미적분2 <EBS수능특강변형>

1. 함수 $f(x)=\dfrac{ax}{x+1}$에 대하여 $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x^2-2x-3}=\dfrac{1}{8}$ 일 때, $f'(1)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① $\dfrac{1}{2}$ ② 1 ③ $\dfrac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\dfrac{5}{2}$

2. 이차함수 $f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)에 대하여 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\frac{1-f(x)}{1+f(x)}$$

이고 $g(0)=-\dfrac{2}{3}$, $g'(0)=-\dfrac{2}{9}$이다. $f(2)$의 값은?

① 14 ② 15 ③ 16
④ 17 ⑤ 18

3. 함수 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^n}$ (n은 자연수)에 대하여 $f'(x)=0$ 인 점의 y좌표를 a_n이라 할 때, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n a_{n+1}$의 값은?

① $\dfrac{1}{e}$ ② $\dfrac{1}{e^2}$ ③ $\dfrac{1}{e^4}$
④ $\dfrac{1}{1+e}$ ⑤ $\dfrac{1}{1+e^2}$

4. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-2}{x-2}=-2$를 만족시키고 $g(x)=x^2-2x+4$ 이다. 곡선 $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 위의 x좌표가 2인 점에서의 접선의 기울기는?

① -1 ② $-\dfrac{3}{4}$ ③ $-\dfrac{1}{2}$
④ $\dfrac{1}{2}$ ⑤ $\dfrac{3}{4}$

5. 연속함수 $f(x)$에 대하여

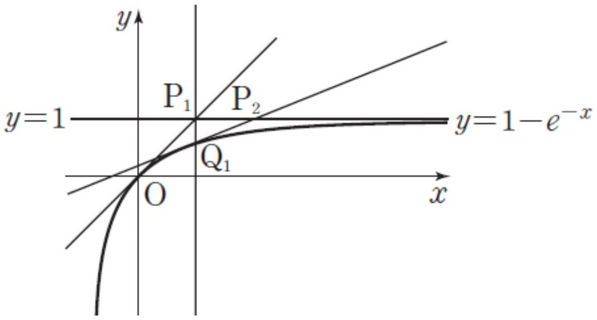
$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1}=3$$

일 때, 곡선 $y=\dfrac{1}{f(x)}$ 위의 점 $\left(1, \dfrac{1}{f(1)}\right)$에서의 접선의 기울기는?

① $-\dfrac{3}{4}$ ② $-\dfrac{1}{2}$ ③ 0
④ $\dfrac{1}{2}$ ⑤ $\dfrac{3}{4}$

6. 그림과 같이 함수 $f(x)=1-e^{-x}$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 원점 O에서의 접선이 직선 $y=1$과 만나는 점을 P_1이라 하자. 점 P_1을 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점을 Q_1, 점 Q_1에서의 접선이 직선 $y=1$과 만나는 점을 P_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 점 P_n을 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점을 Q_n, 점 Q_n에

서의 접선이 직선 $y=1$과 만나는 점을 P_{n+1}이라 하자. 점 P_n의 x좌표를 x_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x_n x_{n+1}}$의 값은? (단, e는 자연로그의 밑이다.)



① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

7. 함수 $f(x)=a^2\ln\frac{1}{x}-x^2+12x$가 $0<x_1<x_2$인 모든 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)>f(x_2)$를 만족시킬 때, 자연수 a의 최솟값은?

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

8. 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이다.
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f''(x)>0$이다.
(다) $f(-1)=-1$, $f(1)=1$

보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. $f(0)<0$
ㄴ. $f'(-1)<f'(1)$
ㄷ. $f'(a)=1$인 실수 a가 -1과 1 사이에 적어도 한 개 존재한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

9. 함수 $f(x)=a\ln x+x^2-4x$가 $x>0$에서 증가할 때, 실수 a의 최솟값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

10. 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 함수
$f(x)=a\sin x-(a+1)\cos x-5x$
가 감소하도록 하는 실수 a의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, M^2+m^2의 값을 구하시오.

11. 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 열린 구간 $(0,\ 1)$에서 $f'(x)>0$, $f''(x)>0$이다.
(나) $f(0)=0$, $f(1)=1$, $f'(0)=\frac{1}{4}$, $f'(1)=2$

함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 하고, $g(x)$의 이계도함수가 존재할 때, $\int_0^1\left|\frac{g''(g(x))}{f'(g(x))}\right|dx=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

12. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x \cos x| dx$ 의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$

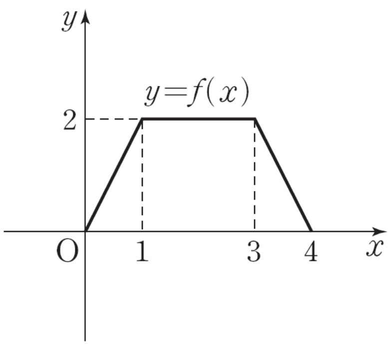
④ 1 ⑤ $\sqrt{2}$

13. $\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{2}{1+4x^2} dx + \int_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ 의 값은?

① 0 ② $\frac{\pi}{6}$ ③ $\frac{\pi}{4}$

④ $\frac{\pi}{3}$ ⑤ $\frac{\pi}{2}$

14. $0 \le x \le 4$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가



그림과 같다.

$\int_{1}^{2} \frac{f(x^2)}{x} dx$의 값은?

① $\ln 4 - \ln 3$ ② $2\ln 4 - \ln 3 - 1$

③ $3\ln 4 - 2\ln 3$ ④ $4\ln 4 - 3\ln 3 - 1$

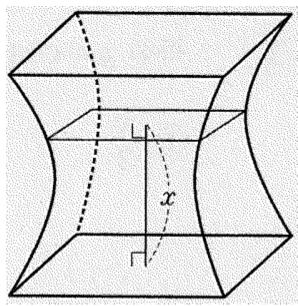
⑤ $5\ln 4 - 4\ln 3$

15. 함수 $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$에 대하여 등식 $\int_{-1}^{1} (3-x) f'(x) dx = kf(1)$을 만족시키는 상수 k의 값을 구하시오.

16. 함수 $f(x) = \int_{0}^{x} t \sin(t-x) dt$에 대하여 닫힌 구간 $[-10,\ 10]$에서 방정식 $f(x)+x=1$의 서로 다른 모든 실근의 합은?

① $\frac{\pi}{2}$ ② π ③ $\frac{3\pi}{2}$ ④ 2π ⑤ $\frac{5\pi}{2}$

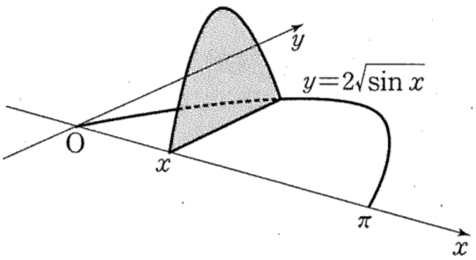
17. 그림과 같이 어떤 그릇에 물을 넣으면 수면의 높이가 x $(0 \le x \le 2)$일 때 수면은 한 변의 길이가 $x^2 - 2x + 2$인 정사각형이라 한다. 이 그릇의 부피는?



① $\frac{52}{15}$ ② $\frac{53}{15}$ ③ $\frac{18}{5}$

④ $\frac{11}{3}$ ⑤ $\frac{56}{15}$

18. 그림과 같이 곡선

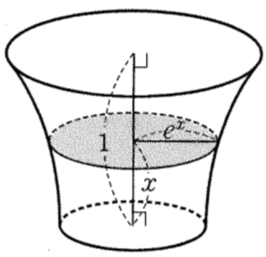


$y=2\sqrt{\sin x}\,(0 \le x \le \pi)$와 x축으로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 반원일 때, 이 입체도형의 부피는?

① $\frac{\pi}{4}$ ② $\frac{\pi}{2}$ ③ π

④ $\frac{3}{2}\pi$ ⑤ 2π

19. 그림과 같이 높이가 1인 입체를 밑면으로부터 높이가 x인 지점에서 밑면에 평행한 평면으로 자른 단면이 반지름의 길이가 e^x인 원일 때, 이 입체도형의 부피는?



① $\frac{\pi}{4}(e-1)$ ② $\frac{\pi}{2}(e-1)$

③ $\frac{\pi}{4}(e^2-1)$ ④ $\pi(e-1)$

⑤ $\frac{\pi}{2}(e^2-1)$

20. 곡선 $y=\cos x-1$ $(0 \le x \le 2\pi)$과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\frac{\pi}{2}$ ② π ③ $\frac{3}{2}\pi$

④ 2π ⑤ $\frac{5}{2}\pi$

21. 곡선 $y=\ln x$와 y축 및 두 직선 $y=0$, $y=2$로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① e^2-1 ② e^2 ③ e^2+1

④ $2e^2-1$ ⑤ $2e^2+1$

22. 곡선 $y=\ln x$와 이 곡선 위의 점 $(e,\ 1)$에서의 접선 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\frac{e}{2}-1$ ② $\frac{e}{2}$ ③ $\frac{e}{2}+1$

④ $e+\frac{1}{2}$ ⑤ $e+1$

정답 및 해설

1) <답> ④

$f(x)=\dfrac{ax}{x+1}$에서

$f'(x)=\dfrac{a(x+1)-ax\times 1}{(x+1)^2}$

$=\dfrac{a}{(x+1)^2}$

$\lim_{x\to 3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x^2-2x-3}=\lim_{x\to 3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}\times\lim_{x\to 3}\dfrac{1}{x+1}$

$=\dfrac{1}{4}f'(3)=\dfrac{1}{8}$

즉, $f'(3)=\dfrac{1}{2}$

따라서 $f'(3)=\dfrac{a}{16}=\dfrac{1}{2}$이므로 $a=8$

$f'(x)=\dfrac{8}{(x+1)^2}$

$\therefore\ f'(1)=\dfrac{8}{4}=2$

2) <답> ④

$g'(x)=\dfrac{-f'(x)\{1+f(x)\}-\{1-f(x)\}f'(x)}{\{1+f(x)\}^2}$

$=\dfrac{-2f'(x)}{\{1+f(x)\}^2}$

$g(0)=\dfrac{1-f(0)}{1+f(0)}=-\dfrac{2}{3}$에서

$f(0)=5$

$g'(0)=-\dfrac{2}{9}$이므로

$\dfrac{-2f'(0)}{\{1+f(0)\}^2}=-\dfrac{2}{9}$

$\therefore\ f'(0)=4$

$f(x)=x^2+ax+b$에서

$f(0)=b=5$

$f'(x)=2x+a$에서

$f'(0)=a=4$

따라서 $f(x)=x^2+4x+5$이므로

$f(2)=4+8+5=17$

3) <답> ②

풀이

$f(x)=\dfrac{\ln x}{x^n}$에서

$f'(x)=\dfrac{\dfrac{1}{x}\times x^n-nx^{n-1}\times\ln x}{x^{2n}}=\dfrac{1-n\ln x}{x^{n+1}}$

$f'(x)=0$이면 $\ln x=\dfrac{1}{n}$ $\quad\therefore x=e^{\frac{1}{n}}$

따라서

$f(e^{\frac{1}{n}})=\dfrac{\ln e^{\frac{1}{n}}}{(e^{\frac{1}{n}})^n}=\dfrac{1}{en}=a_n$이고

$a_{n+1}=\dfrac{1}{e(n+1)}$이다.

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}a_na_{n+1}=\dfrac{1}{e^2}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$

$=\dfrac{1}{e^2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}\right)$

$=\dfrac{1}{e^2}\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)\right\}$

$=\dfrac{1}{e^2}\lim_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)=\dfrac{1}{e^2}$

4) <답> ②

풀이

$\lim_{x\to 2}\dfrac{f(x)-2}{x-2}=-2$에서

$x\to 2$일 때, (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 2}\{f(x)-2\}=f(2)-2=0$에서 $f(2)=2$

$\therefore\ \lim_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=-2$

$g(x)=x^2-2x+4$에서 $g'(x)=2(x-1)$이므로

$g(2)=4,\ g'(2)=2$

따라서 함수 $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$의 도함수는

$y'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

이므로 $x=2$에서의 미분계수는

$\dfrac{f'(2)g(2)-f(2)g'(2)}{\{g(2)\}^2}=\dfrac{(-2)\times 4-2\times 2}{4^2}=-\dfrac{3}{4}$

따라서 x좌표가 2인 점에서의 접선의 기울기는 $-\dfrac{3}{4}$이다.

5) <답> ①

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2}{x-1}=3$에서

$x\to 1$일 때 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이어야 한다. 즉,

$\lim_{x\to 1}\{f(x)-2\}=0$

이때 $f(x)$가 연속함수이므로

$f(1)=2$

이 값을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=3$$

한편, 함수 $y=\frac{1}{f(x)}$의 도함수는

$$y'=-\frac{f'(x)}{\{f(x)\}^2}$$

따라서 점 $\left(1,\ \frac{1}{f(1)}\right)$에서의 접선의 기울기는

$$-\frac{f'(1)}{\{f(1)\}^2}=-\frac{3}{4}$$

6) <답> ②

함수 $f(x)=1-e^{-x}$에서 $f'(x)=e^{-x}$이므로 원점에서의 접선의 방정식은

$$y-0=1\cdot(x-0)$$
$$y=x$$

$y=1$을 대입하면 $x=1$이므로 점 P_1의 좌표는 $(1,\ 1)$, 즉 $x_1=1$ 마찬가지로 점 $Q_n(x_n,\ f(x_n))$에서의 접선의 방정식은

$$y-(1-e^{-x_n})=e^{-x_n}(x-x_n)$$

$y=1$을 대입하면

$$1-(1-e^{-x_n})=e^{-x_n}(x-x_n)$$

$x=x_n+1$

$$\therefore\ x_{n+1}=x_n+1$$

따라서 수열 $\{x_n\}$은 첫째항이 1, 공차가 1인 등차수열이므로

$$x_n=n$$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x_n x_{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=1$$

7) <답> ②

$f(x)=a^2\ln\frac{1}{x}-x^2+12x$에서

$$f'(x)=-\frac{a^2}{x}-2x+12$$
$$=\frac{-2x^2+12x-a^2}{x}$$

함수 $f(x)$가 $0<x_1<x_2$인 모든 실수 $x_1,\ x_2$에 대하여 $f(x_1)>f(x_2)$가 성립하려면 $x>0$에서 감소하는 함수이어야 하므로 $x>0$인 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이어야 한다.

따라서 $x>0$에서 $-2x^2+12x-a^2\le 0$이어야 하므로

$g(x)=-2x^2+12x-a^2$이라 하면

$g(x)=-2(x-3)^2+18-a^2$

$x>0$에서 $g(x)\le 0$이 성립하려면

$g(3)=18-a^2\le 0$

$a^2-18\ge 0$

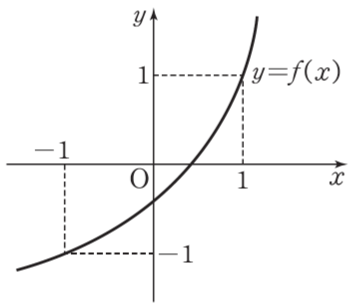
$(a+3\sqrt{2})(a-3\sqrt{2})\ge 0$

$\therefore\ a\le -3\sqrt{2}$ 또는 $a\ge 3\sqrt{2}$

따라서 $\sqrt{16}<3\sqrt{2}<\sqrt{25}$이므로 자연수 a의 최솟값은 5이다.

8) <답> ⑤

함수 $f(x)$의 그래프는 모든 구간에서 아래로 볼록하게 증가하므로 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



ㄱ. 모든 실수 x에 대하여 $f''(x)>0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 닫힌 구간 $[-1,\ 1]$에서 아래로 볼록하다.
따라서 닫힌 구간 $[-1,\ 1]$에서 두 점 $(-1,\ f(-1))$, $(1,\ f(1))$을 지나는 직선 $y=x$보다 곡선 $y=f(x)$가 아래에 있어야 하므로 $f(0)<0$이다. (참)

ㄴ. $f''(x)>0$이므로 $f'(x)$는 증가하는 함수이다.
그러므로 $f'(-1)<f'(1)$이다. (참)

ㄷ. 함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[-1,\ 1]$에서 연속이고 -1과 1 사이에서 미분가능하므로 평균값의 정리에 의

하여

$$\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\frac{2}{2}=1=f'(a)$$

즉, $f'(a)=1$인 실수 a가 -1과 1 사이에 적어도 한 개 존재한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

9) <답> ②

함수 $f(x)=a\ln x+x^2-4x$가 $x>0$에서 증가하므로

$f'(x)\geq 0$이다. 즉,

$$f'(x)=\frac{a}{x}+2x-4=\frac{2x^2-4x+a}{x}\geq 0$$

이 때 $x>0$이므로

$2x^2-4x+a\geq 0$

$2(x-1)^2+a-2\geq 0$

$\therefore\ a\geq 2$

따라서 실수 a의 최솟값은 2이다.

10) <답> 5

구간 $(-\infty,\ \infty)$에서

함수 $f(x)=a\sin x-(a+1)\cos x-5x$가 감소하기 위해서는

$f'(x)\leq 0$이어야 한다.

$f'(x)=a\cos x+(a+1)\sin x-5$

$=\sqrt{(a+1)^2+a^2}\sin(\mathrm{x}+\theta)-5\leq 0$

(단, $\sin\theta=\dfrac{a}{\sqrt{(a+1)^2+a^2}}$, $\cos\theta=\dfrac{a+1}{\sqrt{(a+1)^2+a^2}}$)

$\sqrt{(a+1)^2+a^2}\sin(x+\theta)\leq 5$에서

$-1\leq\sin(x+\theta)\leq 1$이므로

$\sqrt{(a+1)^2+a^2}\leq 5$

$2a^2+2a+1\leq 25$

$a^2+a-12\leq 0$

$(a+4)(a-3)\leq 0$

$\therefore -4\leq a\leq 3$

따라서 $M=3,\ m=-4$이므로

$M^2+m^2=25$

11) <답> 9

함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로

$f(g(x))=x$

이 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(g(x))g'(x)=1$이므로

$$g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}$$

$$\therefore\ \int_0^1\left|\frac{g''(g(x))}{f'(g(x))}\right|dx=\int_0^1|g''(g(x))g'(x)|\,dx$$

…… ㉠

이때 열린 구간 $(0,\ 1)$에서 $f'(x)>0$, $f''(x)>0$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 아래로 볼록하면서 증가한다.

한편 $y=g(x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 열린 구간 $(0,\ 1)$에서 위로 볼록하면서 증가한다.

$\therefore\ g'(x)>0,\ g''(x)<0$

㉠에서 $g(x)=t$로 놓으면 $g'(x)\dfrac{dx}{dt}=1$이고

$x=0$일 때 $t=g(0)=0$,

$x=1$일 때 $t=g(1)=1$이므로

$$\int_0^1|g''(g(x))g'(x)|\,dx=-\int_0^1 g''(g(x))g'(x)\,dx$$

$$=-\int_0^1 g''(t)\,dt$$

$$=-\Big[\ g'(t)\ \Big]_0^1$$

$$g'(0)-g'(1)$$

$g'(x)=\dfrac{1}{f'(g(x))}$이고 $g(0)=0$, $g(1)=1$, $f'(0)=\dfrac{1}{4}$, $f'(1)=2$이므로

$$g'(0)=\frac{1}{f'(g(0))}=\frac{1}{f'(0)}=4$$

$$g'(1)=\frac{1}{f'(g(1))}=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \int_0^1\left|\frac{g''(g(x))}{f'(g(x))}\right|dx=g'(0)-g'(1)$$

$$=4-\frac{1}{2}$$

$$=\frac{7}{2}$$

따라서 $p=2,\ q=7$이므로

$p+q=9$

12) <답> ④

풀이

$$|\sin x\cos x|=\begin{cases}-\sin x\cos x & \left(-\dfrac{\pi}{2}\leq x<0\right)\\ \sin x\cos x & \left(0\leq x\leq\dfrac{\pi}{2}\right)\end{cases}$$이므로

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x\cos x|\,dx$$

$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} |\sin x \cos x| dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x \cos x| dx$

$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} (-\sin x \cos x) dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x \, dx$ …

… ㉠

$\sin x = t$로 놓으면 $\cos x = \frac{dt}{dx}$이고

$x = -\frac{\pi}{2}$일 때 $t = -1$, $x = 0$일 때 $t = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$일 때 $t = 1$이므로

㉠에서

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x \cos x| dx = \int_{1}^{0} (-t) dt + \int_{0}^{1} t \, dt$$
$$= \left[-\frac{1}{2} t^2 \right]_{-1}^{0} + \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_{0}^{1}$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

다른 풀이

$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$ 이므로

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x \cos x| dx$

$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} (-\sin x \cos x) dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x \, dx$

$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \left(-\frac{1}{2} \sin 2x \right) dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sin 2x \, dx$

$= \left[\frac{1}{4} \cos 2x \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + \left[-\frac{1}{4} \cos 2x \right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$

$= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) = 1$

13) <답> ⑤

풀이

$x = \frac{1}{2} \tan\theta \ \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$로 놓으면

$\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{2} \sec^2\theta$ 이고 $x = 0$일 때 $\theta = 0$, $x = \frac{1}{2}$일 때 $\theta = \frac{\pi}{4}$이므로

$$\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{2}{1+4x^2} dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2}{1+\tan^2\theta} \cdot \frac{1}{2} \sec^2\theta \, d\theta$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2}{\sec^2\theta} \cdot \frac{1}{2} \sec^2\theta \, d\theta$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \left[\theta \right]_{0}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$$

$x = \sin t \ \left(-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2} \right)$로 놓으면 $\frac{dx}{dt} = \cos t$ 이고

$x = 0$일 때 $t = 0$, $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$일 때 $t = \frac{\pi}{4}$이므로

$$\int_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 t}} \cdot \cos t \, dt$$
$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos t} \cdot \cos t \, dt$$
$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} dt = \left[t \right]_{0}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$$

$\therefore \int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{2}{1+4x^2} dx + \int_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

14) [정답] ④

$$f(x) = \begin{cases} 2x & (0 \le x \le 1) \\ 2 & (1 < x \le 3) \\ -2x+8 & (3 < x \le 4) \end{cases}$$

$\int_{1}^{2} \frac{f(x^2)}{x} dx$에서 $x^2 = t$로 놓으면

$x = 1$일 때, $t = 1$, $x = 2$일 때, $t = 4$이고, $2x = \frac{dt}{dx}$이므로

$$\int_{1}^{2} \frac{f(x^2)}{x} dx = \int_{1}^{2} \frac{2x f(x^2)}{2x^2} dx$$
$$= \int_{1}^{4} \frac{f(t)}{2t} dt$$
$$= \int_{1}^{3} \frac{2}{2t} dt + \int_{3}^{4} \frac{-2t+8}{2t} dt$$
$$= \int_{1}^{3} \frac{1}{t} dt + \int_{3}^{4} \left(-1 + \frac{4}{t} \right) dt$$
$$= \left[\ln t \right]_{1}^{3} + \left[-t + 4\ln t \right]_{3}^{4}$$

$$= \ln 3 + \{(-4 + 4\ln 4) - (-3 + 4\ln 3)\}$$
$$= 4\ln 4 - 3\ln 3 - 1$$

15) <답> 6

$\int_{-1}^{1} (3-x) f'(x) dx$

$= \left[(3-x) f(x) \right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \{-f(x)\} dx$

$=\left[\ (3-x)f(x)\ \right]_{-1}^{1}+\int_{-1}^{1}f(x)dx$

한편 $f(-x)=\dfrac{e^{-x}-e^{x}}{2}=-\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}=-f(x)$이므로

$\int_{-1}^{1}f(x)dx=0$

$\therefore\ \int_{-1}^{1}(3-x)f'(x)dx=\left[\ (3-x)f(x)\ \right]_{-1}^{1}$

$=2f(1)-4f(-1)$

$=2f(1)+4f(1)$

$(\because\ f(-1)=-f(1))$

$=6f(1)$

다른 풀이

함수 $f'(x)=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$은 $f'(x)=f'(-x)$를 만족시키므로 y축 대칭이고, $h(x)=xf'(x)$라 하면 $h(x)=-h(-x)$를 만족시키므로 원점 대칭이다.

$\therefore\ \int_{-1}^{1}(3-x)f'(x)dx=\int_{-1}^{1}3f'(x)dx-\int_{-1}^{1}xf'(x)dx$

$=2\int_{0}^{1}3f'(x)dx$

$=6\left[\ f(x)\ \right]_{0}^{1}$

$=6f(1)-6f(0)$

$=6f(1)\ (\because\ f(0)=0)$

$\therefore\ k=6$

16) <답> ③

$\int_{0}^{x}t\sin(t-x)dt$에서 $u=t,\ v'=\sin(t-x)$라 하면

$u'=1,\ v=-\cos(t-x)$이므로

$f(x)=\int_{0}^{x}t\sin(t-x)dt$

$=\left[\ -t\cos(t-x)\ \right]_{0}^{x}+\int_{0}^{x}\cos(t-x)dt$

$=-x+\left[\ \sin(t-x)\ \right]_{0}^{x}$

$=-x-\sin(-x)$

$-x+\sin x$

따라서 방정식 $f(x)+x=1$에서

$\sin x=1$이므로 닫힌 구간 $[-10,\ 10]$에서

$\sin x=1$을 만족시키는 x의 값은 $-\dfrac{3\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5\pi}{2}$이므로

방정식 $f(x)+x=1$의 서로 다른 모든 실근의 합은

$-\dfrac{3\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{5\pi}{2}=\dfrac{3\pi}{2}$

17) <답> ⑤

수면의 높이가 $x\ (0\le x\le 2)$일 때 수면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=(x^2-2x+2)^2=x^4-4x^3+8x^2-8x+4$$

따라서 구하는 그릇의 부피는

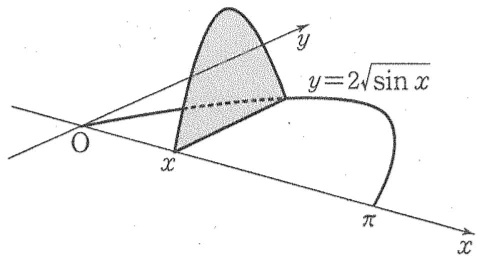
$\int_{0}^{2}S(x)dx=\int_{0}^{2}(x^4-4x^3+8x^2-8x+4)dx$

$=\left[\dfrac{1}{5}x^5-x^4+\dfrac{8}{3}x^3-4x^2+4x\right]_{0}^{2}$

$=\dfrac{32}{5}-16+\dfrac{64}{3}-16+8$

$=\dfrac{56}{15}$

18) <답> ③



이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 반원이고, 이 반원의 지름의 길이가 $2\sqrt{\sin x}$이므로 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$S(x)=\dfrac{\pi}{2}\times(\sqrt{\sin x})^2$

$=\dfrac{\pi}{2}\sin x$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$\int_{0}^{\pi}\dfrac{\pi}{2}\sin x\,dx=\dfrac{\pi}{2}\left[-\cos x\right]_{0}^{\pi}$

$=\dfrac{\pi}{2}(1+1)$

$=\pi$

19) <답> ⑤

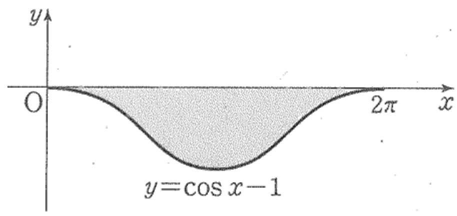
이 입체도형의 단면이 반지름의 길이가 e^x인 원이므로 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$S(x)=\pi e^{2x}$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$$\int_0^1 S(x)dx = \int_0^1 \pi e^{2x}dx$$
$$= \pi\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1$$
$$= \pi\left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\right)$$
$$= \frac{\pi}{2}(e^2 - 1)$$

20) <답> ④

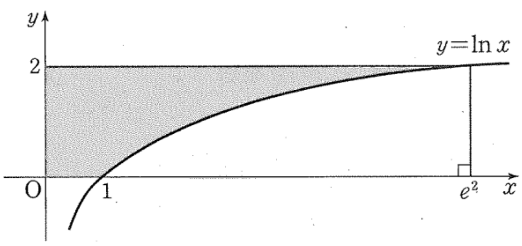


구하는 넓이를 S라 하면

$$S = \int_0^{2\pi} |\cos x - 1| dx$$
$$= \int_0^{2\pi} (1 - \cos x)dx$$
$$= \Big[x - \sin x\Big]_0^{2\pi}$$
$$= 2\pi$$

21) <답> ①

곡선 $y = \ln x$와 직선 $y = 2$의 교점의 좌표가 $(e^2,\ 2)$이므로 구하는 도형의 넓이는 가로의 길이가 e^2이고 세로의 길이가 2인 직사각형의 넓이에서 곡선 $y = \ln x$와 x축 및 직선 $x = e^2$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 빼면 된다.



따라서 구하는 도형의 넓이를 S라 하면

$$S = 2e^2 - \int_1^{e^2} \ln x\, dx$$
$$= 2e^2 - \Big[x\ln x - x\Big]_0^{e^2}$$
$$= 2e^2 - \{(e^2 \ln e^2 - e^2) - (0 - 1)\}$$
$$= 2e^2 - (2e^2 - e^2 + 1)$$
$$= e^2 - 1$$

[다른 풀이]

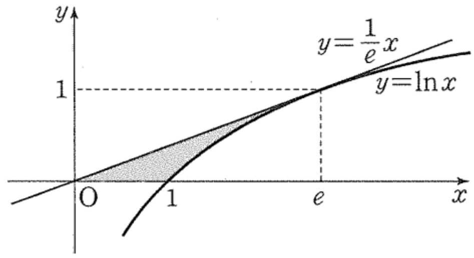
$$S = \int_0^2 e^y dy = \Big[e^y\Big]_0^2 = e^2 - 1$$

22) <답> ①

$y = \ln x$의 도함수가 $y' = \dfrac{1}{x}$이므로 곡선 $y = \ln x$ 위의 점 $(e,\ 1)$에서의 접선의 방정식은

$y - 1 = \dfrac{1}{e}(x - e)$에서

$y = \dfrac{1}{e}x$



따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S = \int_0^e \frac{1}{e}x dx - \int_1^e \ln x\, dx$$
$$= \left[\frac{1}{2e}x^2\right]_0^e - \Big[x\ln x - x\Big]_1^e$$
$$= \frac{e}{2} - \{(e - e) - (0 - 1)\}$$
$$= \frac{e}{2} - 1$$

[다른 풀이]

$y = \ln x$의 도함수가 $y' = \dfrac{1}{x}$이므로 곡선 $y = \ln x$ 위의 점 $(e,\ 1)$에서의 접선의 방정식은

$y - 1 = \dfrac{1}{e}(x - e)$에서

$y = \dfrac{1}{e}x$

$y = \ln x$에서 $x = e^y$이고, $y = \dfrac{1}{e}x$에서 $x = ey$이므로

구하는 넓이를 S라 하면

$$S = \int_0^1 (e^y - ey)dy$$
$$= \left[e^y - \frac{e}{2}y^2\right]_0^1$$
$$= \frac{e}{2} - 1$$