미적분1 <EBS수능특강변형>

1. 함수 $f(x)=(x^4-2x^2)(3x^2-ax)$에 대하여 $f'(1)=2$일 때, 상수 a의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

2. 함수 $f(x)=ax^2+bx+3$의 그래프 위의 점 $(2,\ f(2))$에서의 접선이 직선 $y=3x-1$과 평행하고 점 $(0,\ 7)$을 지난다. 두 상수 $a,\ b$에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

3. 최고차항의 계수가 2인 삼차함수 $f(x)$가 $f(0)=f(1)=f(3)$을 만족시킬 때, $f'(2)$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

4. 함수 $f(x)=(x+3)(2x^2-x+4)$에 대하여 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x^2)-xf(1)}{x-1}$의 값은?

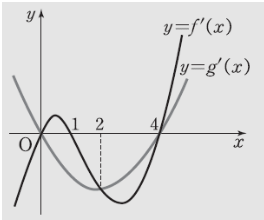
① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

5. 함수 $f(x)=\begin{cases} 3ax & (x<1) \\ a^2x^3+2 & (x\geq 1)\end{cases}$이 $x=1$에서 미분가능하도록 하는 상수 a의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

6. 함수 $f(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-x)^k}{k}$에 대하여 $f'(1)=0$을 만족시키는 100 이하의 자연수 n의 개수를 구하시오.

1. 사차함수 $f(x)$와 삼차함수 $g(x)$에 대하여 두 함수 $y=f'(x)$, $y=g'(x)$의 그래프는 그림과 같다. 함수 $h(x)$를 $h(x)=f(x)-g(x)$라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



<보기>

ㄱ. 방정식 $h'(x)=0$의 모든 실근의 합은 6이다.
ㄴ. $1<x<2$에서 함수 $h(x)$는 증가한다.
ㄷ. 함수 $h(x)$는 $x=4$에서 극대이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2. 삼차함수 $f(x)=kx^3+3x^2+kx$가 $x_1<x_2$인 모든 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)<f(x_2)$를 만족시킬 때 상수 k의 최솟값은?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$
④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

3. 함수 $f(x)=kx^3-3kx^2+5$의 극댓값과 극솟값의 차가 16일 때, 상수 k의 값은?(단, $k>0$)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

4. 직선 $y=3x+2$에 평행하고 곡선 $y=x^2+x$에 접하는 직선의 y절편은?

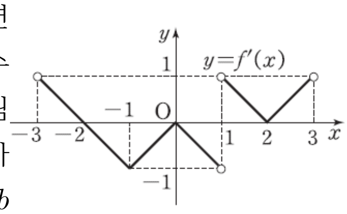
① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

5. 함수 $f(x)=x^2-3x+4$의 그래프 위의 두 점 $(2,\ f(2))$, $(4,\ f(4))$를 지나는 직선의 기울기를 m이라 하자.
$f'(c)=m$인 상수 c에 대하여 $f(c)$의 값을 구하시오.

6. 삼차함수 $f(x)=-x^3+3x^2-2ax+5$가 실수 전체의 집합에서 감소하도록 하는 실수 a의 최솟값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

7. 열린 구간 $(-3,\ 3)$에서 연속인 함수 $f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 그림과 같다. 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극대이고 $x=b$에서 극소일 때, $a+b$의 값은?
(단, $-3<a<3$, $-3<b<3$)



① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

8. 정적분 $\int_{-1}^{1}|x|(x+1)dx$의 값은?

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{5}{6}$ ③ 1

④ $\frac{7}{6}$ ⑤ $\frac{4}{3}$

9. 정적분 $\int_{-1}^{1}x(x+1)^2dx$의 값은?

① $-\frac{4}{3}$ ② $-\frac{2}{3}$ ③ 0

④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{4}{3}$

10. $f(x)=\int_{1}^{x}(t^2+t)dt$일 때, $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)}{h}$의 값은?

① 0 ② 2 ③ 4

④ 6 ⑤ 8

11. 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x, f(x))$에서의 접선의 기울기가 $2x-3$이고 $f(0)=1$일 때, $f(1)$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0

④ 1 ⑤ 2

12. 정적분 $\int_{-1}^{1}\frac{x^4}{x^2+1}dx-\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2+1}dx$의 값은?

① $-\frac{4}{3}$ ② $-\frac{2}{3}$ ③ 0

④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{4}{3}$

13. 함수 $f(x)=x^3-ax+9$가

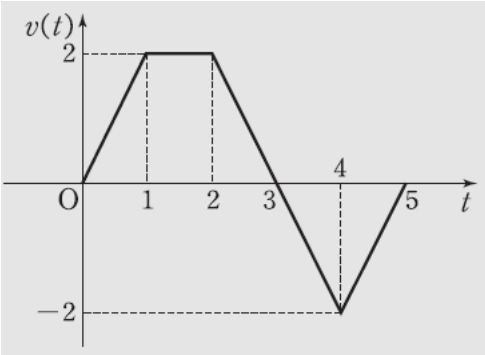
$$\int_{1}^{x}\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\}dt=\frac{d}{dx}\int_{1}^{x}f(t)dt$$

를 만족시킬 때, 상수 a의 값은?

① 10 ② 12 ③ 14

④ 16 ⑤ 18

14. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각t $(0 \le t \le 5)$ 에서의 속도 $v(t)$의 그래프가 그림과 같다.



점 P의 시각 $t=0$에서 $t=5$까지 위치의 변화량을 a, 움직인 거리를 b라 할 때, $a+b$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

15. 직선 철로 위를 매초 60m의 속도로 달리는 열차가 있다. 이 열차의 기관사가 제동을 건 순간부터 t초 후 열차의 속도 $v(t)$는 $v(t)=60-40t$ (m/초)이다. 기관사가 제동을 건 순간부터 열차가 정지할 때까지 이 열차가 움직인 거리는?

① $39m$ ② $41m$ ③ $43m$
④ $45m$ ⑤ $47m$

16. 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q 가 원점을 출발하고 t초가 지났을 때, 이 두 점의 속도는 모두 $v(t)=10-4t$ 이다. 점 P가 원점을 출발하고 2초가 지났을 때, 점 Q가 원점을 출발하였다. 점 P가 원점을 출발하고 a초가 지난 후 점 Q와 만났을 때, a의 값은? (단, $a>2$)

① $\frac{7}{2}$ ② $\frac{29}{8}$ ③ $\frac{15}{4}$
④ $\frac{31}{8}$ ⑤ 4

17. 곡선 $y=x^2(1-x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\frac{1}{24}$ ② $\frac{1}{12}$ ③ $\frac{3}{24}$
④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{5}{24}$

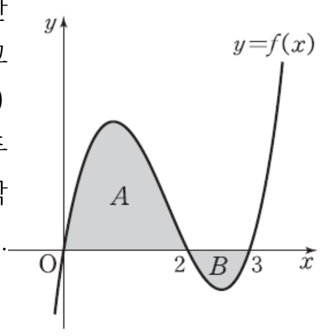
18. 두 곡선 $y=x^2$, $y=|x|+2$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① 6 ② $\frac{19}{3}$ ③ $\frac{20}{3}$
④ 7 ⑤ $\frac{22}{3}$

19. 곡선 $y=x^2$과 두 직선 $y=1$, $y=4$로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\frac{28}{3}$ ② $\frac{19}{2}$ ③ $\frac{29}{3}$
④ $\frac{59}{6}$ ⑤ 10

20. 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[0,3]$에서 연속일 때, 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 두 부분 A, B의 넓이를 각각 S_1, S_2라 하자.



$S_1=\frac{8}{3}$, $\int_0^3 f(x)dx=\frac{9}{4}$ 일 때, S_2의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{5}{12}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{7}{12}$

정답 및 해설

1) [정답] ①

[해설] $f(x)=(x^4-2x^2)(3x^2-ax)$에서

$f'(x)=(4x^2-4x)(3x^2-ax)+(x^4-2x^2)(6x-a)$이므로

$f'(1)=0+(-1)\times(6-a)=-6+a$

따라서 $f'(1)=2$이므로 $-6+a=2$, $a=8$

2) [정답] 6

[해설] 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(2,\ f(2))$에서의 접선이 직선 $y=3x-1$과 평행하고 점 $(0,\ 7)$을 지나므로 접선의 방정식은 $y=3x+7$이다.

따라서 $f(2)=13$, $f'(2)=3$이다.

$f(x)=ax^2+bx+3$에서 $f'(x)=2ax+b$

$f(2)=13$에서 $4a+2b+3=13$

$2a+b=5 \quad \cdots$ ㉠

$f'(2)=3$에서

$4a+b=3 \quad \cdots$ ㉡

㉡−㉠을 하면 $2a=-2$, $a=-1$

$a=-1$을 ㉠에 대입하면 $b=7$

따라서 $a+b=(-1)+7=6$

3) [정답] ①

[해설] $f(x)=2x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f(0)=f(1)=f(3)$이므로

$c=2+a+b+c=54+9a+3b+c$

$c=2+a+b+c$에서 $a+b=-2 \quad \cdots$ ㉠

$c=54+9a+3b+c$에서 $3a+b=-18 \quad \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a=-8$, $b=6$

$f(x)=2x^3-8x^2+6x+c$이므로 $f'(x)=6x^2-16x+6$

따라서 $f'(2)=24-32+6=-2$

4) [정답] ④

[해설] $f(x)=(x+3)(2x^2-x+4)$에서

$f'(x)=(2x^2-x+4)+(x+3)(4x-1)$이므로 $f(1)=20$, $f'(1)=17$

따라서

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-xf(1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\{f(x^2)-f(1)\}-\{xf(1)-f(1)\}}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\times(x+1)\right\}-\lim_{x\to1}\frac{(x-1)f(1)}{x-1}$$

$=2f'(1)-f(1)$

$=2\times17-20=14$

5) [정답] ②

[해설] (i) 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$\lim\limits_{x\to1-}f(x)=\lim\limits_{x\to1+}f(x)=f(1)$

즉, $3a=a^2+2 \quad \cdots$ ㉠

$a^2-3a+2=0$, $(a-1)(a-2)=0$

따라서 $a=1$ 또는 $a=2$

(ii) 미분계수 $f'(1)$이 존재해야 하므로

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{3ax-(a^2+2)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1-}\frac{3ax-3a}{x-1} \text{ (㉠에 의해)}$$

$$=\lim_{x\to1-}\frac{3a(x-1)}{x-1}$$

$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{(a^2x^3+2)-(a^2+2)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1+}\frac{a^2(x^3-1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1+}\frac{a^2(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1+}a^2(x^2+x+1)$$

$=3a^2$

따라서 $=\lim\limits_{x\to1-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$이므로

$3a=3a^2$, $3a(a-1)=0$

따라서 $a=0$ 또는 $a=1$

(i), (ii)에서 구하는 상수 a의 값은 1이다.

6) [정답] 50

[해설]

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-x)^k}{k}$$

$$=-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{5}x^5+\cdots+\frac{(-1)^n}{n}x^n$$

$f'(x)=-1+x-x^2+x^3-x^4+\cdots+(-1)^nx^{n-1}$

따라서 $f'(1)=-1+1-1+1-1+\cdots+(-1)^n$이므로

$$f'(1)=\begin{cases}-1 & (n\text{이 홀수})\\ 0 & (n\text{이 짝수})\end{cases}$$

$f'(1)=0$이려면 n은 짝수이어야 하므로 구하는 100 이하

의 자연수 n의 개수는 50이다.

7) [정답] ③

[해설]

ㄱ. $h(x)=f(x)-g(x)$이므로 $h'(x)=f'(x)-g'(x)$

방정식 $h'(x)=0$, 즉 방정식 $f'(x)=g'(x)$의 그래프가 만나는 점의 x좌표이므로 $x=0$ 또는 $x=2$ 또는 $x=4$

따라서 방정식 $h'(x)=0$의 모든 실근의 합은 $0+2+4=6$이다. (참)

ㄴ. $1<x<2$에서 $f'(x)>g'(x)$이므로 $h'(x)=f'(x)-g'(x)>0$

따라서 함수 $h(x)$는 $1<x<2$에서 증가한다. (참)

ㄷ. 주어진 그래프를 이용하여 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $h(x)$는 $x=4$에서 극소이다.(거짓)

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

8) [정답] ③

[해설]

$f(x)=kx^3+3x^2+kx$에서

$f'(x)=3kx^2+6x+k$

삼차함수 $f(x)$가 $x_1<x_2$인 모든 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)<f(x_2)$를 만족시키므로 실수 전체의 집합에서 증가한다.

따라서 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이므로

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$k>0$, $D\leq 0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=9-3k^2\leq 0$, $k^2-3\geq 0$

$(k+\sqrt{3})(k-\sqrt{3})\geq 0$

에서 $k\leq-\sqrt{3}$ 또는 $k\geq\sqrt{3}$

이때 $k>0$이므로 $k\geq\sqrt{3}$

따라서 상수 k의 최솟값은 $\sqrt{3}$이다.

참고

상수함수가 아닌 다항함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 증가하면 이 구간의 모든 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이다.

또한, 역으로 상수함수가 아닌 다항함수 $f(x)$가 어떤 구간의 모든 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이면 그 구간에서 증가한다.

9) [정답] ④

[해설]

$f(x)=kx^3-3kx^2+5$에서

$f'(x)=3kx^2-6kx=3kx(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

$k>0$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=0$일 때 극댓값 $f(0)$, $x=2$일 때 극솟값 $f(2)$를 갖는다.

$f(0)-f(2)=16$에서

$5-(8k-12k+5)=16$, $4k=16$

따라서 $k=4$

10) [정답] ②

[해설]

$f(x)=x^2+x$라 하면 $f'(x)=2x+1$

곡선 $y=f(x)$ 위의 접점의 좌표를 $(t,\ t^2+t)$라 하면 직선 $y=3x+2$에 평행한 접선의 기울기는 3이므로

$f'(t)=2t+1=3$에서 $t=1$

따라서 기울기가 3이고 접점 $(1,\ 2)$를 지나는 직선의 방정식은 $y=3(x-1)+2$, $y=3x-1$이므로

구하는 y절편은 -1이다.

11) [정답] 4

[해설]

$f(x)=x^2-3x+4$에서 $f'(x)=2x-3$

m은 두 점 $(2,\ f(2))$, $(4,\ f(4))$를 지나는 직선의 기울기이므로 $m=\frac{f(4)-f(2)}{4-2}=\frac{8-2}{2}=3$

$m=f'(c)$에서 $3=2c-3$, $c=3$

따라서 $f(c)=f(3)=9-9+4=4$

12) [정답] ③

[해설]

삼차함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소하려면 모든 실수 x에서 $f'(x)\leq 0$이 성립해야 한다.

즉, $f'(x)=-3x^2+6x-2a\leq 0$

$-3x^2+6x-2a=0$ $\cdots\cdots$ ㉠에서

이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면 $D\leq 0$이어야 한

다. 즉, $\frac{D}{4}=3^2-(-3)\times(-2a)\le 0,\ 9-6a\le 0$

이므로 $a\ge\frac{3}{2}$

따라서 실수 a의 최솟값은 $\frac{3}{2}$이다.

13) [정답] ②

[해설]

주어진 그래프를 이용하여 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(-3)	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	(3)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$		$+$	0	$+$	
$f(x)$		↗	극대	↘		↘	극소	↗		↗	

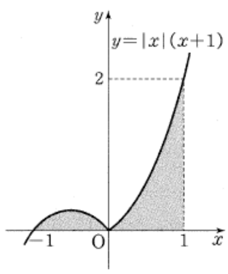
함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극대, $x=1$에서 극소이므로 $a=-2,\ b=1$이다.

따라서 $a+b=(-2)+1=-1$

14) [정답] ③

[해설] 닫힌 구간 $[-1,1]$에서

$|x|=\begin{cases}-x & (-1\le x<0)\\ x & (0\le x\le 1)\end{cases}$이므로



$$\int_{-1}^{1}|x|(x+1)dx$$

$$=\int_{-1}^{0}|x|(x+1)dx+\int_{0}^{1}|x|(x+1)dx$$

$$=\int_{-1}^{0}\{-x(x+1)\}dx+\int_{0}^{1}x(x+1)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1}$$

$$=\left\{0-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)\right\}+\left\{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)-0\right\}$$

$$=\frac{1}{6}+\frac{5}{6}=1$$

15) [정답] ⑤

[해설] $\int_{-1}^{1}x^3dx=0,\quad \int_{-1}^{1}x^2dx=2\int_{0}^{1}x^2dx,$

$\int_{-1}^{1}xdx=0$이므로

$$\int_{-1}^{1}x(x+1)^2dx=\int_{-1}^{1}x(x^2+2x+1)dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(x^3+2x^2+x)dx$$

$$=\int_{-1}^{1}x^3dx+2\int_{-1}^{1}x^2dx+\int_{-1}^{1}xdx$$

$$=0+2\times\left(2\int_{0}^{1}x^2dx\right)+0$$

$$=4\times\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=4\times\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$

16) [정답] ③

[해설] $f(x)=\int_{1}^{x}(t^2+t)dt$에서

$$f(1)=\int_{1}^{1}(t^2+t)dt=0$$

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\int_{1}^{x}(t^2+t)dt=x^2+x$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\times 2$$

$$=f'(1)\times 2=(1^2+1)\times 2=4$$

17) [정답] ②

[해설] $f'(x)=2x-3$이므로

$f(x)=\int(2x-3)dx=x^2-3x+C$ (C는 적분상수)

한편, $f(0)=1$이므로 $C=1$에서 $f(x)=x^2-3x+1$

따라서 $f(1)=1-3+1=-1$

18) [정답] ①

[해설] $\int_{-1}^{1}\frac{x^4}{x^2+1}dx-\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2+1}dx$

$$=\int_{-1}^{1}\frac{x^4-1}{x^2+1}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}\frac{(x^2+1)(x^2-1)}{x^2+1}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(x^2-1)dx=2\int_{0}^{1}(x^2-1)dx$$

$$=2\left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_0^1=2\times\left(\frac{1}{3}-1\right)=-\frac{4}{3}$$

19) **[정답]** ①

[해설] $\int_{1}^{x}\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\}dt = f(x)-f(1)$

$\frac{d}{dx}\int_{1}^{x}f(t)dt = f(x)$

$\int_{1}^{x}\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\}dt = \frac{d}{dx}\int_{1}^{x}f(t)dt$에서

$f(x)-f(1) = f(x)$

따라서 $f(1)=0$이므로 $1-a+9=0$에서 $a=10$

20) **[정답]** ③

[해설]

점 P의 시각 $t=0$ 에서 $t=5$까지 위치의 변화량 a는

$a = \int_{0}^{5}v(t)dt = \int_{0}^{3}v(t)dt + \int_{3}^{5}v(t)dt$

$= \frac{1}{2}\times(3+1)\times2 - \frac{1}{2}\times2\times2 = 4-2 = 2$

점 P의 시각 $t=0$에서 $t=5$까지 움직인 거리 b는

$b = \int_{0}^{5}|v(t)|dt = \int_{0}^{3}v(t)dt + \int_{3}^{5}\{-v(t)\}dt$

$= \frac{1}{2}\times(3+1)\times2 + \frac{1}{2}\times2\times2 = 4+2 = 6$

따라서 $a=2$, $b=6$ 이므로 $a+b = 2+6 = 8$

21) **[정답]** ④

[해설]

열차가 정지할 때의 속도는 0이므로

$60-40t = 0$, $t = \frac{3}{2}$

즉, 기관사가 제동을 건 순간부터 $\frac{3}{2}$초 후 열차가 정지할 때까지 이 열차가 움직인 거리는

$\int_{0}^{\frac{3}{2}}|v(t)|dt = \int_{0}^{\frac{3}{2}}(60-40t)dt$

$= \left[60t-20t^2\right]_{0}^{\frac{3}{2}}$

$= 90-45 = 45(m)$

22) **[정답]** ①

[해설]

원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 t 초후의 위치를 각각 $x(t), y(t)$라 하자.

$x(t) = x(0) + \int_{0t}v(t)dt$

$= 0 + \int_{0}^{t}(10-4t)dt$

$= \left[10t-2t^2\right]_{0}^{t} = 10t-2t^2$

$y(t) = x(t) = 10t-2t^2$

원점을 출발한 점 P가 그보다 2초 늦게 원점을 출발한 점 Q와 a $(a>2)$초 후에 만나므로

$x(a) = y(a-2)$, 즉

$10a-2a^2 = 10(a-2)-2(a-2)^2$

$10a-2a^2 = 10a-20-2(a^2-4a+4)$

$8a-28 = 0$

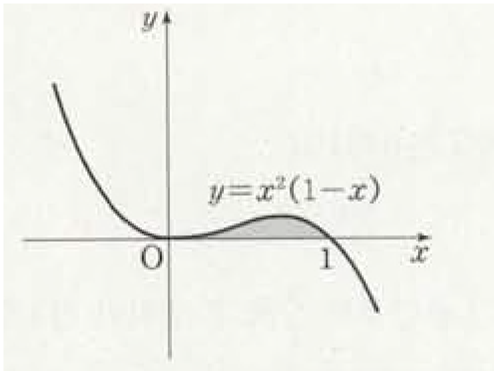
따라서 $a = \frac{7}{2}$

23) **[정답]** ②

[해설]

$x^2(1-x) = 0$ 에서 $x=0$또는 $x=1$

함수 $y = x^2(1-x)$의 그래프는 그림과 같다.



닫힌구간 $[0, 1]$에서 $x^2(1-x) \ge 0$ 이므로

구하는 부분의 넓이는

$\int_{0}^{1}x^2(1-x)dx$

$= \int_{0}^{1}(x^2-x^3)dx$

$= \left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\right]_{0}^{1}$

$= \frac{1}{3}-\frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

24) **[정답]** ③

[해설]

$y = |x|+2 = \begin{cases} -x+2 & (x<0) \\ x+2 & (x \ge 0) \end{cases}$

$x^2 = |x|+2$ 에서

(i) $x<0$ 인 경우

$x^2 = -x+2$, $x^2+x-2 = 0$

$(x-1)(x+2) = 0$

이때 $x<0$ 이므로 $x=-2$ $\cdots$ ㉠

(ii) $x \geq 0$ 인 경우

$x^2 = x+2$, $x^2 - x - 2 = 0$

$(x+1)(x-2) = 0$

이때 $x \geq 0$ 이므로 $x = 2$ $\cdots$ ㉡

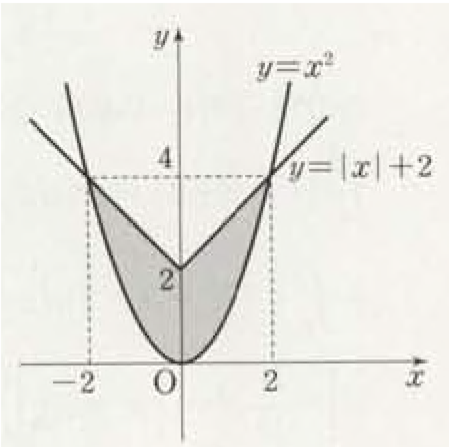
㉠,㉡에서 두 곡선 $y = x^2$, $y = |x|+2$의 교점의 x좌표는

$x = -2$, $x = 2$이다.

이때 닫힌 구간 $[-2, 2]$에서 $x^2 < |x|+2$이고,

두 함수 $y = x^2$, $y = |x|+2$ 의 그래프가 y축에 대하여 대칭이므로

$$\int_{-2}^{0} \{(-x+2)-x^2\}dx = \int_{0}^{2}\{(x+2)-x^2\}dx$$



따라서 구하는 부분의 넓이는

$$\int_{-2}^{2}\{(|x|+2)-x^2\}dx$$

$$= \int_{-2}^{0}(-x+2-x^2)dx = \int_{0}^{2}(x+2-x^2)dx$$

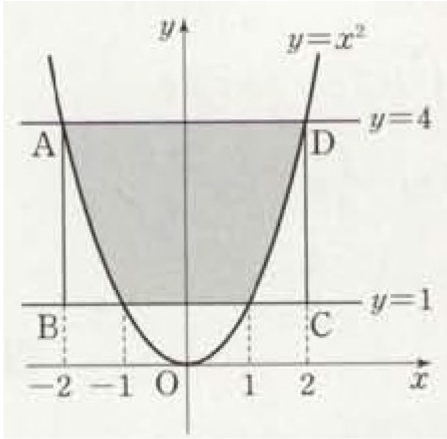
$$= 2\int_{0}^{2}(-x^2+x+2)dx$$

$$= 2\times\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_0^2$$

$$= 2\times\left(-\frac{8}{3}+2+4\right) = \frac{20}{3}$$

25) [정답] ①

[해설]



구하는 부분의 넓이를 S라 하고

$A(-2, 4)$, $B(-2, 1)$, $C(2, 1)$, $D(2, 4)$라 하면

$$S = (\text{사각형 } ABCD\text{의 넓이}) - 2\int_{1}^{2}(x^2-1)dx$$

$$= 4\times3 - 2\times\left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_1^2$$

$$= 12 - 2\times\left\{\left(\frac{8}{3}-2\right)-\left(\frac{1}{3}-1\right)\right\}$$

$$= 12 - 2\times\frac{4}{3} = \frac{28}{3}$$

26) [정답] ③

[해설]

닫힌구간 $[0, 2]$에서 $f(x) \geq 0$이고, 닫힌구간 $[2, 3]$에서

$f(x) \leq 0$ 이다.

따라서 $S_1 = \int_{0}^{2} f(x)dx = \frac{8}{3}$, $S_2 = \int_{2}^{3}\{-f(x)\}dx$

이다.

한편,

$$\int_{0}^{3}f(x)dx = \int_{0}^{2}f(x)dx + \int_{2}^{3}f(x)dx$$

$$\frac{9}{4} = \frac{8}{3} + \int_{2}^{3}f(x)dx$$

$$\int_{2}^{3}f(x)dx = \frac{9}{4} - \frac{8}{3} = -\frac{5}{12}$$

따라서

$$S_2 = \int_{2}^{3}\{-f(x)\}dx = -\int_{2}^{3}f(x)dx = -\left(-\frac{5}{12}\right) = \frac{5}{12}$$