ 에 대하여 좌표평면 위를 움직이는 점 P 의 시각 $t(t \geq 1)$ 에서의 위치 (x, y) 가

$$\begin{cases} x = 2\ln t \\ y = f(t) \end{cases}$$

이다. 점 P 가 점 $(0, f(1))$ 로부터 움직인 거리가 s 가 될 때 시각 t 는 $t = \frac{s + \sqrt{s^2 + 4}}{2}$ 이고, $t = 2$ 일 때 점 P 의 속도는 $(1, \frac{3}{4})$ 이다. 시각 $t = 2$ 일 때 점 P 의 가속도를 $(-\frac{1}{2}, a)$ 라 할 때, $60a$ 의 값을 구하시오.

23. 좌표평면 위를 움직이는 점 P 의 시각 t 에서의 좌표 (x, y) 가

$$x = e^{-t} \cos t, \quad y = e^{-t} \sin t$$

로 나타내어질 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

(단, O 는 원점이다.) [4점]

| 보 기 |

ㄱ. 시각 $t = \pi$ 일 때, 점 P 는 x 축 위에 있다.

ㄴ. $\sum_{t=1}^{\infty} \overline{OP} = \frac{1}{e-1}$

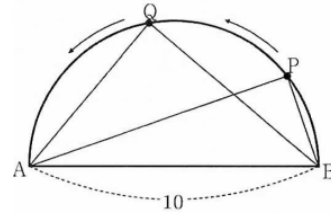
ㄷ. 점 P 의 가속도의 크기는 속력의 $\sqrt{2}$ 배이다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
 ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

24. 길이가 10인 선분 AB 를 지름으로 하는 반원이 있다. 그림과 같이 두 점 P, Q 가 점 B 에서 동시에 출발하여 다음 조건을 만족시키면서 반원 위를 움직인다.

(가) $\angle QAB = 2\angle PAB$

(나) 선분 BP 의 길이의 시간(초)에 대한 변화율은 $\frac{1}{2}$ 이다.



점 P 가 점 B 에서 출발하여 5초가 되는 순간 선분 AQ 의 길이가 시간(초)에 대한 변화율은 p 이다. $100p^2$ 의 값을 구하시오.

(단, $0 \leq \angle PAB < \frac{\pi}{4}$ 이다.)

25. 좌표평면에서 점 P 는 시각 $t=0$ 일 때 $(0, -1)$ 에서 출발하여 시각 t 에서의 속도가

$$\vec{v} = (2t, 2\pi \sin 2\pi t)$$

이고, 점 Q 는 시각 $t=0$ 일 때 출발하여 시각 t 에서의 위치가

$$Q(4\sin 2\pi t, |\cos 2\pi t|)$$

이다. 출발한 후 두 점 P, Q 가 만나는 횟수는? [4점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

정답 및 해설

1) 정답 ①

점 A(1, -1)을 지나고 법선벡터가 $\vec{n} = (1, 2)$ 인 직선의 방정식은

$$1 \times (x-1) + 2 \times (y+1) = 0$$

$$\text{즉 } x + 2y + 1 = 0$$

이 직선이 점 (3, a)를 지나므로 $3 + 2a + 1 = 0$

따라서 $a = -2$

2) 정답 ③

직선 AB의 방향벡터는 $\vec{u} = (1, 2)$ 이고 직선

$$-x + 1 = \frac{y+3}{2}, \text{ 즉 } \frac{x-1}{-1} = \frac{y+3}{2} \text{의 방향벡터를 } \vec{u}_1 \text{이}$$

라

하면 $\vec{u}_1 = (-1, 2)$ 이므로 두 직선이 이루는 각의 크기를

$$\theta \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right) \text{라 하면}$$

$$\cos \theta = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{u}_1|}{|\vec{u}| |\vec{u}_1|} = \frac{|(1, 2) \cdot (-1, 2)|}{\sqrt{1^2 + 2^2} \sqrt{(-1)^2 + 2^2}} = \frac{3}{5}$$

따라서 선분 A'B'의 길이는

$$\overline{A'B'} = \overline{AB} \cos \theta = 5 \times \frac{3}{5} = 3$$

3) 정답 ①

두 직선 $l_1 : x = \frac{y+2}{2}, l_2 : x + ky + 2 = 0$ 의 방향벡터

$\vec{u} = (1, 2)$, 법선벡터 $\vec{n} = (1, k)$ 이므로 조건 (가)에서 두 직선이 서로 평행할 때, $l_1 \parallel l_2$ 일 때 $\vec{u} \perp \vec{n}$ 이므로

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = (1, 2) \cdot (1, k) = 1 + 2k = 0$$

$$\therefore k = -\frac{1}{2}$$

조건 (나)에서 두 직선이 서로 수직일 때, $l_1 \perp l_2$ 일 때 $\vec{u}$

$$\parallel \vec{n} \text{이므로 } \frac{1}{1} = \frac{2}{k} \quad \therefore k = 2$$

따라서 $a = -\frac{1}{2}, b = 2$ 이므로 $ab = -1$

4) 정답 ③

P(x, y)라고 하면 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$ 에서

$$(x-2, y-1) \cdot (x-6, y-1) = 0$$

$$(x-2)(x-6) + (y-1)^2 = 0,$$

$$(x-4)^2 + (y-1)^2 = 4$$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 반지름의 길이가 2인 원이므로 구하는 길이는 $2\pi \times 2 = 4\pi$

5) 정답 ②

시간 t에서의 속도와 가속도를 각각 $v(t), a(t)$ 라고 하면

$$v(t) = f'(t) = 4 \cdot \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2}t - 3 \cdot \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2}t$$

$$= 2\pi \cos \frac{\pi}{2}t - \frac{3}{2}\pi \sin \frac{\pi}{2}t$$

$$a(t) = f''(t) = -\pi^2 \sin \frac{\pi}{2}t - \frac{3}{4}\pi^2 \cos \frac{\pi}{2}t$$

따라서 $t = 5$ 일 때

$$a(5) = -\pi^2 \sin \frac{5\pi}{2} - \frac{3}{4}\pi^2 \cos \frac{5\pi}{2} = -\pi^2$$

6) 정답 ③

$f(t) = \sin 2t + \sqrt{3} \cos 2t$ 에서 시간 t에서의 속도를 $v(t)$ 라고 하면

$$v(t) = f'(t) = 2 \cos 2t - 2\sqrt{3} \sin 2t$$

$$= 2(\cos 2t - \sqrt{3} \sin 2t)$$

$$= 4 \left(\frac{1}{2} \cos 2t - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2t \right)$$

$$= 4 \cos \left(2t + \frac{\pi}{3} \right)$$

따라서 속력 $|v(t)|$ 의 최댓값은 $\cos \left(2t + \frac{\pi}{3} \right) = 1$ 일 때 4이다.

7) 정답 ③

[해설]

$x = 2 \sin t, y = t + \cos t$ 에서

$$\frac{dx}{dt} = 2 \cos t, \frac{dy}{dt} = 1 - \sin t \text{이므로}$$

$$\vec{v} = (2 \cos t, 1 - \sin t)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2 \sin t, \frac{d^2y}{dt^2} = -\cos t \text{이므로}$$

$$\vec{a} = (-2 \sin t, -\cos t)$$

두 벡터 $\vec{v}, \vec{a}$ 가 서로 수직이라면 $\vec{v} \cdot \vec{a} = 0$ 이어야 하므로

$$(2 \cos t, 1 - \sin t) \cdot (-2 \sin t, -\cos t) = 0$$

$$-4 \sin t \cos t - \cos t + \sin t \cos t = 0$$

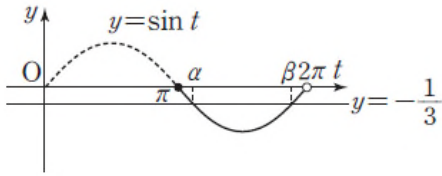
$$3 \sin t \cos t + \cos t = 0$$

$$\cos t (3 \sin t + 1) = 0$$

$$\cos t = 0 \text{ 또는 } \sin t = -\frac{1}{3}$$

$$(i) \cos t = 0 \text{일 때, } t = \frac{3\pi}{2}$$

$$(ii) \sin t = -\frac{1}{3} \text{일 때, 그림에서 } t = \alpha \text{ 또는 } t = \beta$$



(i), (ii)에서 구하는 모든 실수 t 의 개수는 3이다.

8) 답. $25 \ x = e^{2t} \cos t, \ y = e^{2t} \sin t$

$$\frac{dx}{dt} = 2e^{2t} \cos t - e^{2t} \sin t = e^{2t} (2 \cos t - \sin t),$$

$$\frac{dy}{dt} = 2e^{2t} \sin t + e^{2t} \cos t = e^{2t} (2 \sin t + \cos t)$$

이므로

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2e^{2t} (2 \cos t - \sin t) + e^{2t} (-2 \sin t - \cos t)$$

$$= e^{2t} (-4 \sin t + 3 \cos t),$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2e^{2t} (2 \sin t + \cos t) + e^{2t} (2 \cos t - \sin t)$$

$$= e^{2t} (3 \sin t + 4 \cos t)$$

즉 $\vec{a} = (e^{2t} (-4 \sin t + 3 \cos t), e^{2t} (3 \sin t + 4 \cos t))$ 이므로

$$|\vec{a}|^2 = e^{4t} (-4 \sin t + 3 \cos t)^2 + e^{4t} (3 \sin t + 4 \cos t)^2 = 25e^{4t}$$

따라서 $m = 25$

9) 정답 ③

$x = \sqrt{3}(1-t^2) + 2t, \ y = -2\sqrt{3}t + (1+t^2)$ 에서

$$\frac{dx}{dt} = -2\sqrt{3}t + 2, \ \frac{dy}{dt} = 2t - 2\sqrt{3}$$

$t = 1$ 일 때, $\frac{dx}{dt} = -2\sqrt{3} + 2, \ \frac{dy}{dt} = 2 - 2\sqrt{3}$ 이므로

$t = 1$ 일 때, $\vec{v} = (-2\sqrt{3} + 2, \ 2 - 2\sqrt{3})$

이때, θ 는 예각이므로

$$\tan \theta = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-2\sqrt{3} + 2}{-2\sqrt{3} + 2} = 1 \text{에서 } \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{따라서 } \cos^2 \theta = \cos^2 \frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{1}{2}$$

10) 정답 ④

시각 t 에서의 속도를 $\vec{v}$ 라고 하면

$$\vec{v} = (2 \cos t + 2 \sin t, \ 3(\cos^2 t - \sin^2 t))$$

즉, $\vec{v} = (2 \cos t + 2 \sin t, \ 3 \cos 2t)$ 이므로

$$|\vec{v}| = \sqrt{4(\cos t + \sin t)^2 + (3 \cos 2t)^2} \\ = \sqrt{4 + 8 \sin t \cos t + 9 \cos^2 2t}$$

이때, $f(t) = 4 + 8 \sin t \cos t + 9 \cos^2 2t$ 라고 하면

$$f(t) = 4 + 8 \sin t \cos t + 9 \cos^2 2t$$

$$= 4 + 4 \sin 2t + 9(1 - \sin^2 2t)$$

$$= -9 \sin^2 2t + 4 \sin 2t + 13$$

이므로 $k = \sin 2t \ (-1 \leq k \leq 1)$ 로 놓으면

$$g(k) = -9k^2 + 4k + 13 = -9\left(k - \frac{2}{9}\right)^2 + \frac{121}{9}$$

따라서 $g(k)$ 는 $k = \frac{2}{9}$ 일 때, 최댓값 $\frac{121}{9}$ 을 가지므로

$$\text{구하는 속력의 최댓값은 } \sqrt{\frac{121}{9}} = \frac{11}{3}$$

11) 정답 ④

[해설]

점 $P(x, y)$ 에 대하여 점 Q 의 속력은 $\left| \frac{dx}{dt} \right|$ 이다.

점 P 가 매초 4의 일정한 속력으로 움직이므로

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = 4$$

$$\left| \frac{dx}{dt} \right| \times \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = 4 \text{이}$$

고

$$\frac{dy}{dx} = e^{x-1} + xe^{x-1} = (x+1)e^{x-1}$$

이므로

$$\left| \frac{dx}{dt} \right| = \frac{4}{\sqrt{1 + (x+1)^2 e^{2(x-1)}}}$$

따라서 $x = 1$ 일 때, 점 Q 의 속력은

$$\left| \frac{dx}{dt} \right| = \frac{4}{\sqrt{1+4}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

12) 정답 $\sqrt{2}$

시각 t 에서의 점 P 의 위치를 (x, y) 라고 하면

$\vec{OP} = \vec{OA} \sin t + \vec{OB} \cos t$ 에서

$$(x, y) = (1, 2) \sin t + (1, -2) \cos t \\ = (\sin t + \cos t, \ 2 \sin t - 2 \cos t)$$

$x = \sin t + \cos t, \ y = 2 \sin t - 2 \cos t$ 에서

$$\frac{dx}{dt} = \cos t - \sin t, \ \frac{dy}{dt} = 2 \cos t + 2 \sin t$$

따라서 점 P 의 속력은

$$\sqrt{(\cos t - \sin t)^2 + (2 \cos t + 2 \sin t)^2} = \sqrt{5 + 6 \sin t \cos t} \\ = \sqrt{5 + 3 \sin 2t}$$

그런데 $-1 \leq \sin 2t \leq 1$ 이므로 속력은 $\sin 2t = -1$,

즉, $t = \frac{(4n-1)\pi}{4}$ (n 은 자연수)일 때, 최솟값 $\sqrt{2}$ 를

갖는다.

13) 정답 ③

$x = 3\sqrt{2}e^t \cos t$, $y = 3\sqrt{2}e^t \sin t$ 에서

$$\frac{dx}{dt} = 3\sqrt{2}e^t(\cos t - \sin t), \quad \frac{dy}{dt} = 3\sqrt{2}e^t(\sin t + \cos t) \text{이}$$

므로 $t=0$ 에서 $t=\alpha$ 까지 점 P가 움직인 거리를 s 라고 하면

$$s = \int_0^\alpha \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

$$= \int_0^\alpha 3\sqrt{2}e^t \cdot \sqrt{(\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2} dt$$

$$= \int_0^\alpha 3\sqrt{2}e^t \cdot \sqrt{2} dt = 6 \left[e^t \right]_0^\alpha = 6(e^\alpha - e^0)$$

$$= 6(e^\alpha - 1) = 18$$

$$e^\alpha - 1 = 3, \quad e^\alpha = 4$$

따라서 $\alpha = \ln 4$

14) 정답 ②

$$f(x) = \frac{x^2}{8} - \ln x \text{에서 } f'(x) = \frac{x}{4} - \frac{1}{x}$$

따라서 닫힌 구간 $[1, 2]$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 의 길이는

$$\int_1^2 \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx = \int_1^2 \sqrt{1 + \left(\frac{x}{4} - \frac{1}{x}\right)^2} dx$$

$$= \int_1^2 \sqrt{\left(\frac{x}{4} + \frac{1}{x}\right)^2} dx = \int_1^2 \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{x}\right) dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{8} + \ln x \right]_1^2 = \frac{4}{8} + \ln 2 - \frac{1}{8}$$

$$= \frac{3}{8} + \ln 2$$

15) 정답 ③

[해설]

$$x = \ln t, \quad y = \frac{1}{4}\left(t + \frac{4}{t}\right) \text{에서}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{4}{t^2}\right)$$

시각 $t=1$ 에서 $t=2$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_1^2 \sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2 + \left\{\frac{1}{4}\left(1 - \frac{4}{t^2}\right)\right\}^2} dt$$

$$= \int_1^2 \sqrt{\frac{1}{t^2} + \frac{1}{16}\left(1 - \frac{8}{t^2} + \frac{16}{t^4}\right)} dt$$

$$= \int_1^2 \sqrt{\frac{1}{16}\left(1 + \frac{8}{t^2} + \frac{16}{t^4}\right)} dt$$

$$= \int_1^2 \sqrt{\left\{\frac{1}{4}\left(1 + \frac{4}{t^2}\right)\right\}^2} dt$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{4}\left(1 + \frac{4}{t^2}\right) dt$$

$$= \frac{1}{4}\left[t - \frac{4}{t}\right]_1^2$$

$$= \frac{1}{4}\{(2-2) - (1-4)\}$$

$$= \frac{3}{4}$$

16) 정답 ④

[해설]

$x = 3 \sin \pi t + 4 \cos \pi t$, $y = 3 \cos \pi t - 4 \sin \pi t$ 에서

$$\frac{dx}{dt} = 3\pi \cos \pi t - 4\pi \sin \pi t,$$

$$\frac{dy}{dt} = -3\pi \sin \pi t - 4\pi \cos \pi t$$

시각 $t=0$ 에서 $t=a$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^a \sqrt{(3\pi \cos \pi t - 4\pi \sin \pi t)^2 + (-3\pi \sin \pi t - 4\pi \cos \pi t)^2} dt$$

$$= \int_0^a \sqrt{25\pi^2(\sin^2 \pi t + \cos^2 \pi t)} dt$$

$$= \int_0^a 5\pi dt$$

$$= [5\pi t]_0^a = 5a\pi$$

따라서 $5a\pi = 20\pi$ 이므로

$$a = 4$$

17) 정답 78

[해설]

{출제 의도}

곡선의 길이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

{풀이}

$$y = \frac{1}{3}(x^2 + 2)^{\frac{3}{2}} \text{에서}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2}(x^2 + 2)^{\frac{1}{2}} \times (x^2 + 2)'$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{3}{2}(x^2 + 2)^{\frac{1}{2}} \times 2x$$

$$= x(x^2 + 2)^{\frac{1}{2}}$$

따라서 $x=0$ 에서 $x=6$ 까지 곡선 $y = \frac{1}{3}(x^2 + 2)^{\frac{3}{2}}$ 의 길이는

$$\int_0^6 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^6 \sqrt{1 + \left\{x(x^2 + 2)^{\frac{1}{2}}\right\}^2} dx$$

$$= \int_0^6 \sqrt{1 + x^2(x^2 + 2)} dx$$

$$= \int_0^6 \sqrt{x^4 + 2x^2 + 1} dx$$

$$= \int_0^6 \sqrt{(x^2 + 1)^2} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^6 |x^2 + 1| dx \\
&= \int_0^6 (x^2 + 1) dx \\
&= \left[\frac{1}{3}x^3 + x \right]_0^6 \\
&= \frac{1}{3} \times 6^3 + 6 \\
&= 78
\end{aligned}$$

18) 정답 ②

[해설]

조건 (가)에 의하여 $\{f(x)\}^2 - 4\{f'(x)\}^2 = 4$ 이므로

$$4\{f'(x)\}^2 = \{f(x)\}^2 - 4$$

$\{f(x)\}^2 - 4 \geq 0$ 에서 $\{f(x) - 2\}\{f(x) + 2\} \geq 0$ 이므로

$$f(x) \leq -2 \text{ 또는 } f(x) \geq 2$$

조건 (나)에서 $a > 0$ 이고 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속
이므로

$$f(x) \geq 2$$

$$1 + \{f'(x)\}^2 = \frac{1}{4}\{f(x)\}^2 \text{이므로 } x = 0 \text{에서 } x = 3 \text{까지 곡선}$$

$y = f(x)$ 의 길이는

$$\begin{aligned}
\int_0^3 \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx &= \int_0^3 \sqrt{\frac{1}{4}\{f(x)\}^2} dx \\
&= \int_0^3 \frac{1}{2}|f(x)| dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^3 f(x) dx \\
&= \frac{a}{2}
\end{aligned}$$

19) 정답 ③

$$x = e^t + e^{-t} \text{에서 } \frac{dx}{dt} = e^t - e^{-t},$$

$$y = 2t \text{에서 } \frac{dy}{dt} = 2 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 &= (e^t - e^{-t})^2 + 2^2 \\
&= (e^{2t} - 2 + e^{-2t}) + 4 = (e^t + e^{-t})^2
\end{aligned}$$

따라서 시각 $t = \ln 2$ 에서 시각 $t = \ln 3$ 까지 점 P가 움직인
거리를 s 라 하면

$$\begin{aligned}
s &= \int_{\ln 2}^{\ln 3} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\
&= \int_{\ln 2}^{\ln 3} \sqrt{(e^t + e^{-t})^2} dt = \int_{\ln 2}^{\ln 3} (e^t + e^{-t}) dt \\
&= \left[e^t - e^{-t} \right]_{\ln 2}^{\ln 3} = (e^{\ln 3} - e^{-\ln 3}) - (e^{\ln 2} - e^{-\ln 2})
\end{aligned}$$

$$= \left(3 - \frac{1}{3}\right) - \left(2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{6}$$

20) 정답 $\sqrt{2}$

[해설]

$$\frac{dx}{dt} = -e^{-t} \cos t - e^{-t} \sin t$$

$$= -e^{-t}(\cos t + \sin t)$$

$$\frac{dy}{dt} = -e^{-t} \sin t + e^{-t} \cos t$$

$$= e^{-t}(\cos t - \sin t) \quad \dots\dots ㉑$$

$t = 0$ 에서 $t = a$ 까지 점 P가 움직인 거리 $s(a)$

는

$$\begin{aligned}
s(a) &= \int_0^a \sqrt{\{-e^{-t}(\cos t + \sin t)\}^2 + \{e^{-t}(\cos t - \sin t)\}^2} dt \\
&= \int_0^a \sqrt{2} e^{-t} dt = \sqrt{2} [-e^{-t}]_0^a \\
&= -\sqrt{2}(e^{-a} - 1) \quad \dots\dots ㉒
\end{aligned}$$

따라서 구하는 극한값은

$$\lim_{a \rightarrow \infty} s(a) = \lim_{a \rightarrow \infty} \{-\sqrt{2}(e^{-a} - 1)\} = \sqrt{2}$$

$\dots\dots ㉓$

단계	채점 요소	배점 비율
㉑	$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ 를 각각 구한다.	30%
㉒	움직인 거리 $s(a)$ 를 구한다.	50%
㉓	극한값을 구한다.	20%

21) 정답 ③

$$\int_0^3 \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx \text{는 } 0 \leq x \leq 3 \text{에서 곡선}$$

$y = f(x)$ 의 길이를 의미하므로 그 최솟값은
(0, 0), (3, 4)을 잇는 선분의 길이와 같다.

따라서 구하는 최솟값은 두 점 사이의 거리와 같다.

22) 정답 15

[해설]

{출제 의도}

좌표평면 위를 움직이는 점이 움직인 거리와 속도, 가속도
를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

{풀이}

$$t = \frac{s + \sqrt{s^2 + 4}}{2} \text{에서 } 2t - s = \sqrt{s^2 + 4}, 4t^2 - 4ts = 4 \text{이}$$

므로

$$s = t - \frac{1}{t} \quad \dots\dots ㉑$$

$$x = 2 \ln t, y = f(t) \text{에서 } \frac{dx}{dt} = \frac{2}{t}, \frac{dy}{dt} = f'(t) \text{이므로 시각 } t$$

에서의 속도는 $\left(\frac{2}{t}, f'(t)\right)$ 이고,

가속도는 $\left(-\frac{2}{t^2}, f''(t)\right)$ 이다.

$t=2$ 일 때, 점 P의 속도가 $\left(1, \frac{3}{4}\right)$ 이므로

$$f'(2) = \frac{3}{4} \quad \dots\dots\textcircled{D}$$

$$\begin{aligned} s &= \int_1^t \sqrt{\left(\frac{dx}{dk}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dk}\right)^2} dk \\ &= \int_1^t \sqrt{\left(\frac{2}{k}\right)^2 + \{f'(k)\}^2} dk = t - \frac{1}{t} \quad (\textcircled{D} \text{에 의해}) \end{aligned}$$

양변을 t 에 대하여 미분하면

$$\sqrt{\left(\frac{2}{t}\right)^2 + \{f'(t)\}^2} = 1 + \frac{1}{t^2}, \quad \left(\frac{2}{t}\right)^2 + \{f'(t)\}^2 = \left(1 + \frac{1}{t^2}\right)^2$$

$$\{f'(t)\}^2 = \left(1 - \frac{1}{t^2}\right)^2$$

$$f'(T) = 1 - \frac{1}{t^2} \quad (\textcircled{D} \text{에 의해})$$

$$f''(t) = \frac{2}{t^3} \text{이므로 } a = f''(2) = \frac{1}{4}$$

$$\text{따라서 } 60a = 60 \times \frac{1}{4} = 15$$

23) 정답 ⑤

ㄱ. $t=\pi$ 일 때, $x=e^{-\pi}\cos\pi=-e^{-\pi}$, $y=e^{-\pi}\sin\pi=0$ 이므로
시각 $t=\pi$ 일 때, 점 P의 좌표는 $(e^{-\pi}, 0)$ 이므로
점 P는 x 축 위에 있다.

(참)

$$\begin{aligned} \text{ㄴ. } \overline{OP} &= \sqrt{(e^{-t}\cos t)^2 + (e^{-t}\sin t)^2} \\ &= e^{-t}\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = e^{-t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{즉, } \sum_{t=1}^{\infty} \overline{OP} &= \sum_{t=1}^{\infty} e^{-t} = \sum_{t=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^t = \frac{\frac{1}{e}}{1 - \frac{1}{e}} = \frac{1}{e-1} \end{aligned}$$

(참)

$$\begin{aligned} \text{ㄷ. } \frac{dx}{dt} &= (e^{-t})' \cos t + e^{-t} (\cos t)' \\ &= -e^{-t} \cos t - e^{-t} \sin t \\ &= -e^{-t} (\cos t + \sin t) \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= (-e^{-t})' (\cos t + \sin t) + (-e^{-t}) (\cos t + \sin t)' \\ &= e^{-t} (\cos t + \sin t) - e^{-t} (-\sin t + \cos t) \\ &= 2e^{-t} \sin t \\ \frac{dy}{dt} &= (e^{-t})' \sin t + e^{-t} (\sin t)' \\ &= -e^{-t} \sin t + e^{-t} \cos t \\ &= -e^{-t} (\sin t - \cos t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dt^2} &= (-e^{-t})' (\sin t - \cos t) + (-e^{-t}) (\sin t - \cos t)' \\ &= e^{-t} (\sin t - \cos t) - e^{-t} (\cos t + \sin t) \\ &= -2e^{-t} \cos t \end{aligned}$$

이므로 점 P의 시각 t 에서의 속력은

$$\begin{aligned} &\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \\ &= \sqrt{\{-e^{-t}(\cos t + \sin t)\}^2 + \{-e^{-t}(\sin t - \cos t)\}^2} \\ &= e^{-t} \sqrt{2(\sin^2 t + \cos^2 t)} \\ &= \sqrt{2} e^{-t} \end{aligned}$$

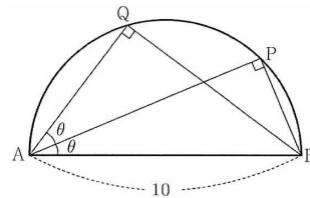
이고 점 P의 시각 t 에서의 가속도의 크기는

$$\begin{aligned} &\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2} \\ &= \sqrt{(2e^{-t}\sin t)^2 + (-2e^{-t}\cos t)^2} \\ &= 2e^{-t} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} \\ &= 2e^{-t} \end{aligned}$$

즉 점 P의 가속도의 크기는 속력의 $\sqrt{2}$ 배이다.
(참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

24) 정답 25



$\angle PAB = \theta$ 라 하면 $\angle QAB = 2\theta$ 이므로

$$\overline{BP} = 10\sin\theta, \quad \overline{AQ} = 10\cos 2\theta$$

조건 (나)에서 $\overline{BP}$ 의 시간에 대한 변화율은

$$\frac{d}{dt} \overline{BP} = 10\cos\theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} \text{에서 } \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{20\cos\theta}$$

$\overline{AQ}$ 의 시간에 대한 변화율은

$$\begin{aligned} p &= \frac{d}{dt} \overline{AQ} = -20\sin 2\theta \frac{d\theta}{dt} \\ &= -40\sin\theta \cos\theta \frac{d\theta}{dt} \\ &= -2\sin\theta \end{aligned}$$

$$t=5\text{일 때, } \overline{BP} = \frac{1}{2} \times 5 = \frac{5}{2} = 10\sin\theta \text{이므로 } \sin\theta = \frac{1}{4}$$

$$\text{따라서 } p = -2 \times \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} \text{이므로 } 100p^2 = 25$$

25) 정답 ②

시각 t 에서의 점 P의 속도가 $\vec{v} = (2t, 2\pi \sin 2\pi t)$ 이므로
시각 t 에서의 점 P의 위치를 (x, y) 라 할 때,

$$x = 0 + \int_0^t 2s \, ds = [s^2]_0^t = t^2$$

$$y = -1 + \int_0^t 2\pi \sin 2\pi s \, ds = -1 + \int_0^{2\pi t} \sin u \, du = -1 + [-\cos u]_0^{2\pi t}$$

$= -\cos 2\pi t$ ($2\pi s = u$ 로 치환하면 $2\pi ds = du$) 이므로

점 P의 위치는 $(x, y) = (t^2, -\cos 2\pi t)$ 이다.

점 P와 Q가 만나기 위해서는 각각의 x 좌표와 y 좌표가 같아야 하므로

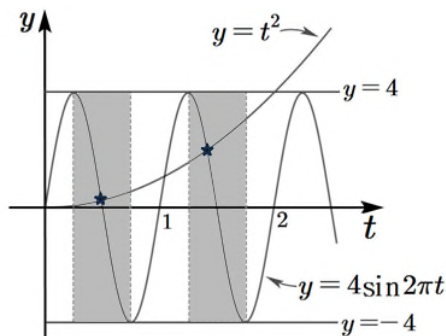
① (P의 x 좌표) = (Q의 x 좌표), $t^2 = 4\sin 2\pi t \cdots \cdots \textcircled{A}$

② (P의 y 좌표) = (Q의 y 좌표) 일 때

$-\cos 2\pi t = |\cos 2\pi t|$ 이므로

$\cos 2\pi t \leq 0 \cdots \cdots \textcircled{B}$

①과 ②조건을 만족하는 t 좌표를 구하기 위하여 그래프를 그려보면 다음 그림과 같다.



조건을 만족하는 교점의 개수가 2개이므로 출발 후 P와 Q는 2회 만난다.