2018년 6월 평가원 모의고사 킬러 분석

친절한제로스

[가형]

21. 열린 구간 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases} 2\sin^3 x & \left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{4}\right) \\ \cos x & \left(\frac{\pi}{4}\le x<\frac{3\pi}{2}\right) \end{cases}$$

가 있다. 실수 t에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 실수 k의 개수를 $g(t)$라 하자.

> (가) $-\frac{\pi}{2}<k<\frac{3\pi}{2}$
>
> (나) 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$ 는 $x=k$에서 미분가능하지 않다.

함수 $g(t)$에 대하여 합성함수 $(h \circ g)(t)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $h(x)$가 있다. $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=a$, $g(0)=b$, $g(-1)=c$라 할 때, $h(a+5)-h(b+3)+c$의 값은? [4점]

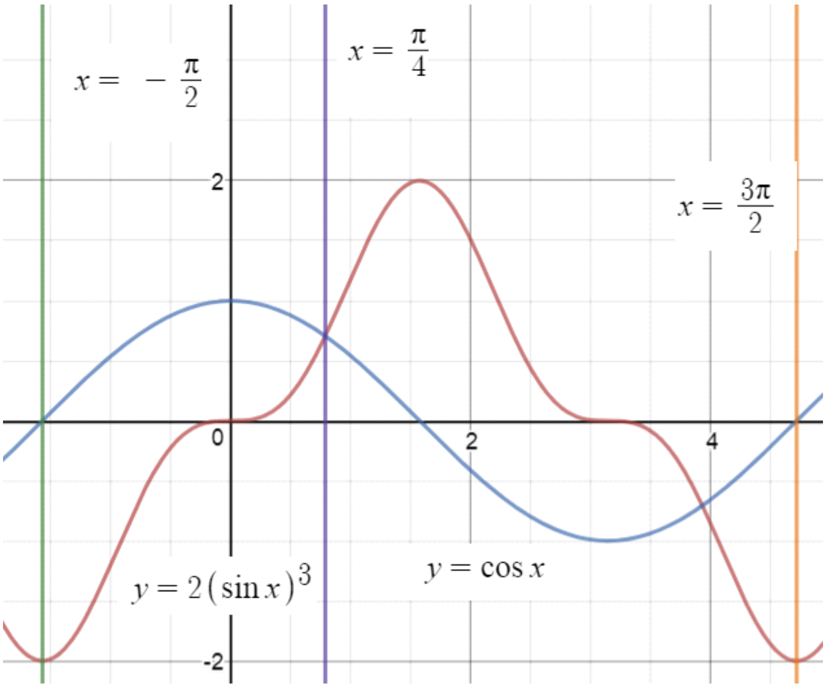
① 96　② 97　③ 98　④ 99　⑤ 100

[사고의 흐름 및 풀이]

1. 열린구간에서 정의되었네. $-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$: 삼각함수겠네? (문제를 보면서, 맞네.)

2. $f(x) = \begin{cases} 2\sin x \ (-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{4}) \\ \cos x \quad (\frac{\pi}{4} \quad\ x < \frac{3\pi}{2}) \end{cases}$: 그리고 시작해야지 뭐 어쩌겠어?

- 그림은 천천히, 크고 정확하게
- $2\sin^3 x$에 쫄지 말자. 그냥 세제곱하고 2배 한거야.
  ($\sin x$의 극대 극소 발생지점이 여전히 유지된다)



3. 실수 t에 대해서 실수 k의 개수 : $g(t)$
- 음, k 개수는 t에 의존하는구먼.

4. 박스보자.

(가) $-\frac{\pi}{2} < k < \frac{3\pi}{2}$: 그냥 주어진 정의역 내에서만 k를 세라는 거네.
- 참 조건이 적나라하고 허접하다. 정성 좀 들이지;

(나) 함수 $f(x)-t|$ 는 $x=k$에서 미분가능하지 않다.
- 그냥 절댓값이 아니라 루트가 씌워져있구먼요. 루트를 씌우면 무언가 달라질 수도 있나?
- 일단 절댓값이 보이니, 경우를 나누어야지 뭐.

5. 2에서 그린 함수의 그래프를 보면
- 함수 $f(x)$는 -2에서 시작해서 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 까지 올라갔다가(증가), $x=\pi$까지 감소해서 -1을 찍고 다시 증가해서 $x=\frac{3\pi}{2}$에서 0을 찍는다.

- $x=\frac{\pi}{4}$에서 미분이 안되네.

6. 이제 $(x)-t|$ 를 한번 살펴보자.

[큰 경우 1] $f(x)-t$에 부호변화가 생기지 않음

(경우1) $t \quad -2$: $g(t)=1$ $(k=\frac{\pi}{4})$

(경우2) $t \quad \frac{\sqrt{2}}{2}$: $g(t)=1\,(k=\frac{\pi}{4})$

[큰 경우 2] $f(x)-t$에 부호변화가 생김 $(-2<t<1)$

$\sqrt{|f(x)-t|}$ 를 미분하면 $\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)-t}}$ 이거나 $\frac{-f'(x)}{2\sqrt{-f(x)+t}}$

그런데... 이렇게 적으려면 분모가 0이 되어서는 안되지.
그렇다면 $f(x)=t$인 지점에서는 어떻게 하지?

(1) $f'(x) \quad 0$: 기울기가 무한대이므로 미분 불가
(2) $f'(x)=0$: 속도 비교를 해야 함
(이걸 미분 가능하다고 생각하면 극한 개념을 망각한 것임)

일단 $f(x)=t$인 지점에서 미분이 불가능한데... (분모 때문에)
$t=f(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$: 이건 [큰 경우1]에서 살펴보았으니 배제해도 되겠다.)
$f(x)=t$인 교점 개수를 잘 봐야겠다. ($f'(x)=0$이어도 분모 문제를 해결할 수 없다)

(경우1) $-2<t<-1$: $g(t)=2$ $(k=\frac{\pi}{4},\ f(x)=t$인 지점 하나)

(경우2) $t=-1$: $g(t)=3$ $(k=\frac{\pi}{4},\ f(x)=t$인 지점 2개)

(경우3) $-1<t<0$: $g(t)=4$ $(k=\frac{\pi}{4},\ f(x)=t$인 지점 3개)

(경우4) $t=0$: $g(t)=2$ $(k=\frac{\pi}{4},\ f(x)=t$인 지점 2개 중 $x=0$에서는 미분 가능)

(경우5) $0<t<\frac{\sqrt{2}}{2}$: $g(t)=3$ $(k=\frac{\pi}{4},\ f(x)=t$인 지점 2개)

7. 합성함수 $h(g(t))$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 불연속 지점을 h가 잡아주어야 함.
(이 때, t가 아니라 $g(t)$로 잡아야 함에 주의하자)
(1) $t=-2,\ -1,\ 0,\ \frac{\sqrt{2}}{2}$에서 문제가 생긴다.
(2) 이로 인하여 $g(t)$는 1, 2, 3, 4에서 문제가 생긴다.
(3) $h(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$

8. $g(\frac{\sqrt{2}}{2})=1,\ g(0)=2,\ g(-1)=3$
- 어휴, 참 정성 없이 냈다. 힌트를 이렇게 많이 주다니;

9. $h(a+5)-h(b+3)+c=h(6)-h(5)+3=5!-4!+2=120-24+3=99$

[분석]

1. 실수할 수 있는 부분들

(1) 분자에 대한 무분별한 추종

$(x)-t|$ 를 미분하면 $\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)-t}}$ 이거나 $\frac{-f'(x)}{2\sqrt{-f(x)+t}}$

일단 $f(x)=t$인 지점에서 미분이 불가능한데... (분모 때문에)

$t=f(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$: 이건 [큰 경우1]에서 살펴보았으니 배제해도 되겠다.)

$f(x)=t$인 교점 개수를 잘 봐야겠다.

<u>($f'(x)=0$이면 분모 문제를 해결할 수도, 없을 수도 있다)</u>

$f'(x)=0$이 되는 지점에서는 속도비교를 해봐야 한다.

각 경우에서 $g(t)$를 셀 때, $f'(x)=0$이 되는 지점을 배제하여 풀 경우 틀리게 됨

(2) $h(g(t))$의 연속성

$g(t)$의 불연속지점을 근으로 갖는 것이 아니라, 그것에서 파생되는 $g(t)$의 불연속지점을 근으로 가져야함.

2. 시사하는 바

(1) 그림 그리기는 옳다 : 그림은 언제나 크고, 정확하게, 한 번.

(2) 기계적인 연속 및 미분가능성 판단은 옳지 않다.

$\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)-t}}$ 이거나 $\frac{-f'(x)}{2\sqrt{-f(x)+t}}$ 에서 '분자가 날아가면 된다'라고 생각했다면 반성할 것.

(3) 미분하지 아니하고 그림을 그리는 연습($f-level$ 자체)이 매우 중요하다.

$2\sin\ x$와 $\cos x$는 편하게 그릴 수 있어야 한다.

※ $2\sin^3 x$를 쉽게 그리는 방법

(1) $\sin x$에서 쉬운 점들을 찍는다. $(-\frac{\pi}{2},-1)$, $(0,0)$, $(\frac{\pi}{4},\frac{\sqrt{2}}{2})$

(2) 세제곱하고 2를 곱한다.

(3) 적당히 스무스하게 잇는다. (미분 가능할테니까)

[가형]

30. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 y절편을 $g(t)$라 하자. 모든 실수 t에 대하여

$$(1+t^2)\{g(t+1)-g(t)\} = 2t$$

이고, $\int_0^1 f(x)dx = -\frac{\ln 10}{4}$, $f(1) = 4+\frac{\ln 17}{8}$일 때, $2\{f(4)+f(-4)\}-\int_{-4}^{4} f(x)dx$의 값을 구하시오. [4점]

[사고의 흐름 및 풀이]

1. 실수 전체의 집합, 미분 가능 (x)
2. $y=f(x)$위의 점 $(t, f(t))$
3. 그 점에서의 접선 $y=f'(t)(x-t)+f(t)$
4. 이 접선의 y절편 $g(t)=f(t)-tf'(t)$
5. 모든 실수 t에 대한 항등식(미분이 가능하다)

   $(1+t\ )\ g(t+1)-g(t)\}=2t$: $g(t+1)-g(t)$가 어디서 많이 봤던 놈이다. (수열)

6. ${}_0^1 f(x)dx = -\frac{\ln 10}{4}$, $f(1)=4+\frac{\ln 17}{8}$

   이건 상수값 구하라고 준 '두 개의 조건' : 미지수가 기껏해야 2개짜리인 문제임

   ($OF=2$: 고로 졸라 쉬운 편에 속함)

7. 구해야 하는 것? $2\{f(4)+f(-4)\}-\int_{-4}^{4} f(x)dx$

5번 먼저 처리하자.

(바로 미분 또는 적분하고 시작하면 매우 위험하다. 수능의 킬러에서 바라보는 미분과 적분은 '필요 시 진행하는 것'이며 차원을 이동하기 전, 할 수 있는 건 다 해야 틀리지 않는다)

$f-level$

(1) $t=0$: $g(1)-g(0)=0$

$g(1)=g(0)$에서 $f(1)-f'(1)=f(0)$

(2) 5에서 $1+t^2$은 0이 아니므로 양변을 나누면

$g(t+1)-g(t)=\frac{2t}{1+t^2}$

우변은 적분이 가능한데, 좌변은? $g(t)=f(t)-tf'(t)$ 대입하긴 싫은데?

$f^{+}-level$

(3) $g(t)$의 부정적분을 그냥 $G(t)$라 하면

$G(t+1)-G(t)=\ln(1+t^2)+C$ ... (a)

$t=0$을 넣으면 $G(1)-G(0)=C$

(4) $g(t)=f(t)-tf'(t)$ 이니 $\int_0^1 f(x)dx=-\frac{\ln 10}{4}$랑 같이 써보자. ($C$ 찾기)

$$C=\int_0^1\{f(t)-tf'(t)\}dt=\int_0^1 f(t)dt-\left[tf(t)\Big|_0^1-\int_0^1 f(t)dt\right]$$

$$=2\int_0^1 f(t)dt-f(1)=\left(-\frac{\ln 10}{2}\right)-\left(4+\frac{\ln 17}{8}\right)$$

(이라고 적고 시발것이라고 읽는다. 계산 작작좀 시켜라;)

(5) 주어진 조건은 다 썼는데 $f(4)+f(-4)\}-\ {}_{4}^{4}f(x)dx$ 로 어떻게 가지?

(6) (4)를 자세히 보면... 문제에서 구해야 하는 것과 형태가 유사함을 확인할 수 있다.

$2\{f(4)+f(-4)\}-\int_{-4}^{4}f(x)dx$ .... $2\int_{0}^{1}f(t)dt-f(1)=(-\dfrac{\ln 10}{2})-(4+\dfrac{\ln 17}{8})$

(7) 형태는 비슷한데, 구간 확장이 필요하다. 어쩌지? 어쩌긴 항등식 써먹어야지.
(a)를 다시 보자. '수열에서 많이 쓰던 걸 사용해야겠다'라는 생각이 들어야 한다.
(다 더하면 중간은 다 사라지고, 처음과 끝만 남는다!)

$t=-4$: $(-3)-G(-4)=\ln 17+C$
$t=-3$: $G(-2)-G(-3)=\ln 10+C$
$t=-2$: $\ln 5+C$
$t=-1$: $\ln 2+C$
$t=0$: C
$t=1$: $\ln 2+C$
$t=2$: $\ln 5+C$
$t=3$: $\ln 10+C$
(진심 계산;)

이걸 다 더해야지. 그러면 처음과 끝만 남지.
$G(4)-G(-4)=2(\ln 2+\ln 5+\ln 10)+\ln 17+8C$

앞에서 구한 C를 데리고와서 계산을 하면 (ㅅㅂ)
$G(4)-G(-4)=-32$

이제 좌변의 표현을 바꿔보자.
$G(4)-G(-4)=2\int_{-4}^{4}f(t)dt-4\{f(4)+f(-4)\}=-32$

문제에서 묻는 $2\{f(4)+f(-4)\}-\int_{-4}^{4}f(x)dx$ 는 순서 바꾸고, 2로 나누어야 하니 답은 16

2. 시사하는 바

(1) 계산력으로 시간 소요 정도를 조절할 수도 있다.
- 계산은 천천히 하는 것이 좋다.

(2) 간접적인 함수 찾기의 중요성
- (x), $g(x)$가 뭔지 모르지만, 적분값과 함숫값이 얽혀있는 건 구할 수 있다.
- 어떻게? 항등식을 이용해서 간접적으로 파고 들어간다.

(3) 간접적인 정답 구하기의 중요성
- 문제에서 묻는 것 : $2\ f(4)+f(-4)\}-\ {}_{4}^{4} f(x)dx$
- 직접적으로 구한다? $f(x)$를 찾아서 계산하고 적분한다(이건 쉬운 문제용).

vs

- 간접적으로 구한다? 저걸 통째로 찾는다(이게 머리 싸움).

※ 그림을 그려서 푸는 방법도 있으나, 이건 분량이 길어지므로 다음번에 다루어볼게요.

(4) 접선에서 파생되는 개념(y절편)으로부터 원래함수에 대한 정보를 간접적으로 추정이 가능하다.

(5) 접선 파생 개념들의 연습

[접선] $y=f'(t)(x-t)+f(t)$

[법선] $y=\dfrac{-1}{f'(t)}(x-t)+f(t)$

[변형] $y=f'(t)(x-a)+b$: (a,b)를 지나면서 기울기는 $f'(t)$인 직선
($x=t$에 접선을 그리고 평행이동시켜서 (a,b)를 지나게 만든다)

[변형] $y=f'(t)(x-f(t))+t$: $(f(t),t)$를 지나면서 기울기는 $f'(t)$인 직선
($x=t$에서 접선을 그리고, $(f(t),t)$를 지나게 평행이동시킨다.

[변형] $y=f'(x)(x-t)+f(t)$: 신기한 곡선

[변형] $y=\dfrac{f'(t)}{f(t)}(x-t)+f(t)$: 무슨 곡선일까요?