자이고사 1회

수학 영역 (나형) 해설

★ 1페이지 ★

1. $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{8}$. ③

2. $\to \frac{3n^4}{n^4}=3$. ⑤

3. $A=B$ 이므로 $a=5, b=1$. ②

4. $g(f(f(1)))=g(f(2))=g(2)=5$. ⑤

5. q에서 $x \le 0$ 또는 $x \ge 2$이므로 a의 최솟값은 2. ④

6. $f'(x)=3x^2-12=0$ 에서 $x=\pm 2$이므로 $f(2)=0$ 또는 $f(-2)=0$이어야 한다. $a=\pm 16$. ①

7. $\sum_{k=1}^{5} a_k^2 - 2\sum_{k=1}^{5} a_k + \sum_{k=1}^{5} 1 = 5-20+5=-10$. ①

★ 2페이지 ★

8. $\frac{3}{x+3}=\frac{-x}{x+3}+1$이므로 $m=1$. ①

9. $2x-4 \ge 0$에서 $a=2$이고, $x=2$를 대입하면 $b=3$. ②

10. $=\lim_{x\to 1-} f(x) + \lim_{x\to -1+} f(x) = 2+0=2$. ④

11. $-3 \le x \le 4$로 8개. ④

12. $P(A)=\frac{1}{4}$, $P(B)=\frac{5}{12}$, $P(B^C)=\frac{7}{12}$. ⑤

13. $\frac{\log_5 1600-2}{\log_5 10-1}=2\times\frac{\log_5 40-1}{\log_5 10-1}=2\times\frac{\log_5 8}{\log_5 2}=2\times\log_2 8=6$. ③

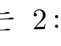
14. ‘민감도’ $=\frac{50}{60}$, ‘특이도’ $=\frac{48}{60}$, $\frac{50+48}{60}=\frac{49}{30}$. ②

15. 첫 항을 a, 공차를 d라 하자. $a_3a_4=(a+2d)(a+3d)$, $a_2a_5+18=(a+d)(a+4d)+18$이므로 $a^2+5ad+6d^2=a^2+5ad+4d^2+18$에서 $d^2=9$ $\therefore d=\pm 3$.
$\sum_{k=1}^{6} a_k=6a+15d=15$에서 $d=3$이라면 $a<0$이므로 $d=-3$이고, 대입하면 $a=10$.
$\therefore a_1+a_3+a_5=3a+6d=12$. ①

16. $v(t)=3t^2+2at+b$, $a(t)=6t+2a$이므로 $v(t)+a(t)=3t^2+(2a+6)t+2a+b$이다. 이 방정식의 두 근이 2와 4이므로 근과 계수의 관계를 사용하면 $-\frac{2a+6}{3}=2+4$, $\frac{2a+b}{3}=2\times 4$
$\therefore a=-12$, $b=48$, $a+b=36$. ③

17. $f'(x)=3ax^2$이므로 $\{f(x)\}^2=\{f'(x)\}^3+xf'(x)+c$에서 $a^2x^6+2abx^3+b^2=27a^3x^6+3ax^3+c$.
이 식이 항등식이므로 $a^2=27a^3$, $2ab=3a$, $b^2=c$ $\therefore a=\frac{1}{27}$, $b=\frac{3}{2}$, $c=\frac{9}{4}$, $\frac{1}{abc}=8$. ①

18. $a+b\le b+c<c+a$를 정리하면 $b<a\le c$이다. 이때 $b<a<c$가 되는 경우의 수는 ${}_6\mathrm{C}_3=20$이고, $b<a=c$가 되는 경우의 수는 ${}_6\mathrm{C}_2=15$이다. 전체 경우의 수는 $6\times 6\times 6=216$이므로 주어진 조건을 만족시킬 확률은 $\frac{20+15}{216}=\frac{35}{216}$. ②

19. $\angle E_1B_1C_1=60^\circ$이므로 삼각형 $E_1B_1C_1$은 정삼각형이다. $\overline{A_2E_2}=k$, $\overline{A_2B_2}=\sqrt{3}k$라고 하면 $\angle A_2B_1B_2=60^\circ$이므로 $\overline{B_1B_2}=k$이다. $\overline{A_1E_1}=2k=1$에서 $k=\frac{1}{2}$이고, 선분 $\overline{A_1E_1}$과 $\overline{A_2E_2}$의 길이비는 $2:1$, 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$과 $A_2B_2C_2D_2$의 넓이비는 $4:1$이다.
한편  모양 도형은 좌우 대칭이고, 그 중 한쪽의 넓이(두 선분 A_1B_1, A_1E_1과 호 E_1B_1로 둘러싸인 부분)는 (직사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 넓이) - (삼각형 $E_1C_1D_1$의 넓이) - (부채꼴 $B_1E_1C_1$의 넓이)와 같다. 따라서 $S_1=2\times\left\{\left(2\times\sqrt{3}\right)-\left(\frac{1}{2}\times 1\times\sqrt{3}\right)-\left(\frac{1}{6}\times 2^2\pi\right)\right\}=3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi$이다.

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi}{1-\frac{1}{4}}=4\sqrt{3}-\frac{16}{9}\pi.$$ ④

20. (가) : (1)의 ㄴ)에서 $(3a''+1)+(3b'+2)+3c'=3n$이고, $a''+b'+c'=n-1$이다. 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 순서쌍 (a'', b', c')의 개수와 같으므로 (가) = ${}_3\mathrm{H}_{n-1}$이다.

(나) : (2)의 ㄴ)에서 $3a''+(3b'+1)+3c'=3n-2$이고, $a''+b'+c'=n-1$이다. (가)와 같은 방법으로 (나) = ${}_3\mathrm{H}_{n-1}$이다.

(다) : a_n은 $n\geq 2$일 때 ${}_3\mathrm{H}_n+4\times{}_3\mathrm{H}_{n-1}+{}_3\mathrm{H}_{n-2}$이고, $n=1$일 때 ${}_3\mathrm{H}_1+4\times{}_3\mathrm{H}_0$이다.

$\sum_{n=1}^{8}a_n$은 다음과 같이 항 별로 나누어 더해 구할 수 있다.

$$\begin{array}{lcl}
a_1 & = & {}_3\mathrm{H}_1+4\times{}_3\mathrm{H}_0 \\
a_2 & = & {}_3\mathrm{H}_2+4\times{}_3\mathrm{H}_1+{}_3\mathrm{H}_0 \\
a_3 & = & {}_3\mathrm{H}_3+4\times{}_3\mathrm{H}_2+{}_3\mathrm{H}_1 \\
\vdots & & \vdots \\
a_6 & = & {}_3\mathrm{H}_6+4\times{}_3\mathrm{H}_5+{}_3\mathrm{H}_4 \\
a_7 & = & {}_3\mathrm{H}_7+4\times{}_3\mathrm{H}_6+{}_3\mathrm{H}_5 \\
a_8 & = & {}_3\mathrm{H}_8+4\times{}_3\mathrm{H}_7+{}_3\mathrm{H}_6 \\
\hline
\sum_{n=1}^{8}a_n & = & {}_3\mathrm{H}_8+5\times{}_3\mathrm{H}_7+6\times{}_3\mathrm{H}_6+6\times{}_3\mathrm{H}_5+\cdots+6\times{}_3\mathrm{H}_2+6\times{}_3\mathrm{H}_1+5\times{}_3\mathrm{H}_0
\end{array}$$

$\therefore \sum_{n=1}^{8}a_n=6\sum_{n=1}^{6}{}_3\mathrm{H}_n+{}_3\mathrm{H}_8+5\times{}_3\mathrm{H}_7+5\times{}_3\mathrm{H}_0$이므로 (다) = ${}_3\mathrm{H}_8+5\times{}_3\mathrm{H}_7+5\times{}_3\mathrm{H}_0$이다.

$f(6)+g(5)+r={}_3\mathrm{H}_5+{}_3\mathrm{H}_4+{}_3\mathrm{H}_8+5\times{}_3\mathrm{H}_7+5\times{}_3\mathrm{H}_0=21+15+45+5\times36+5=266$. ⑤

★ 5페이지 ★

21. (가)에 $n=1$을 대입하면 $f(1)=f(0)f(1)$ $\therefore f(1)=0$ 또는 $f(0)=1$ ⋯⋯⋯ ㉠
(가)에 $n=2$를 대입하면 $f(2)=f(0)f(1)+f(1)f(2)=f(1)+f(1)f(2)$이므로
$f(2)-f(1)=f(1)f(2)$ ⋯⋯⋯⋯ ㉡
$n=3, 4$를 대입하면 같은 방법으로
$f(3)-f(2)=f(2)f(3)$ ⋯⋯⋯⋯ ㉢
$f(4)-f(3)=f(3)f(4)$ ⋯⋯⋯⋯ ㉣

ㄱ.
$f(1)=0$이라면 ㉡에서 $f(2)=0$, ㉢에서 $f(3)=0$, ㉣에서 $f(4)=0$
따라서 $f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=0$인데 $f(x)$가 사차함수이므로 5개 이상의 근을 가질 수는 없고, $f(0)\neq 0$이다. (참)

ㄴ.

(나)에 $m=2$를 대입하면 $f(3)-f(2)=k$, $m=3$을 대입하면 $f(4)-f(3)=k$

이때 ㉢과 ㉣에서 $k=f(2)f(3)=f(3)f(4)$

$\therefore f(3)=0$ 또는 $f(2)=f(4)$

i) $f(3)=0$인 경우

$k=0$이므로 $f(3)-f(2)=0$에서 $f(2)=0$이고, 이를 ㉡에 대입하면 $f(1)=0$.

ii) $f(2)=f(4)$인 경우

$f(3)-f(2)=f(4)-f(3)=k$인데 $f(4)-f(3)=f(2)-f(3)$이므로

$f(3)-f(2)=f(2)-f(3)$에서 $f(3)=f(2)$이다.

이때 $f(3)-f(2)=0$이므로 $k=0$이고, $f(2)f(3)=\{f(3)\}^2=0$에서

$f(3)=0$이 된다. 이후 과정은 i) 와 같아 $f(1)=0$.

i)와 ii)에서 $f(1)$로 가능한 값은 0뿐이다. **(거짓)**

ㄷ.

(나)에 $m=0$을 대입하면 $f(1)-f(0)=k$, $m=1$을 대입하면 $f(2)-f(1)=k$

㉠에 따라 케이스를 분류한다.

i) $f(1)=0$인 경우

ㄱ.에서 구했듯 $f(1)=0$이면 $f(2)=f(3)=f(4)=0$이고 $f(0)\neq 0$이다.

따라서 $k=f(2)-f(1)=0$인데,

$f(1)-f(0)=-f(0)=k$에서 $f(0)=0$이 되어 모순이다.

ii) $f(1)\neq 0$이고 $f(0)=1$인 경우

$f(1)-f(0)=k$에서 $f(1)=k+1$이고, $f(2)-f(1)=k$에서 $f(2)=2k+1$이다.

이를 ㉡ $f(2)-f(1)=f(1)f(2)$에 대입하면

$k=(k+1)(2k+1)$, $2k^2+2k+1=0$

그런데 이 이차방정식의 판별식이 $D=2^2-4\times 2<0$이므로 이를 만족시키는 k의 값은 존재하지 않는다.

따라서 i), ii) 모두 모순이 되므로 $\{a, b\}$는 $\{0, 1\}$일 수 없다. **(참)** **[ㄱ, ㄷ] ③**

22. $3^4=81$. <u>답 81</u>

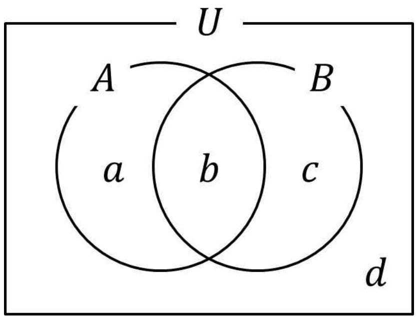
23. $f'(x)=4x^3$, $f'(2)=32$. <u>답 32</u>

24. $r^{10}=5$이므로 $a_{25}=5a_{15}=125$. <u>답 125</u>

25. ${}_3\mathrm{C}_1\cdot x\cdot 3^2\cdot x^2+{}_3\mathrm{C}_3\cdot x^3\cdot 2=27x^3+2x^3$. <u>답 29</u>

26. $8 = 6+2 = 4+4$
$= 4+2+2$
$= 4+2+1+1 = 2+2+3+1 = 2+2+2+2$
$= 2+2+2+1+1$
$= 2+2+1+1+1+1.$ 답 8

27.



그림과 같이 집합 A와 B의 벤 다이어그램을 그리고 네 부분 각각의 원소의 개수를 a, b, c, d라고 하자.
(나)에서 $(B-A)^C - A = (B\cap A^C)^C - A = (B^C \cup A)\cap A^C = B^C \cap A^C \neq \varnothing$이므로 $d \geq 1$이다.
(가)에서 $a+b+c+d = 30$이므로 $a+b+c \leq 29 \cdots\cdots\cdots$ ㉠
(다)에서 $a+b > b+c > 15$이므로 $a > c$이고, $b+c \geq 16$이다.
따라서 ㉠에서 $a \leq 13$이고, $a > c$이므로 $c \leq 12$이다. 이를 ㉠에 다시 대입하면 $b \geq 4$이다.
$a=13, b=4, c=12, d=1$일 경우 문제의 조건이 모두 만족되고, 이때 b가 최소이다. 답 4

28. (가)에서 $\dfrac{x^2}{f(x)}$이 $x=1$에서 불연속이므로 (분모)$=0$이어야 하고, 따라서 $f(1)=0$이다.
한편 $f(x)$가 x나 x^2을 인수로 갖는다 해도 $x=0$에서는 좌극한과 우극한이 같아지기 때문에 극한값을 갖는다. 그러므로 $\dfrac{x^2}{f(x)}$이 $x=1$에서만 극한값을 갖지 않으려면 $f(x)$가 1이나 0 외의 실근을 갖지 않으면 된다.

(나)에서 (분모)$\to 0$인데 극한값이 0이 아닌 수로 수렴하므로 $f(x)$는 $(x-a)^2$을 인수로 가지고, $a \neq 0$이므로 $a=1$이다. $f(x)$가 삼차함수이므로 $f(x)=kx(x-1)^2$로 가정하면
$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to 1} kx = k = 4$이다. $\therefore a+f(3) = 1+4\times 3\times(3-1)^2 = 49.$ 답 49

29. $f(x)$가 증가함수이고 $f(x)=x$의 근이 3개인 경우 함수 $y=f(x)$가 $(0,2)$를 지나기 때문에 $y=f(x)$와 $y=x$는 $x<0$에서 교점을 가지게 되어 조건을 만족시키지 못한다.

따라서 $f(x)$는 감소함수이다. $y=f(x)$와 $y=x$와의 교점은 1개이므로, $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 교점이 3개이기 위해선 $y=f(x)$가 이 교점 외에도 서로 다른 두 점 (x_1, y_1)과 (y_1, x_1)을 지나야 하는데, 이때 조건에 따라 x_1과 y_1 모두 음이 아닌 정수여야 한다. 그런데 $f(0)=2$고 $f(x)$가 감소함수이므로 $f(x_1)\le 2$이다.

ㄱ) $f(x_1)=2$인 경우 :
$x_1=0$이므로 $f(x)$는 두 점 $(0,2)$와 $(2,0)$을 지난다. 이때 $y=f(x)$와 $y=x$의 교점의 x좌표가 음이 아닌 정수이려면 $f(x)$가 $(1,1)$을 지나야 한다.

ㄴ) $f(x_1)=1$인 경우 :
$x_1>0$이다. 이때 $x_1\ge 2$인 경우 $f(x)$가 $(1, x_1)$을 지나야 하므로 모순이 된다. 따라서 $x_1=1$인데, 이 경우 x_1과 y_1이 1로 같아지므로 (x_1, y_1)과 (y_1, x_1)이 서로 다른 두 점이라는 데에 모순이다.

ㄷ) $f(x_1)=0$인 경우 :
$f(0)=x_1$이어야 하므로 $x_1=2$이고, 이후엔 ㄱ)과 동일한 상황이 된다.

ㄱ), ㄴ), ㄷ)에 따라 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 세 교점은 각각 $(0,2)$, $(1,1)$, $(2,0)$이고, $p=0, q=1, r=2$로 놓을 수 있다.

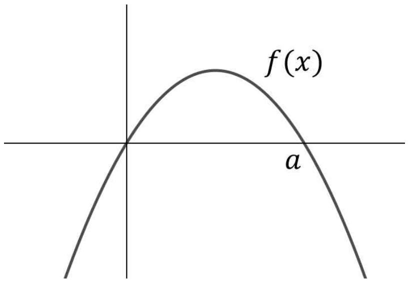
$f(x)=ax^3+bx^2+cx+2$에 $x=1$, $x=2$를 대입하면
$a+b+c+2=1$, $\quad 8a+4b+2c+2=0$
두 식을 연립하면 $b=-3a$, $c=2a-1$이다.

$f(x)=ax^3-3ax^2+(2a-1)x+2$라 하면
$f(a+b+c)=f(-1)=6$에서
$-a-3a-2a+1+2=6$, $a=-\dfrac{1}{2}$이다.

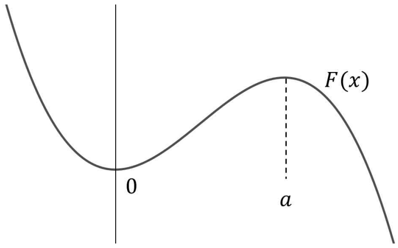
따라서 $f(x)=-\dfrac{1}{2}x^3+\dfrac{3}{2}x^2-2x+2$이고,

$f(-p-q-r)=f(-3)=\dfrac{27}{2}+\dfrac{27}{2}+6+2=35.$ 답 35

30. a가 양수이므로 $f(x)=-ax(x-a)$의 그래프는 다음과 같다.



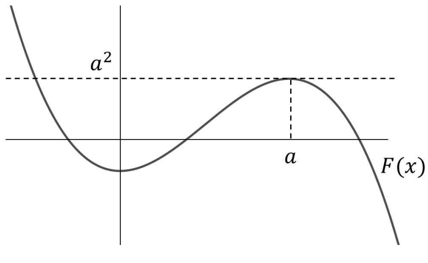
이때 $f(x)$의 부호를 이용해 $F(x)$의 개형을 그리면 다음과 같다.



적분상수 C를 이용해 $F(x)=-\dfrac{1}{3}ax^3+\dfrac{1}{2}a^2x^2+C$라고 하면 (가)에서 $F(x)=0$의 실근의 개수가 2 또는 3이므로 $F(x)$의 극솟값 $F(0)=C\le 0$이고, $F(x)$의 극댓값 $F(a)\ge 0$이다.

(나)에서 방정식 $f(x)=F(k)x$의 실근의 개수는 함수 $y=f(x)$와 $y=F(k)x$의 교점의 개수와 같으며, 두 함수가 모두 $(0,0)$을 지나므로 두 함수의 교점의 개수가 1이려면 $y=F(k)x$가 $(0,0)$에서 $y=f(x)$에 접해야 한다. 따라서 (나)에서 $F(k)=f'(0)$을 만족시키는 k의 개수가 2이다.

$f'(x)=-2ax+a^2$이므로 $f'(0)=a^2>0$이다. 따라서 $F(k)=a^2$의 실근이 2개려면 a^2이 $F(x)$의 극댓값 $F(a)$와 같아야 한다.



$F(a)=-\dfrac{1}{3}a^4+\dfrac{1}{2}a^4+C=\dfrac{1}{6}a^4+C=a^2$에서 $C=-\dfrac{1}{6}a^4+a^2$이다.

한편 $a^4-6a^2=-6C\ge 0$이므로 $a^2(a^2-6)\ge 0$에서 $a\ge\sqrt{6}$이다.

$\therefore F(-a)=\dfrac{1}{3}a^4+\dfrac{1}{2}a^4-\dfrac{1}{6}a^4+a^2=\dfrac{2}{3}a^4+a^2.$

$\ge\dfrac{2}{3}\cdot(\sqrt{6})^4+(\sqrt{6})^2=30.$ 답 30