0911

채원

목차

2018 - 11

이과

제 2 교시

수학 영역(가 형)

② 1 : 3

홀수형

5지선다형

1. 두 벡터 $\vec{a}=(3,\ -1)$, $\vec{b}=(1,\ 2)$에 대하여 벡터 $\vec{a}+\vec{b}$의 모든 성분의 합은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

① ② 합 바로 적기

2+3

① $= \frac{5x}{2x}$ ②

2. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{e^{2x}-1}$의 값은? [2점]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

3. 좌표공간의 두 점 A(1, 6, 4), B(a, 2, −4)에 대하여 선분 AB를 1 : 3으로 내분하는 점의 좌표가 (2, 5, 2)이다. a의 값은? [2점]

①

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

a만 보기

③ $\frac{a+3}{4}=2$

4. 두 사건 A와 B는 서로 독립이고

①

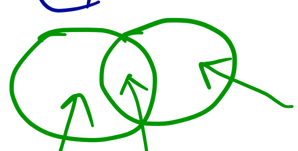
$$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{3},\quad \mathrm{P}(A\cup B)=\frac{5}{6}$$

일 때, $\mathrm{P}(B)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{5}{12}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{7}{12}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

그림

②



$\frac{2}{3}(1-x)$ $\frac{2}{3}x$ $\frac{1}{3}x$

③ $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}x=\frac{5}{6}$

5. 닫힌 구간 $[1, 3]$에서 함수 $f(x) = 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$의 최댓값은? [3점]

② ① <1

① $\frac{5}{3}$ ② 2 ③ $\frac{7}{3}$ ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ 3

지수함수

② 6 2

6. $\left(x + \frac{2}{x}\right)^8$의 전개식에서 x^4의 계수는? [3점]

①

① 108 ② 112 ③ 116 ④ 120 ⑤ 124

이항정리

③ ${}_8C_6 \cdot 2^2$

2^6 4

4/8 7

21

7. $0 \le x < 2\pi$일 때, 방정식

①

$$\cos^2 x = \sin^2 x - \sin x$$

의 모든 해의 합은? [3점]

① 2π ② $\frac{5}{2}\pi$ ③ 3π ④ $\frac{7}{2}\pi$ ⑤ 4π

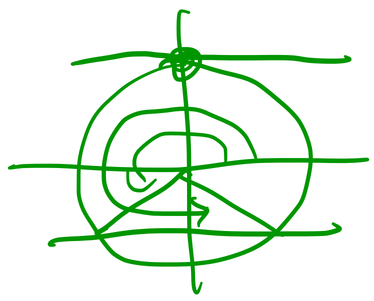
△ 방정식

② $1 - t^2 = t^2 - t$

$2t^2 - t - 1 = 0$

③ $(2t+1)(t-1)$

$t = 1, \ -\frac{1}{2}$



④ 合 3π

8. 1 타원 $\frac{(x-2)^2}{a}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$ 의 두 초점의 좌표가 $(6,\ b)$, $(-2,\ b)$ 2 일 때, ab 의 값은? (단, a 는 양수이다.) [3점]

① 40 ② 42 ③ 44 ④ 46 ⑤ 48

3 $2k=8$ $k=4$ $a=20$

타원 $b=-2$

$a-16=4$

9. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 1 함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x)=\frac{f(x)}{e^{x-2}}$$

$= 2\ f\cdot e^{2-x}$

라 하자. $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-3}{x-2}=5$ 일 때, $g'(2)$ 의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

미분

3 $f(2)=3$

$f'(2)=5$

$f'\cdot e^{2-x}+f\cdot e^{2-x}\cdot(-1)$

$5\cdot 1-3\cdot 1.$

10. 어느 공장에서 생산하는 화장품 1개의 내용량은 평균이 201.5 g이고 표준편차가 1.8 g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공장에서 생산한 화장품 중 임의추출한 9개 1 의 화장품 내용량의 표본평균이 200 g 이상일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.7745 ② 0.8413 ③ 0.9332 ④ 0.9772 ⑤ 0.9938

추정

$\sqrt{n}=3.$

2 $\bar{x}\ge 200$

$z\ge \cancel{\frac{-1.5}{\frac{1.8}{3}}}$ $\cancel{0.6}$ $-\frac{5}{2}$

3

11. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 있다. $f(x)$가 $g(x)$의 역함수이고 $f(1)=2$, $f'(1)=3$이다. 함수 $h(x)=xg(x)$라 할 때, $h'(2)$의 값은? [3점]

① 1　② $\frac{4}{3}$　③ $\frac{5}{3}$　④ 2　⑤ $\frac{7}{3}$

①

②

$h' = g + xg'$

$1 + 2 \cdot g'(2)$ $\frac{1}{3}$

미분

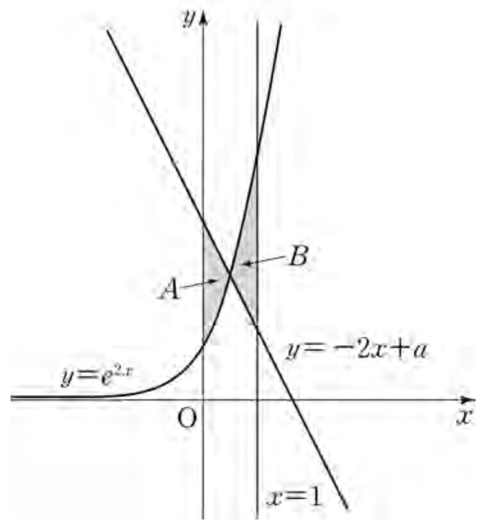
12. 곡선 $y=e^{2x}$과 y축 및 직선 $y=-2x+a$로 둘러싸인 영역을 A, 곡선 $y=e^{2x}$과 두 직선 $y=-2x+a$, $x=1$로 둘러싸인 영역을 B라 하자. A의 넓이와 B의 넓이가 같을 때, 상수 a의 값은? (단, $1<a<e^2$) [3점]

①

① $\frac{e^2+1}{2}$　② $\frac{2e^2+1}{4}$　③ $\frac{e^2}{2}$

④ $\frac{2e^2-1}{4}$　⑤ $\frac{e^2-1}{2}$

적분



②

$$\int_0^1 (e^{2x}+2x-a)\,dx = 0$$

$$\frac{1}{2}e^{2x}+x^2-ax$$

$$\frac{1}{2}(e^2-1)+1-a=0$$

$$\frac{e^2+1}{2}$$

5×5

13. 한 개의 주사위를 두 번 던진다. 6의 눈이 한 번도 나오지 않을 때, 나온 두 눈의 수의 합이 4의 배수일 확률은? [3점]

① $\frac{4}{25}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{6}{25}$ ④ $\frac{7}{25}$ ⑤ $\frac{8}{25}$

a+b= 4. 8. ~~12~~.

13 22 31

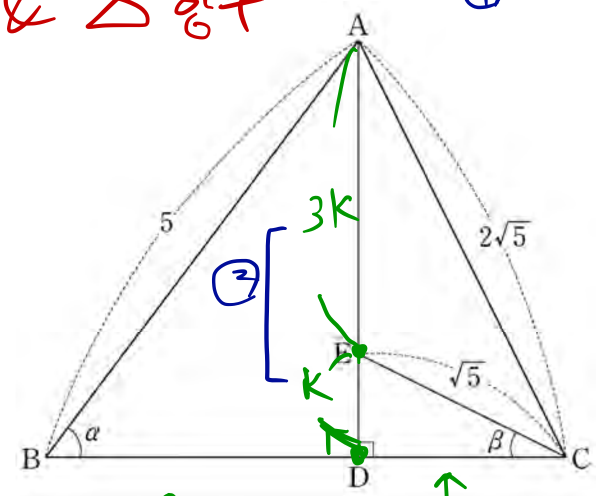
33 44 53

$\frac{6}{25}$

확률

14. 그림과 같이 $\overline{AB}=5$, $\overline{AC}=2\sqrt{5}$인 삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 D라 하자. 선분 AD를 3 : 1로 내분하는 점 E에 대하여 $\overline{EC}=\sqrt{5}$이다. $\angle ABD=\alpha$, $\angle DCE=\beta$라 할 때, $\cos(\alpha-\beta)$의 값은? [4점]

기하 & △ 함수



① $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{\sqrt{5}}{4}$ ③ $\frac{3\sqrt{5}}{10}$ ④ $\frac{7\sqrt{5}}{20}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\sqrt{25-16k^2} = 3$

$5-k^2 = 20-16k^2$

$15k^2=15$

$\therefore k=1$

$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\frac{4}{5}$ $\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\frac{6+4}{5\sqrt{5}}$ $\frac{10}{5\sqrt{5}}$

15. 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\int_0^x \frac{1}{1+e^{-t}}dt$$

일 때, $(f\circ f)(a)=\ln 5$를 만족시키는 실수 a의 값은? [4점]

① $\ln 11$ ② $\ln 13$ ③ $\ln 15$ ④ $\ln 17$ ⑤ $\ln 19$

1 $f(0)=0.$

적분

$\int_0^x \frac{e^t}{e^t+1}dt=f(x)$

$\|$

2 $\ln(e^t+1)\Big|_0^x$

$\ln\frac{e^x+1}{2}=\ln 5$

3 $x=\ln 9$

$\downarrow$

4 $x=\ln 17$

16. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(0<t<\pi)$에서의 위치 $\mathrm{P}(x,\,y)$가

$$x=\sqrt{3}\sin t,\quad y=2\cos t-5$$

이다. 시각 $t=\alpha\,(0<\alpha<\pi)$에서 점 P의 속도 $\vec{v}$와 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$가 서로 평행할 때, $\cos\alpha$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{3}{10}$ ④ $\frac{2}{5}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

1 벡터

$k(\sqrt{3}c,\ -2st)$

2 $\|$

$(\sqrt{3}s,\ 2c-5)$

3

1 $kc=s$

2 $-2ks=2c-5$

$-2k^2s=2kc-5k$

$=2s-5k$

$s(2+2k^2)=5k$

$\therefore s=\frac{5k}{2+2k^2}$

$c=\frac{5}{2+2k^2}$

$\Downarrow$

$25k^2+25=(2+2k^2)^2$

$25(k^2+1)=4\cdot(k^2+1)^2$

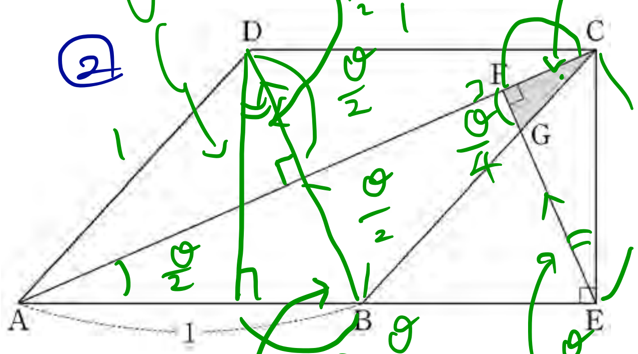
$\therefore k^2+1=\frac{25}{4}$

4 $2k^2+2=\frac{25}{2}$

$c=\frac{2}{5}$

17. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 마름모 ABCD가 있다. 점 C에서 선분 AB의 연장선에 내린 수선의 발을 E, 점 E에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 F, 선분 EF와 선분 BC의 교점을 G라 하자. $\angle DAB = \theta$일 때, 삼각형 CFG의 넓이를 $S(\theta)$라 하자.

$\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^5}$의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) [4점]



① $\frac{1}{24}$ ② $\frac{1}{20}$ ③ $\frac{1}{16}$ ④ $\frac{1}{12}$ ⑤ $\frac{1}{8}$

기하 & △ 함수 & 극한

$\frac{\theta^5}{8} \cdot \frac{1}{2}$

18. 서로 다른 공 4개를 남김없이 서로 다른 상자 4개에 나누어 넣으려고 할 때, 넣은 공의 개수가 1인 상자가 있도록 넣는 경우의 수는? (단, 공을 하나도 넣지 않은 상자가 있을 수 있다.) [4점]

① 220 ② 216 ③ 212 ④ 208 ⑤ 204

경우의 수

A B C D 상자

1 2 3 4 공

A B C D

1 1 1 1 : 4!

1 2 1 0 : $_4C_2 \times {}_2C_1 \times {}_1C_1 \times \frac{1}{2!} \times {}_4C_3 \times 3!$

1 3 0 0 : $_4C_3 \times {}_4C_2 \times 2!$

$24 + \underbrace{6 \times 4 \times 6}_{24 \times 6} + \underbrace{4 \times 6 \times 2}_{24 \times 2}$

24×9

계산.

19. 무게가 1인 추 6개, 무게가 2인 추 3개와 비어 있는 주머니 1개가 있다. 주사위 한 개를 사용하여 다음의 시행을 한다. (단, 무게의 단위는 g이다.)

$\frac{1}{3}$ ①

> 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 2 이하이면 무게가 1인 추 1개를 주머니에 넣고, 눈의 수가 3 이상이면 무게가 2인 추 1개를 주머니에 넣는다.

$\frac{2}{3}$

위의 시행을 반복하여 주머니에 들어 있는 추의 총무게가 처음으로 6보다 크거나 같을 때, 주머니에 들어 있는 추의 개수를 확률변수 X라 하자. 다음은 X의 확률질량함수 $\mathrm{P}(X=x)\ (x=3,4,5,6)$을 구하는 과정이다.

> (i) $X=3$인 사건은 주머니에 무게가 2인 추 3개가 들어 있는 경우이므로
>
> $\mathrm{P}(X=3)=$ $\boxed{(가)}$
>
> $_3C_3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{2^3}{3^3}$ ②
>
> (ii) $X=4$인 사건은
> 세 번째 시행까지 넣은 추의 총무게가 4이고 네 번째 시행에서 무게가 2인 추를 넣는 경우와
> 세 번째 시행까지 넣은 추의 총무게가 5인 경우로 나눌 수 있다. 그러므로
>
> 112
>
> $\mathrm{P}(X=4)=$ $\boxed{(나)}$ $+\ _3C_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^2$
>
> ③ $_3C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}$
>
> (iii) $X=5$인 사건은
> 네 번째 시행까지 넣은 추의 총무게가 4이고 다섯 번째 시행에서 무게가 2인 추를 넣는 경우와
> 네 번째 시행까지 넣은 추의 총무게가 5인 경우로 나눌 수 있다. 그러므로
>
> 1112
>
> $\mathrm{P}(X=5)=\ _4C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^0\times\frac{2}{3}+$ $\boxed{(다)}$
>
> ④ $_4C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\frac{2}{3}$
>
> (iv) $X=6$인 사건은 다섯 번째 시행까지 넣은 추의 총무게가 5인 경우이므로
>
> $\mathrm{P}(X=6)=\left(\frac{1}{3}\right)^5$

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 a, b, c라 할 때, $\frac{ab}{c}$의 값은? [4점]

확률

① $\frac{4}{9}$ ② $\frac{7}{9}$ ③ $\frac{10}{9}$ ④ $\frac{13}{9}$ ⑤ $\frac{16}{9}$

$$\frac{\frac{2^3}{3^3}\times\frac{2^2}{3^4}}{4\cdot\frac{2}{3^4}}$$ ⑤

20. 좌표공간에 한 직선 위에 있지 않은 세 점 A, B, C가 있다. 다음 조건을 만족시키는 평면 α에 대하여 각 점 A, B, C와 평면 α 사이의 거리 중에서 가장 작은 값을 $d(\alpha)$라 하자.

> (가) 평면 α는 선분 AC와 만나고, 선분 BC와도 만난다.
> (나) 평면 α는 선분 AB와 만나지 않는다.

위의 조건을 만족시키는 평면 α 중에서 $d(\alpha)$가 최대가 되는 평면을 β라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

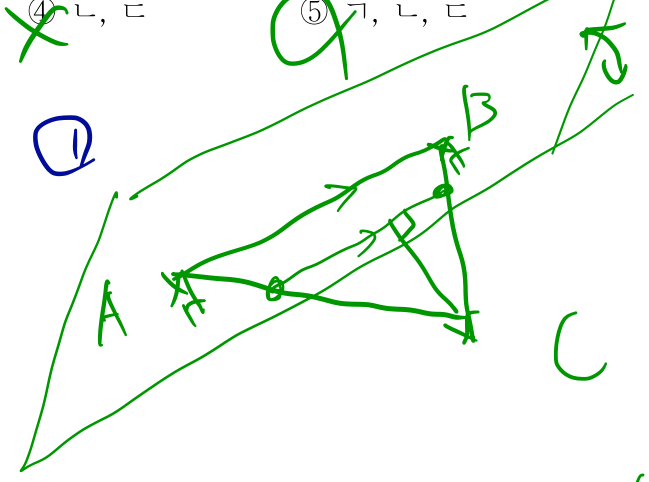
공간도형

<보 기>

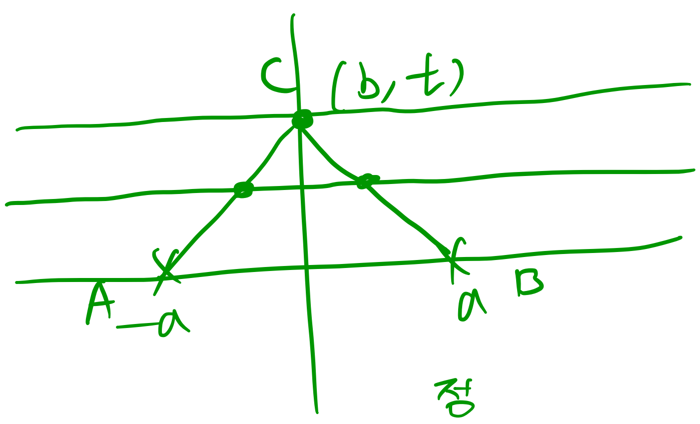
ㄱ. 평면 β는 세 점 A, B, C를 지나는 평면과 수직이다.
ㄴ. 평면 β는 선분 AC의 중점 또는 선분 BC의 중점을 지난다.
ㄷ. 세 점이 A$(2, 3, 0)$, B$(0, 1, 0)$, C$(2, -1, 0)$일 때, $d(\beta)$는 점 B와 평면 β 사이의 거리와 같다. : 된다면X

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

①



② $d(\alpha)=f(a,b,t)$



③
		점	$d(\alpha)$
$t>a$	:	R_M	$\frac{1}{2}\overline{BC}$
$-a\le t\le a$	:	R_M & L_M	$\frac{1}{2}b$
$t<-a$	:	L_M	$\frac{1}{2}\overline{AC}$

$e^{-a-1} = \frac{1}{e+2}$

21. 양수 t에 대하여 구간 $[1, \infty)$에서 정의된 함수 $f(x)$가

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & (1 \le x < e) \\ -t + \ln x & (x \ge e) \end{cases}$$

① 일 때, 다음 조건을 만족시키는 일차함수 $g(x)$ 중에서 직선 $y = g(x)$의 기울기의 최솟값을 $h(t)$라 하자.

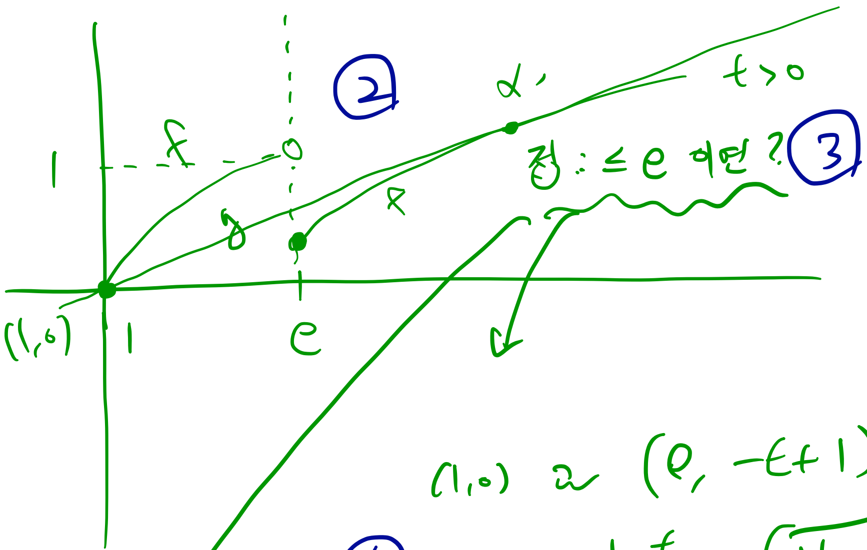
> 1 이상의 모든 실수 x에 대하여 $(x-e)\{g(x) - f(x)\} \ge 0$ 이다.

미분가능한 함수 $h(t)$에 대하여 양수 a가 $h(a) = \frac{1}{e+2}$을 만족시킨다. $h'\left(\frac{1}{2e}\right) \times h'(a)$의 값은? [4점] 미분

⑤

① $\frac{1}{(e+1)^2}$ ② $\frac{1}{e(e+1)}$ ③ $\frac{1}{e^2}$

④ $\frac{1}{(e-1)(e+1)}$ ⑤ $\frac{1}{e(e-1)}$



$1 \le x < e$: $g \le f$
$x = e$: 항상 OK.
$x > e$: $g \ge f$

(1,0) 과 $(e, -t+1)$

④ $h(t) = \frac{1-t}{e-1} \Rightarrow h'(t) = \frac{-1}{e-1}$

⑥ $y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha) \leftarrow (1,0)$

$0 - (-t + \ln\alpha) = \frac{1}{\alpha}(1-\alpha)$

$t = \frac{1}{\alpha}(1-\alpha) + \ln\alpha = \frac{1}{\alpha} - 1 + \ln\alpha.$

$h(t) = \frac{1}{\alpha}$: $t = h(t) - 1 + \ln\alpha.$

$h(t) = t + 1 - \ln\alpha \rightarrow$

$= \frac{1}{e+2}$

$\alpha = e+2$

단답형

22. ${}_5C_3$의 값을 구하시오. [3점]

경우의 수 10

23. 함수 $f(x) = \ln(x^2+1)$에 대하여 $f'(1)$의 값을 구하시오. [3점]

미분 $\frac{2x}{x^2+1}$ 1

⑦ $dt = \left(-\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha}\right) \cdot d\alpha$

$= -\frac{1-\alpha}{\alpha^2} \cdot d\alpha$

$1 - e - 2$

$= -e - 1$

$h'(t) = 1 - \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt}$

$= 1 + \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\alpha^2}{1-\alpha}$

$= 1 + \frac{\alpha}{1-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$

⑧ $-\frac{1}{e+1}$

24. 곡선 $2x+x^2y-y^3=2$ 위의 점 $(1, 1)$에서의 접선의 기울기를 구하시오. [3점]

미분

$2+2xy+x^2y'$
$-3y^2y'=0$

$2+2+y'-3y'=0$

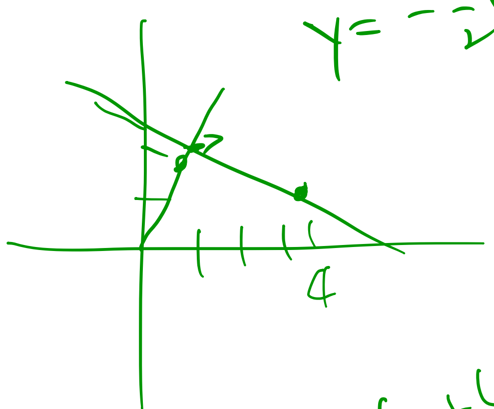
2

25. 좌표평면 위의 점 $(4, 1)$을 지나고 벡터 $\vec{n}=(1, 2)$에 수직인 직선이 x축, y축과 만나는 점의 좌표를 각각 $(a, 0)$, $(0, b)$라 하자. $a+b$의 값을 구하시오. [3점]

벡터

9

$y=-\frac{1}{2}(x-4)+1$



$2y=-x+4+2$
$x+2y=6$

26. 확률변수 X가 평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 따르고

$$\mathrm{P}(X \le 3)=\mathrm{P}(3 \le X \le 80)=0.3$$

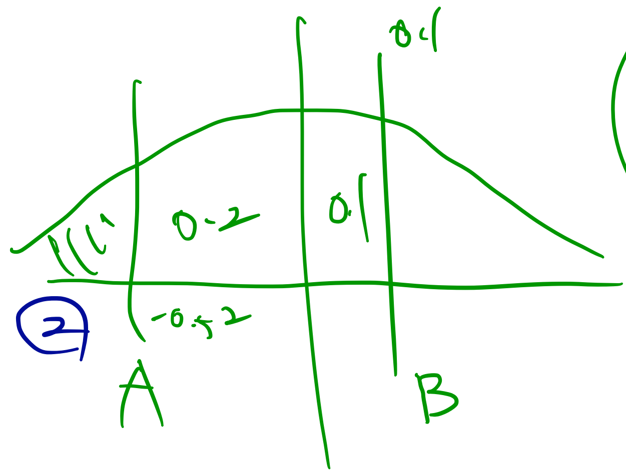
일 때, $m+\sigma$의 값을 구하시오.
(단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 0.25)=0.1$, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 0.52)=0.2$로 계산한다.) [4점]

추정

① $P\left(Z \le \frac{3-m}{\sigma}\right)$ A

$=P\left(A \le Z \le \frac{80-m}{\sigma}\right)=0.3$

155



②

2

③ $\frac{3-m}{\sigma}=-0.52$

$\frac{80-m}{\sigma}=0.25$

$\frac{80-m}{3-m}=-\frac{25}{52}$

$-75+25m=-52m+80\times52$

$77m=4235$

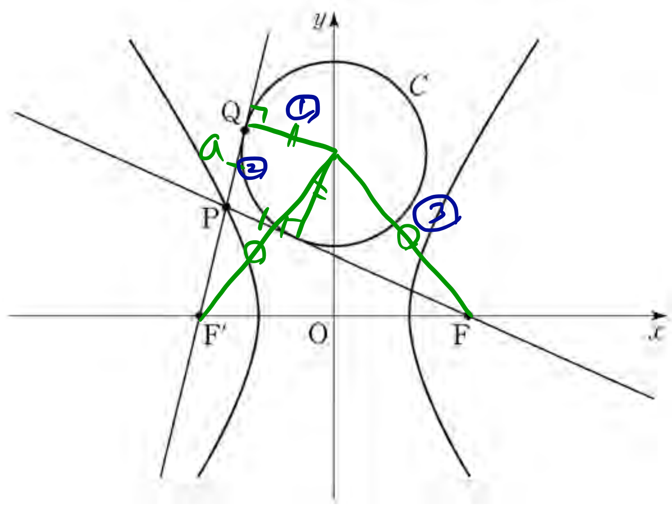
$m=55$

$\sigma=$

160
400
4160
75

27. 그림과 같이 두 초점이 F, F′인 쌍곡선 $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{17}=1$ 위의 점 P에 대하여 직선 FP와 직선 F′P에 동시에 접하고 중심이 y축 위에 있는 원 C가 있다. 직선 F′P와 원 C의 접점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{F'Q}}=5\sqrt{2}$일 때, $\overline{\mathrm{FP}}^2+\overline{\mathrm{F'P}}^2$의 값을 구하시오. (단, $\overline{\mathrm{F'P}}<\overline{\mathrm{FP}}$) [4점]

쌍곡선



④ $5\sqrt{2}+a-(5\sqrt{2}-a)=4\sqrt{2}$

$a=2\sqrt{2}$

$3\sqrt{2}^2+7\sqrt{2}^2=18+98$

$=116$

28. 방정식 $x+y+z=10$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z) 중에서 임의로 한 개를 선택한다. 선택한 순서쌍 (x, y, z)가 $(x-y)(y-z)(z-x)\neq0$을 만족시킬 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

≥ 0

확률

① $x'+y'+z'=13$

② ${}_{12}C_2=\frac{12\cdot11}{2\cdot1}=66$

2개 =

③
1 1 3
2 2 3
3 3 3
4 4 3
5 5 3
6 6 3

18

3개 = : X

④ $\frac{48}{66}$ $\frac{8}{11}$

19

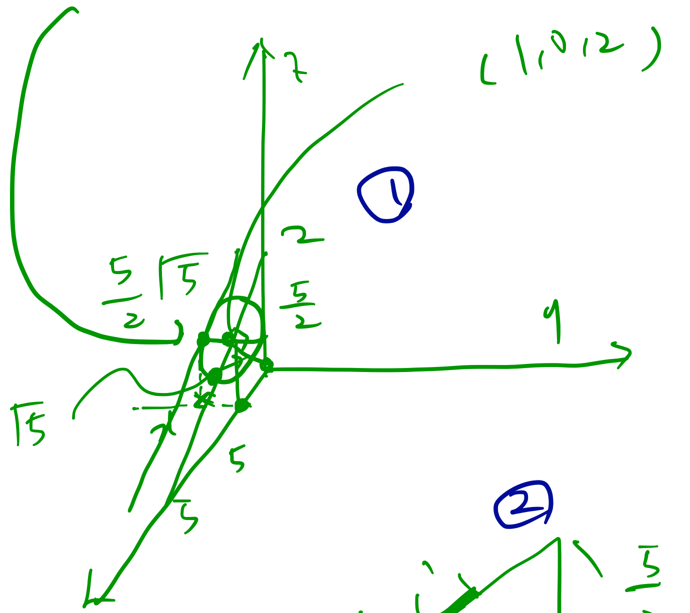
$u'v = uv - \int uv'$

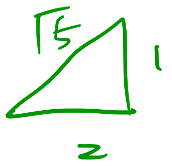
29. 좌표공간에 구 $x^2+y^2+z^2=6$이 평면 $x+2z-5=0$과 만나서 생기는 원 C가 있다. 원 C 위의 점 중 y좌표가 최소인 점을 P라 하고, 점 P에서 xy평면에 내린 수선의 발을 Q라 하자. 원 C 위를 움직이는 점 X에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{PX}}+\overrightarrow{\mathrm{QX}}|^2$의 최댓값은 $a+b\sqrt{30}$이다. $10(a+b)$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 유리수이다.) [4점]

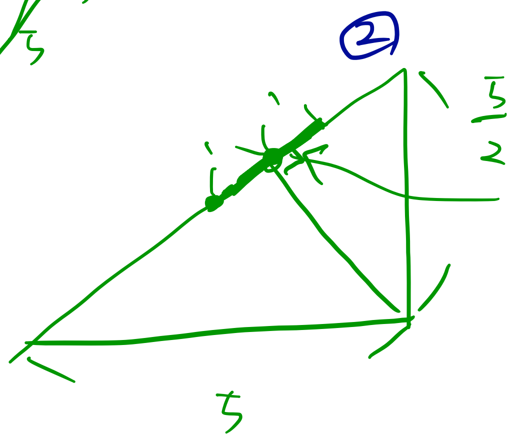
(1,-1,2)

공간도형

136





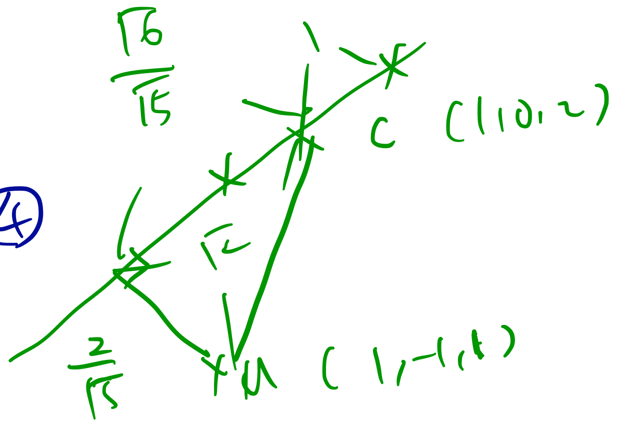


P(1,-1,2)

Q(1,-1,0) > M(1,-1,1)

→ 4MX²

PX+QX = 2MX



$\left(\frac{\sqrt5+\sqrt6}{\sqrt5}\right)^2+\frac{4}{5}$

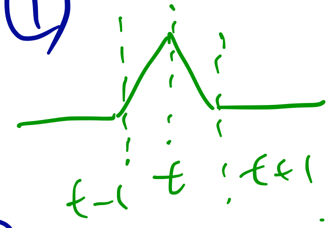
$12+\frac{8}{5}\sqrt{30}$

$\frac{4+11+2\sqrt{30}}{5}$

$3+\frac{2}{5}\sqrt{30}$

30. 실수 t에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases}1-|x-t| & (|x-t|\le 1)\\ 0 & (|x-t|>1)\end{cases}$$



이라 할 때, 어떤 홀수 k에 대하여 함수

$$g(t)=\int_k^{k+8} f(x)\cos(\pi x)\,dx = \underbrace{\frac{1}{\pi}f\sin\pi x\Big|_k^{k+8}}_{=0} - \frac{1}{\pi}\int_k^{k+8} f'\sin\pi x\,dx$$

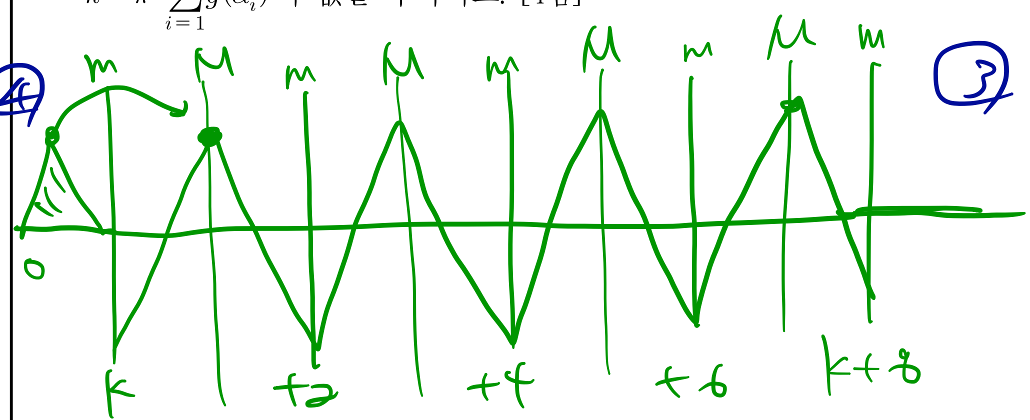
계산용.

가 다음 조건을 만족시킨다.

적분

> 함수 $g(t)$가 $t=\alpha$에서 극소이고 $g(\alpha)<0$인 모든 α를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ (m은 자연수)라 할 때, $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i=45$이다.

$k-\pi^2\sum_{i=1}^{m}g(\alpha_i)$의 값을 구하시오. [4점]



$5\times\square=45$

$\therefore k+4=9$

$k=5$

$5-8\times\pi^2\cdot\int_5^6 \sin\pi x\,dx$

$=5+8\pi^2\cdot\frac{1}{\pi^2}[\cos\pi x]_5^6$

$=5+8\times2=21$

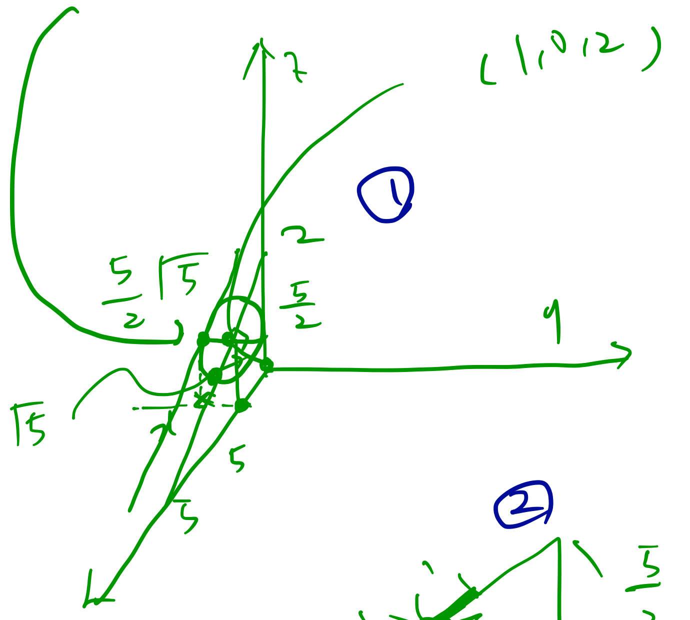
> ※ 확인 사항
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

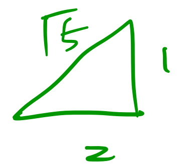
$u'v = uv - \int uv'$

29. 좌표공간에 구 $x^2+y^2+z^2=6$이 평면 $x+2z-5=0$과 만나서 생기는 원 C가 있다. 원 C 위의 점 중 y좌표가 최소인 점을 P라 하고, 점 P에서 xy평면에 내린 수선의 발을 Q라 하자. 원 C 위를 움직이는 점 X에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{PX}}+\overrightarrow{\mathrm{QX}}|^2$의 최댓값은 $a+b\sqrt{30}$이다. $10(a+b)$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 유리수이다.) [4점]

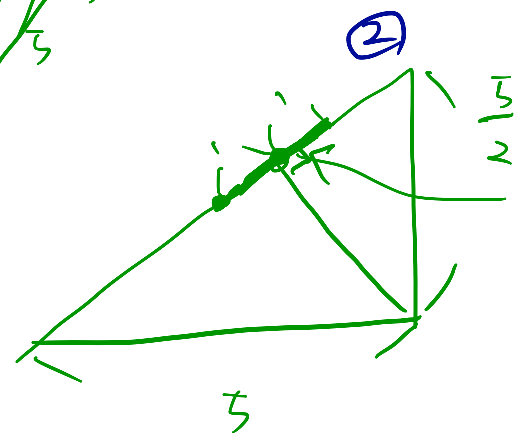
(1,-1,2) 공간도형 136

① (1,0,2)





②

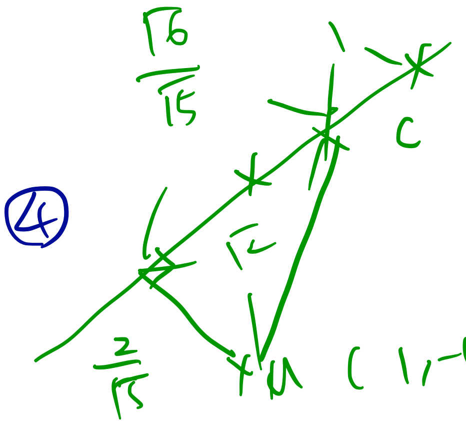


P(1,-1,2)
Q(1,-1,0) > M(1,-1,1)

→ 4MX

③ PX+QX = 2MX

④



120
16

$\left(\frac{\sqrt5+\sqrt6}{\sqrt5}\right)^2 + \frac{4}{5}$ $\quad 12+\frac{8}{5}\sqrt{30}$

⑤ $\frac{4+11+2\sqrt{30}}{5}$ $\quad 3+\frac{2}{5}\sqrt{30}$

30. 실수 t에 대하여 함수 $f(x)$를

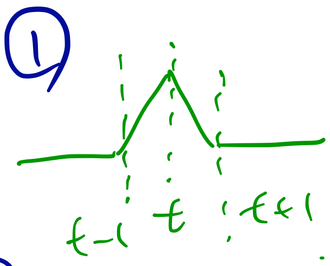
$$f(x)=\begin{cases}1-|x-t| & (|x-t|\le 1)\\ 0 & (|x-t|>1)\end{cases}$$

이라 할 때, 어떤 홀수 k에 대하여 함수

$$g(t)=\int_k^{k+8} f(x)\cos(\pi x)\,dx$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

①



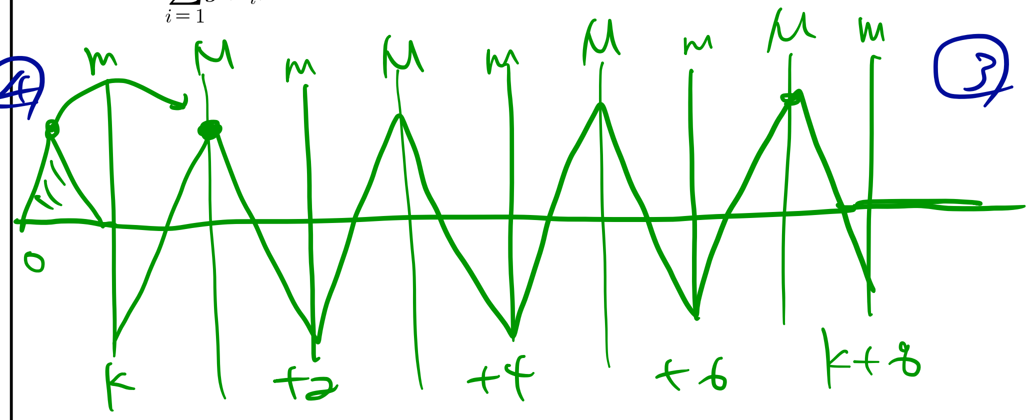
② $= \underbrace{\frac{1}{\pi}f\sin\pi x\Big|_k^{k+8}}_{=0} - \frac{1}{\pi}\int_k^{k+8} f'\sin\pi x\,dx$

계산용. 적분

> 함수 $g(t)$가 $t=\alpha$에서 극소이고 $g(\alpha)<0$인 모든 α를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ (m은 자연수)라 할 때, $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i=45$이다.

$k-\pi^2\sum_{i=1}^{m}g(\alpha_i)$의 값을 구하시오. [4점]

④ ③



⑤ $5\times\square=45$

$\therefore k+4=9$

$k=5$

⑥ $5 - 8\times\pi^2\cdot\int_5^6 \sin\pi x\,dx$

$= 5+8\pi^2\cdot\frac{1}{\pi^2}\left[\cos\pi x\right]_5^6$

$= 5+8\times 2 = 21$ ⑦

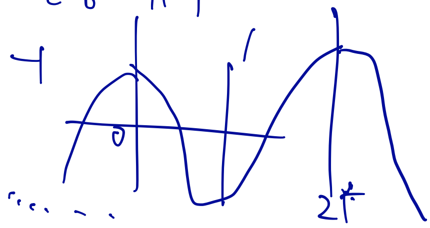
* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x-t| = \tilde{f}(x-t) = \tilde{f}(t-x) \\ 0 \end{cases}$$

$t-1 \le x \le t+1$

Cos πx

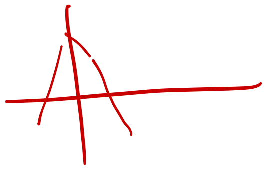


$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$$

$a \le t-1 \le t+1 \le b$

$$= \int_{t-1}^{t+1} \tilde{f}(t-x)\, g(x)\, dx$$

cos



cos πx

$$= f * g(t)$$

$g(t-x)$

$\parallel$

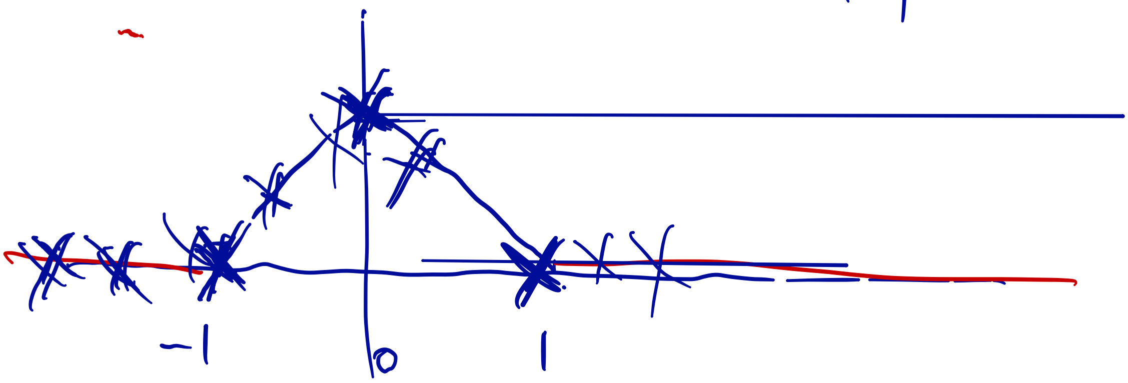
$g(x-t)$

$$= g * f(t)$$

$$g(t) = \int_{t-1}^{t+1} \tilde{f}(x)\, g(t-x)\, dx \; : \; g'(t) = \tilde{f}(t+1)\, g(-1) - \tilde{f}(t-1)\, g(2)$$

$$= -\tilde{f}(t+1) - \tilde{f}(t-1)$$

$|1-|x|| = -(\; + \;)$



2018 - 9

이과

제 2 교시

수학 영역(가 형)

5지선다형

1. 두 벡터 $\vec{a}=(6,\ 2)$, $\vec{b}=(0,\ 4)$에 대하여 벡터 $\vec{a}-\vec{b}$의 모든 성분의 합은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

8-4=4

2. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{4x}$의 값은? [2점]

① $\frac{3}{4}$ ② 1 ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{7}{4}$

2 : 1

3. 좌표공간의 두 점 $\mathrm{A}(2,\ 0,\ 4)$, $\mathrm{B}(5,\ 0,\ a)$에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점이 x축 위에 있을 때, a의 값은? [2점]

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

4. 두 사건 A, B에 대하여

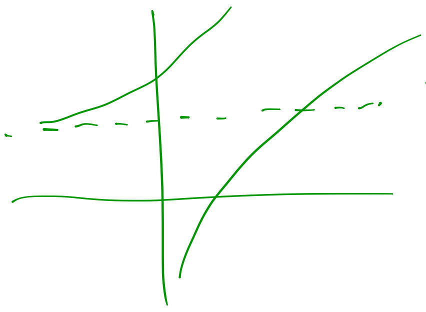
$$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{3},\quad \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{5}$$

일 때, $\mathrm{P}(B\,|\,A)$의 값은? [3점]

① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{7}{15}$ ③ $\frac{8}{15}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

5. 곡선 $y=2^x+5$의 점근선과 곡선 $y=\log_3 x+3$의 교점의 x좌표는? [3점]

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15



$0 \le 2x \le 2\pi$

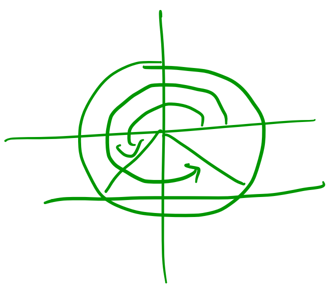
6. $0 \le x \le \pi$일 때, 방정식

$$1+\sqrt{2}\sin 2x=0$$

의 모든 해의 합은? [3점]

① π ② $\frac{5\pi}{4}$ ③ $\frac{3\pi}{2}$ ④ $\frac{7\pi}{4}$ ⑤ 2π

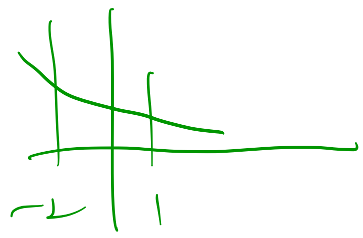
S $2x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$



$2(x_1+x_2) = 3\pi$

7. $0<a<1$인 실수 a에 대하여 함수 $f(x)=a^x$은 닫힌 구간 $[-2,\ 1]$에서 최솟값 $\frac{5}{6}$, 최댓값 M을 갖는다. $a \times M$의 값은? [3점]

① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{4}{5}$ ④ 1 ⑤ $\frac{6}{5}$



$a^{-2}=M = \frac{36}{25}$

$a^{1} = \frac{5}{6}$

8. $\int_1^e \frac{3(\ln x)^2}{x}dx$의 값은? [3점]

① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

$\ln x = t$

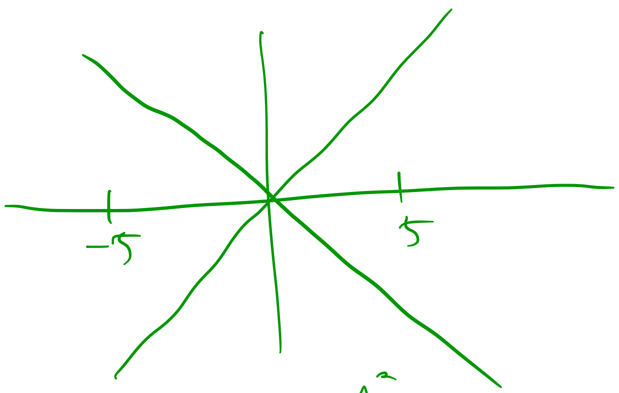
$\frac{1}{x}\cdot dx = dt$

$\int_0^1 3t^2 dt$

9. 다음 조건을 만족시키는 쌍곡선의 주축의 길이는? [3점]

(가) 두 초점의 좌표는 $(5,0)$, $(-5,0)$이다. (나) 두 점근선이 서로 수직이다.

① $2\sqrt{2}$ ② $3\sqrt{2}$ ③ $4\sqrt{2}$ ④ $5\sqrt{2}$ ⑤ $6\sqrt{2}$



$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$

$a^2 - 25 = -a^2$

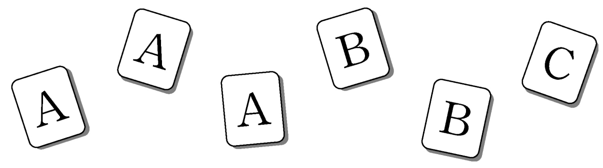
$2a^2 = 25$

$a^2 = 25/2$

$a = 5/\sqrt{2}$

10. A, A, A, B, B, C의 문자가 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 있다. 이 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 임의로 나열할 때, 양 끝 모두에 A가 적힌 카드가 나오게 나열될 확률은? [3점]

① $\frac{3}{20}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{3}{10}$ ⑤ $\frac{7}{20}$



$$\frac{\frac{4!}{3!}}{\frac{6!}{3!2!}}$$

11. 함수 $f(x)=x^3+5x+3$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g'(3)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

$f(0)=3$

$f'(0)=5$

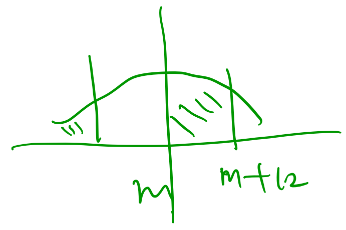
12. 확률변수 X는 평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 따르고 다음 등식을 만족시킨다.

$$\mathrm{P}(m \le X \le m+12)-\mathrm{P}(X \le m-12)=0.3664$$

오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 σ의 값을 구한 것은? [3점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12



$\frac{12}{6}=1.5$

$a-(0.5-a)=0.3664$

$2a=0.8664$

$a=0.4332$

$a=-1$

13. 좌표공간에서 직선 $\frac{x-1}{2}=y+1=z$와 직선 l이 점 $(1,\ a,\ 0)$에서 수직으로 만난다. 직선 l이 점 $(b,\ -3,\ -2)$를 지날 때, $a+b$의 값은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

$$\frac{x-1}{1-b}=\frac{y-a}{a+3}=\frac{z}{2}$$

$(1-b,\ a+3,\ 2)\cdot(2,1,1)=0$

$2-2b+a+5=0$

$a=-1$

$b=3$

14. 두 이산확률변수 X와 Y가 가지는 값이 각각 1부터 5까지의 자연수이고

$$\mathrm{P}(Y=k)=\frac{1}{2}\mathrm{P}(X=k)+\frac{1}{10}\quad (k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$$

이다. $\mathrm{E}(X)=4$일 때, $\mathrm{E}(Y)$의 값은? [4점]

① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{7}{2}$ ③ $\frac{9}{2}$ ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ $\frac{13}{2}$

1 2 3 4 5

p_1 > $p_2=\frac{1}{2}p_1+\frac{1}{10}$

p_2 → $10p_2=5p_1+1$

$p_1=\frac{1}{5}(10p_2-1)$

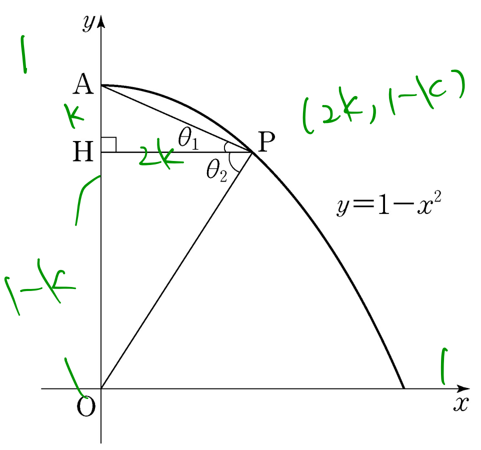
$\sum k\cdot p_1=4$

$\frac{1}{5}\sum k(10p_2-1)=4$

$2\sum kp_2-\cancel{\frac{1}{5}\sum k}=4$

15. 곡선 $y=1-x^2\,(0<x<1)$ 위의 점 P에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하고, 원점 O와 점 A$(0,\,1)$에 대하여 $\angle\mathrm{APH}=\theta_1$, $\angle\mathrm{HPO}=\theta_2$라 하자. $\tan\theta_1=\frac{1}{2}$일 때, $\tan(\theta_1+\theta_2)$의 값은? [4점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10



$(2k,\,1-k)$

$1-k=1-4k^2$

$k=\frac{1}{4}$

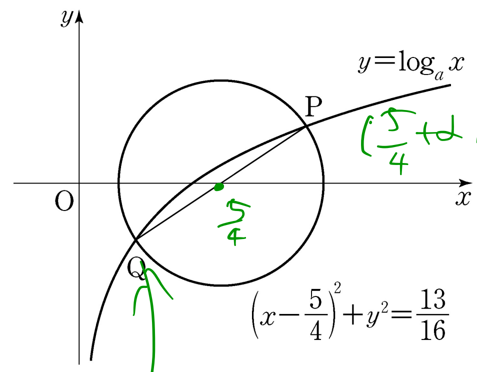
$t\theta_2=\frac{1-k}{2k}=\frac{3/4}{\frac{1}{2}}$

$=\frac{3}{2}$

$\frac{2}{1-\frac{3}{4}}$

16. $a>1$인 실수 a에 대하여 곡선 $y=\log_a x$와 원 $C:\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+y^2=\frac{13}{16}$의 두 교점을 P, Q라 하자. 선분 PQ가 원 C의 지름일 때, a의 값은? [4점]

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5



$\left(\frac{5}{4}+\alpha,\,\beta\right)$

$\frac{5}{4}$

$\left(\frac{5}{4}-\alpha,\,-\beta\right)$

$\beta=\log_a\left(\frac{5}{4}+\alpha\right)$

$-\beta=\log_a\left(\frac{5}{4}-\alpha\right)$ +

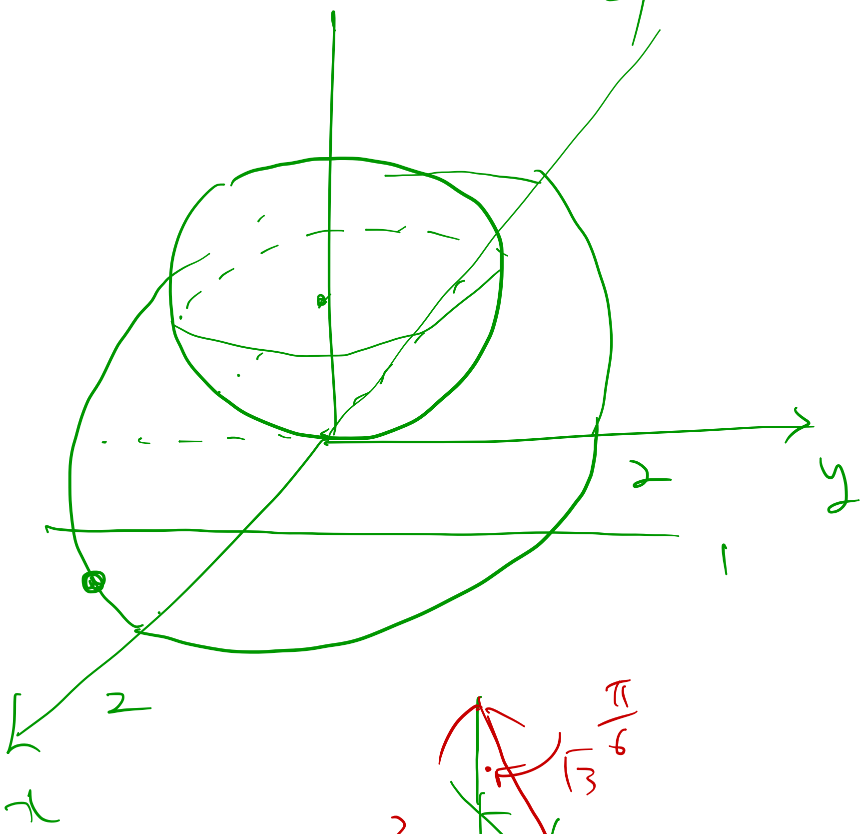
$\frac{25}{16}-\alpha^2=1$

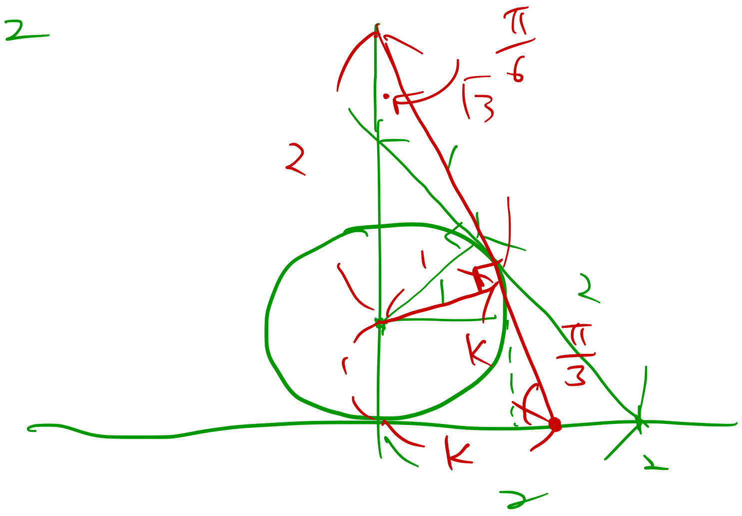
$\therefore \alpha=\frac{3}{4}$. $\beta=\frac{1}{2}$

$\log_a 2=\frac{1}{2}$

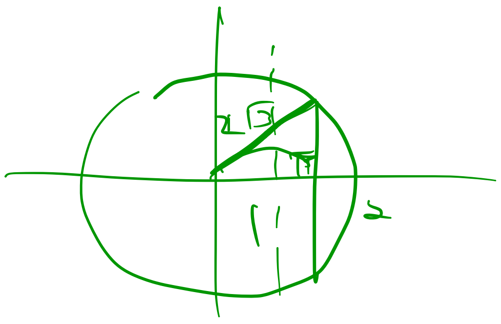
17. 좌표공간에 구 $S: x^2+y^2+(z-1)^2=1$과 xy평면 위의 원 $C: x^2+y^2=4$가 있다. 구 S와 점 P에서 접하고 원 C 위의 두 점 Q, R를 포함하는 평면이 xy평면과 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$이다. 점 P의 z좌표가 1보다 클 때, 선분 QR의 길이는? [4점]

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$



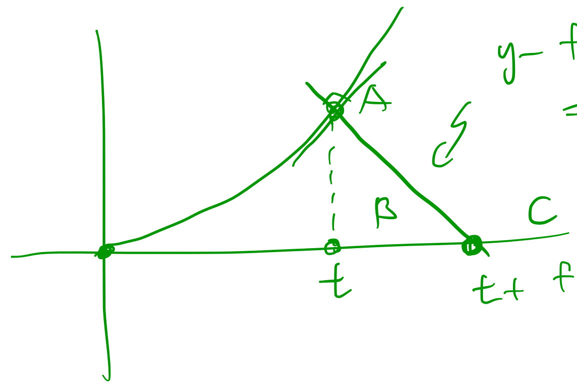


$k=\sqrt{3}$



18. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 $f(0)=0$이고 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(t, f(t))$ $(t>0)$에서 x축에 내린 수선의 발을 B라 하고, 점 A를 지나고 점 A에서의 접선과 수직인 직선이 x축과 만나는 점을 C라 하자. 모든 양수 t에 대하여 삼각형 ABC의 넓이가 $\frac{1}{2}(e^{3t}-2e^{2t}+e^{t})$일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [4점]

① $e-2$ ② e ③ $e+2$ ④ $e+4$ ⑤ $e+6$



$y-f(t)=-\frac{1}{f'(t)}(x-t)$

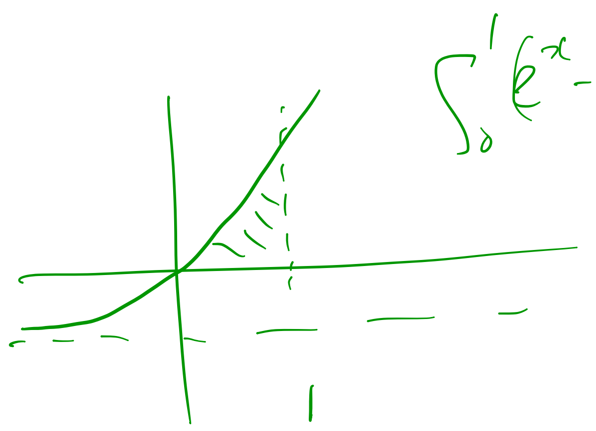
$S=\frac{1}{2}\cdot ff'\cdot f=\frac{1}{2}e^{t}(e^{2t}-2e^{t}+1)$

$(e^{t}-1)^2$

$f'=e^{t}$

$f=e^{t}-1$

$\int_0^1 (e^{x}-1)\,dx$



19. 좌표평면에서 원점 O가 중심이고 반지름의 길이가 1인 원 위의 세 점 A_1, A_2, A_3에 대하여

$$|\overrightarrow{OX}| \le 1 \text{이고 } \overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OA_k} \ge 0 \quad (k=1,\ 2,\ 3)$$

을 만족시키는 모든 점 X의 집합이 나타내는 도형을 D라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

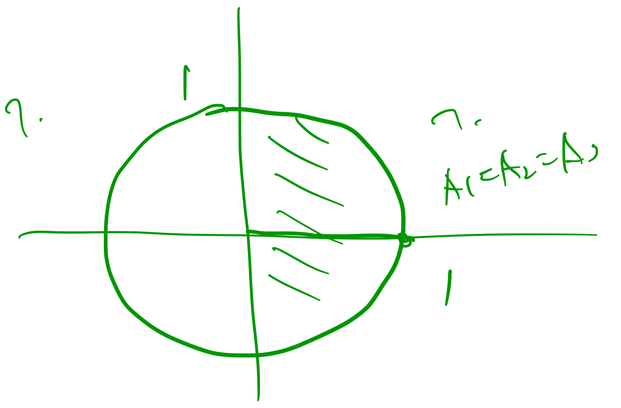
ㄱ. $\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{OA_3}$이면 D의 넓이는 $\dfrac{\pi}{2}$이다. o

ㄴ. $\overrightarrow{OA_2} = -\overrightarrow{OA_1}$이고 $\overrightarrow{OA_3} = \overrightarrow{OA_1}$이면 D는 길이가 2인 선분이다. o

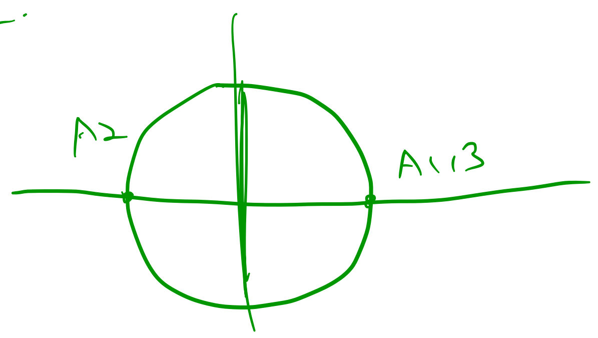
ㄷ. $\overrightarrow{OA_1} \cdot \overrightarrow{OA_2} = 0$인 경우에, D의 넓이가 $\dfrac{\pi}{4}$이면 점 A_3은 D에 포함되어 있다. o

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

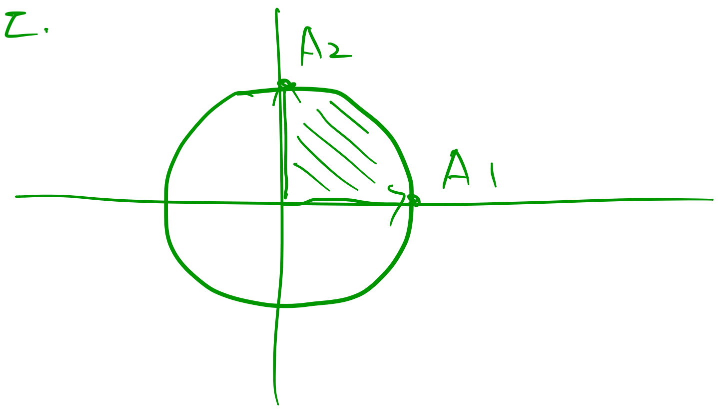
ㄱ.



ㄴ.



ㄷ.



20. 다음은 n명의 사람이 각자 세 상자 A, B, C 중 2개의 상자를 선택하여 각 상자에 공을 하나씩 넣을 때, 세 상자에 서로 다른 개수의 공이 들어가는 경우의 수를 구하는 과정이다. (단, n은 6의 배수인 자연수이고 공은 구별하지 않는다.)

세 상자에 서로 다른 개수의 공이 들어가는 경우는 '(i) 세 상자에 공이 들어가는 모든 경우'에서 '(ii) 세 상자에 모두 같은 개수의 공이 들어가는 경우'와 '(iii) 세 상자 중 두 상자에만 같은 개수의 공이 들어가는 경우'를 제외하면 된다.

(i)의 경우 :
n명의 사람이 각자 세 상자 중 공을 넣을 두 상자를 선택하는 경우의 수는 n명의 사람이 각자 공을 넣지 않을 한 상자를 선택하는 경우의 수와 같다. 따라서 세 상자에서 중복을 허락하여 n개의 상자를 선택하는 경우의 수인 $\boxed{\text{(가)}}$이다. $a\ b\ c = n$

$n+2C_2$

(ii)의 경우 :
각 상자에 $\dfrac{2n}{3}$개의 공이 들어가는 경우뿐이므로 경우의 수는 1이다.

○ ○ △ $2x+y=2n$

(iii)의 경우 :
두 상자 A, B에 같은 개수의 공이 들어가면 상자 C에는 최대 n개의 공을 넣을 수 있으므로 두 상자 A, B에 각각 $\dfrac{n}{2}$개보다 작은 개수의 공이 들어갈 수 없다. 따라서 두 상자 A, B에 같은 개수의 공이 들어가는 경우의 수는 $\boxed{\text{(나)}}$이다. $\frac{n}{2}$, $\frac{n}{2}+1$, $\cdots$, n
그러므로 세 상자 중 두 상자에만 같은 개수의 공이 들어가는 경우의 수는 ${}_3C_2 \times \left(\boxed{\text{(나)}} - 1\right)$이다. $\frac{n}{2}+1$

따라서 세 상자에 서로 다른 개수의 공이 들어가는 경우의 수는 $\boxed{\text{(다)}}$이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$, $h(n)$이라 할 때, $\dfrac{f(30)}{g(30)} + h(30)$의 값은? [4점]

① 481 ② 491 ③ 501 ④ 511 ⑤ 521

$$\frac{{}_{32}C_2}{16} + \left({}_{32}C_2 - 1 - \frac{3}{2} \times 30\right)$$

$$\frac{32 \times 31}{16 \times 2} + \left(\frac{32\ 31}{2\ 1} - 1 - 45\right)$$

$31 + 16 \times 31 - 46 =$

17

21 7

71

527

46

21. 수열 $\{a_n\}$이

$$a_1 = -1, \quad a_n = 2 - \frac{1}{2^{n-2}} \ (n \geq 2)$$

2π간

이다. 구간 $[-1,\ 2)$에서 정의된 함수 $f(x)$가 모든 자연수 n에 대하여

4π간

$$f(x) = \sin(2^n \pi x) \quad (a_n \leq x \leq a_{n+1})$$

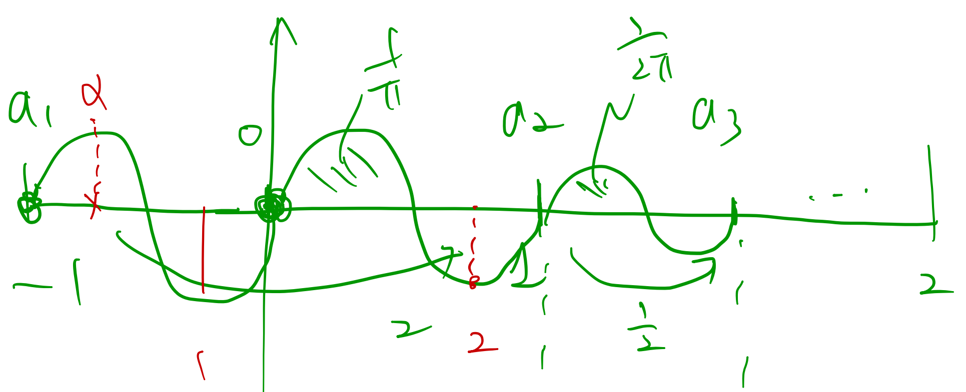
처음은 안다.

이다. $-1 < \alpha < 0$인 실수 α에 대하여 $\boxed{\int_{\alpha}^{t} f(x)\,dx = 0}$을 만족시키는 $t\,(0 < t < 2)$의 값의 개수가 103일 때, $\log_2(1 - \cos(2\pi\alpha))$의 값은? [4점]

쪼개자.

① -48 ② -50 ③ -52 ④ -54 ⑤ -56

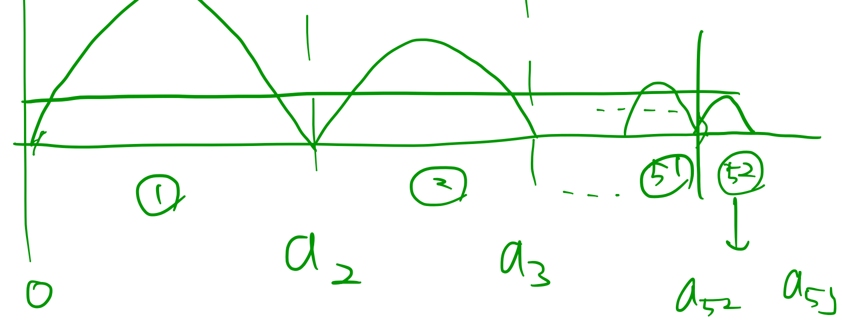
$a_n : -1,\ 2-\frac{1}{1},\ 2-\frac{1}{2},\ 2-\frac{1}{2^2},\ \cdots$



$\int_{\alpha}^{t} f\,dx = \int_{\alpha}^{0} f + \int_{0}^{t} f\,dt = 0$

$\int_{0}^{t} f\,dx = -\int_{\alpha}^{0} f\,dx$

$103 = 2 \times 51 + 1$



$-\int_{\alpha}^{0} f\,dx = \frac{1}{2^{51}\pi}$

$\frac{1}{2\pi}\cos 2\pi x\Big|_{\alpha}^{0} = \frac{1}{2^{51}\pi}$

$1 - \cos 2\pi\alpha = \frac{1}{2^{50}}$

단답형

22. ${}_7\mathrm{P}_3$의 값을 구하시오. [3점]

$7\,6\,5 = 210$

23. 함수 $f(x) = -\cos^2 x$에 대하여 $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$의 값을 구하시오. [3점]

$+2\cos x \cdot \sin x = 1$

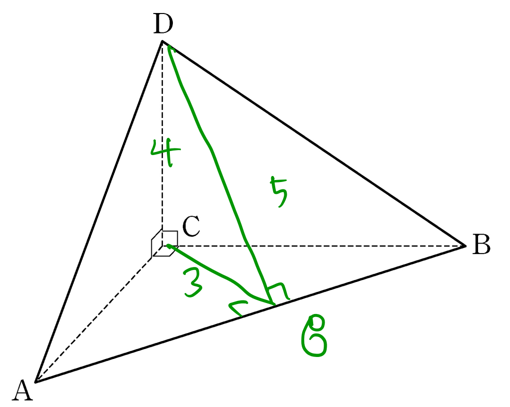
24. 곡선 $5x+xy+y^2=5$ 위의 점 $(1,\ -1)$에서의 접선의 기울기를 구하시오. [3점]

$5+y+xX+2y\cdot X=0$

$5-1+X-2X=0$

$4.$

25. $\overline{\mathrm{AB}}=8$, $\angle\mathrm{ACB}=90^\circ$인 삼각형 ABC에 대하여 점 C를 지나고 평면 ABC에 수직인 직선 위에 $\overline{\mathrm{CD}}=4$인 점 D가 있다. 삼각형 ABD의 넓이가 20일 때, 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오. [3점]



12

26. 어느 회사에서 생산하는 초콜릿 한 개의 무게는 평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사에서 생산하는 초콜릿 중에서 임의추출한, 크기가 49인 표본을 조사하였더니 초콜릿 무게의 표본평균의 값이 $\overline{x}$이었다. 이 결과를 이용하여, 이 회사에서 생산하는 초콜릿 한 개의 무게의 평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간을 구하면 $1.73\le m\le 1.87$이다. $\dfrac{\sigma}{\overline{x}}=k$일 때, $180k$의 값을 구하시오. (단, 무게의 단위는 g이고, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.96)=0.475$로 계산한다.) [4점]

$\overline{x}-1.96\cdot\dfrac{\sigma}{7}=1.73$

$\overline{x}+1.96\dfrac{\sigma}{7}=1.87$

$\overline{x}=\dfrac{3.6}{2}=1.8$

$\sigma=0.25$

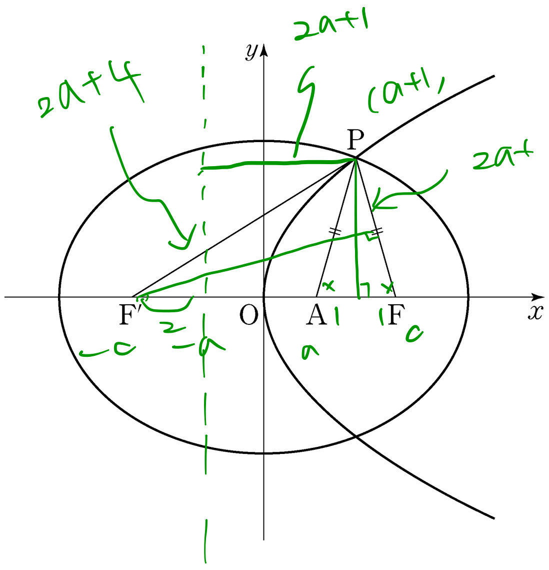
$\dfrac{0.25}{1.8}=\dfrac{25}{180}$

25

27. 좌표평면에서 초점이 $\mathrm{A}(a,\ 0)\ (a>0)$이고 꼭짓점이 원점인 포물선과 두 초점이 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)\ (c>a)$인 타원의 교점 중 제1사분면 위의 점을 P라 하자.

$$\overline{\mathrm{AF}}=2,\quad \overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PF}},\quad \overline{\mathrm{FF'}}=\overline{\mathrm{PF'}}$$

일 때, 타원의 장축의 길이는 $p+q\sqrt{7}$이다. p^2+q^2의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이다.) [4점]



이등변 △

$$\cos x = \frac{1}{2a+1} = \frac{\frac{2a+1}{2}}{2a+4}$$

$$2a+4 = \frac{1}{2}\cdot(2a+1)^2$$

$$4a+5=T$$

$$\frac{T+3}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{T-3}{2}\right)^2$$

$$T+3 = \frac{1}{4}(T-3)^2$$

$$4T+12 = T^2-6T+9$$

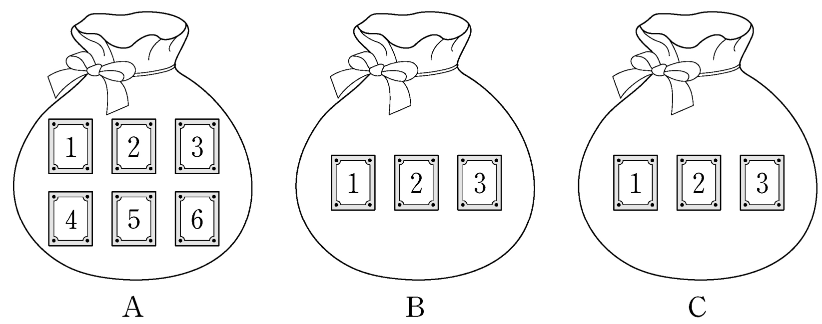
$$T^2-10T-3=0$$

$$T = 5 \pm \sqrt{28}$$

$$= 5 \pm 2\sqrt{7}$$

$$5^2+2^2 = 29$$

28. 그림과 같이 주머니 A에는 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적힌 6장의 카드가 들어 있고 주머니 B와 C에는 1부터 3까지의 자연수가 하나씩 적힌 3장의 카드가 각각 들어 있다. 갑은 주머니 A에서, 을은 주머니 B에서, 병은 주머니 C에서 각자 임의로 1장의 카드를 꺼낸다. 이 시행에서 갑이 꺼낸 카드에 적힌 수가 을이 꺼낸 카드에 적힌 수보다 클 때, 갑이 꺼낸 카드에 적힌 수가 을과 병이 꺼낸 카드에 적힌 수의 합보다 클 확률이 k이다. $100k$의 값을 구하시오. [4점]



1 2 3

2 1

3 1 2 0

4 1 2 3 0 0 0

5 1 2 3 0 0 0 0 0 0

6 1 2 3 0 0 0 0 0 0 0 0

$$\frac{18}{3\times 12} = \frac{1}{2}$$

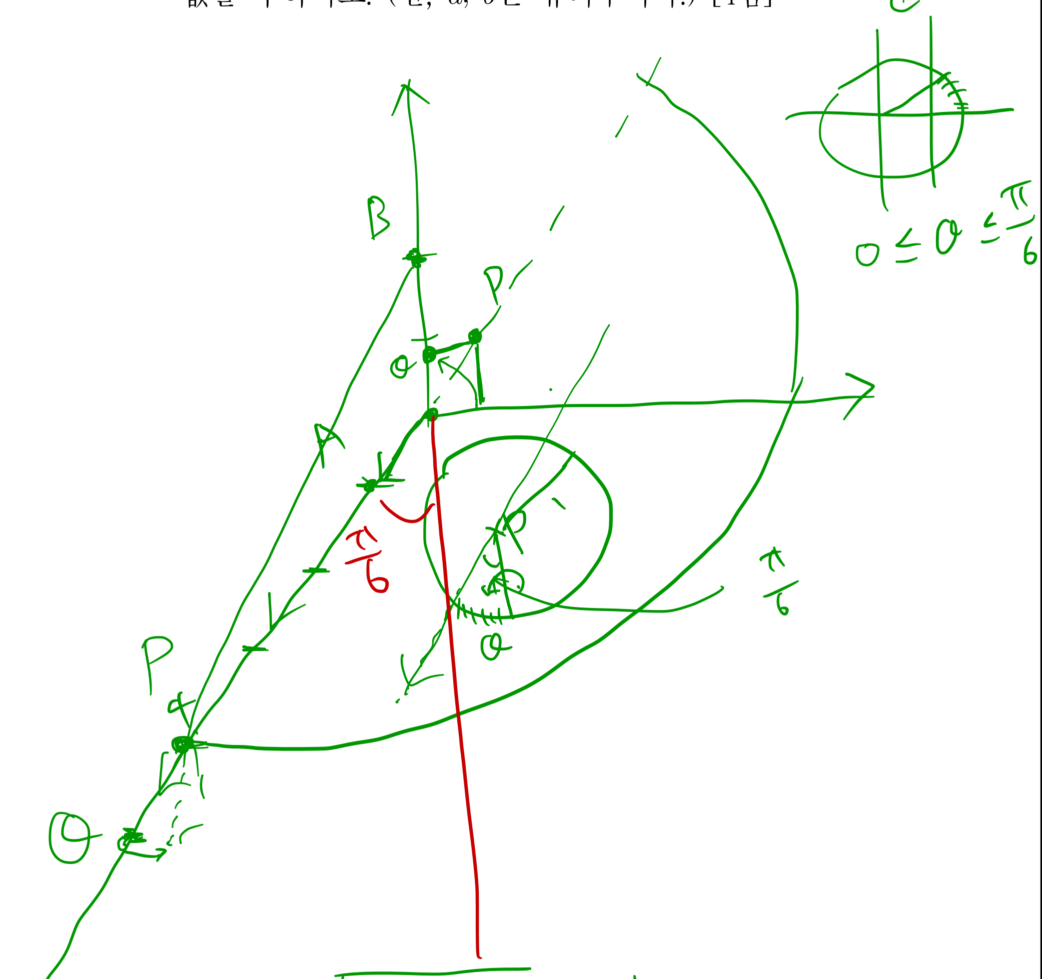
50

29. 좌표공간에 세 점 O(0, 0, 0), A(1, 0, 0), B(0, 0, 2)가 있다. 점 P가 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=0$, $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\le 4$를 만족시키며 움직일 때,

$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=1,\quad \overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}\ge\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$1\cdot1\cdot\cos\theta\ge\frac{\sqrt3}{2}$

을 만족시키는 점 Q에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{BQ}}|$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 하자. $M+m=a+b\sqrt{5}$일 때, $6(a+b)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이다.) [4점]



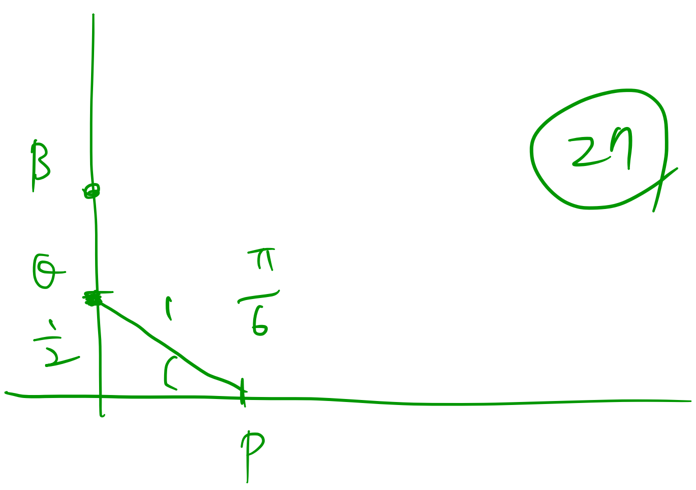
$0\le\theta\le\frac{\pi}{6}$

$M=\sqrt{2^2+4^2}+1$

$=\sqrt{20}+1$

$m=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

$\frac{5}{2}+2\sqrt5$



27

30. 함수 $f(x)=\ln(e^x+1)+2e^x$에 대하여 이차함수 $g(x)$와 실수 k는 다음 조건을 만족시킨다.

(*) $g(k)=\frac{1}{2}f(0)\ne0$

$|g(k)-f(0)|$

$f(0)-g(k)=g(k)$

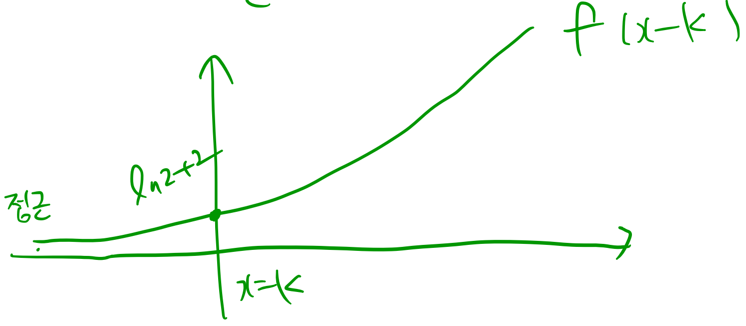
함수 $h(x)=\lvert g(x)-f(x-k)\rvert$는 $x=k$에서 최솟값 $g(k)$를 갖고, 닫힌 구간 $[k-1,\ k+1]$에서 최댓값 $2e+\ln\left(\frac{1+e}{\sqrt{2}}\right)$를 갖는다.

$k-1$ or $k+1$

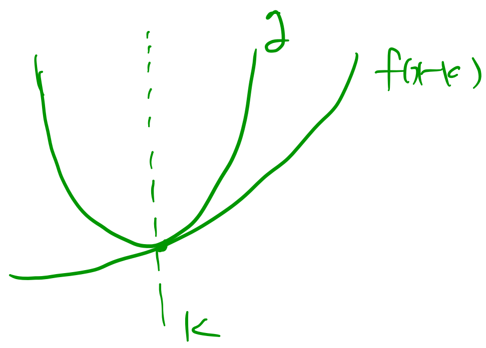
$g'\left(k-\frac{1}{2}\right)$의 값을 구하시오. (단, $\frac{5}{2}<e<3$이다.) [4점]

① f 그리기 → f 미분

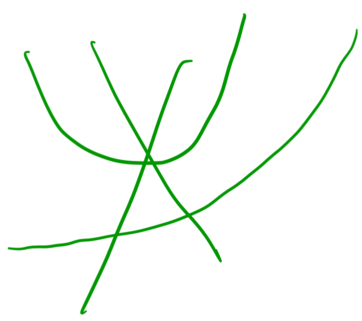
$f'=\frac{e^x}{e^x+1}+2e^x>0$



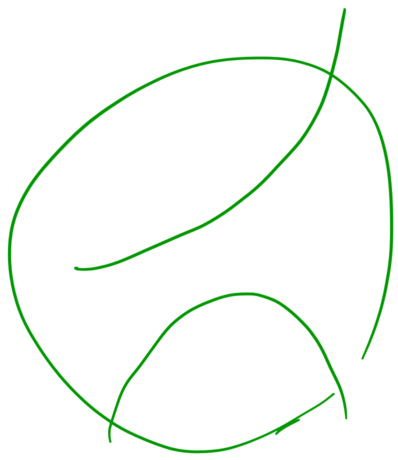
② case : 만날 수 X (∵ (*))



+ 0 +

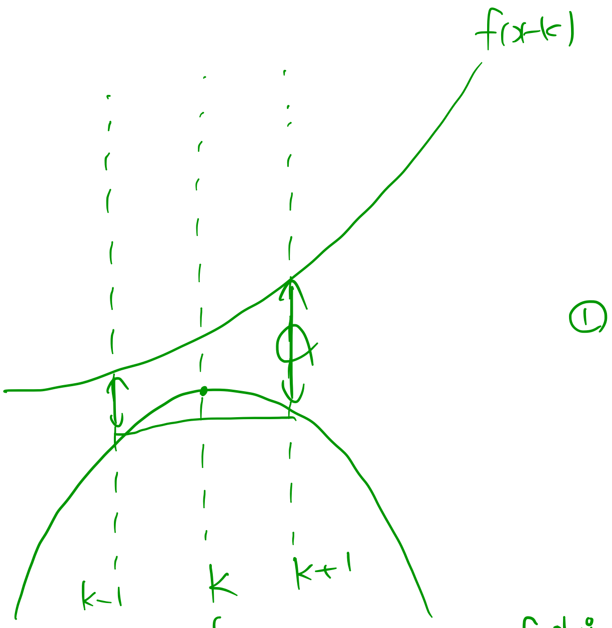


or



※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.



→ 축간격 모른다... ⇒ f 이용

① $|g(k) - f(0)| = g(k)$ ☆

$f(0) \neq 0$ ⇒ $g(k) < f(0)$

$\therefore f(0) - g(k) = g(k)$

$\boxed{g(k) = \frac{1}{2} f(0)}$

$\therefore$ g(x)의 축은 $x = k$

② M : ⓐ $\cancel{k-1}$ or $k+1$

$\therefore f(1) - g(k+1) = 2e + \ln\left(\frac{1+e}{\sqrt{2}}\right)$

$f = \ln(e^x + 1) + 2e^x$

$f' = \frac{e^x}{e^x + 1} + 2e^x$

$f(0) = \ln 2 + 2$

$f(1) = \ln(e+1) + 2e$

$\ln(e+1) + 2e$

$-g(k+1) = 2e + \ln(e+1) - \ln\sqrt{2}$

$\therefore \boxed{g(k+1) = \ln\sqrt{2}}$

☆ $h(x) = f(x-k) - g(x)$

$h'(k) = f'(0) - g'(k) = 0$

$= \frac{1}{2} + 2 - g'(k) = 0$

$\therefore \boxed{g'(k) = \frac{5}{2}}$

☆☆ $g'(k-x) = -ax + \frac{5}{2}$

$-g(k-x) = -\frac{1}{2}ax^2 + \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}f(0)$

$x = -1$: $-\cancel{\ln\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}a - \frac{5}{2} - \cancel{\ln\sqrt{2}} - 1$

$\therefore a = -7$

$\therefore g'(k-x) = 7x + \frac{5}{2}$

$x = \frac{1}{2}$: $\boxed{6}$

2016 - 11

문과

제 2 교시

수학 영역(나 형)

홀수형

5지선다형

1. $2 \times 16^{\frac{1}{4}}$ 의 값은? [2점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

지수

2. 두 집합 $A = \{2, a+1, 5\}$, $B = \{2, 3, b\}$가 $A = B$를 만족시킬 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 실수이다.) [2점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

$a+1=3$

$b=5$

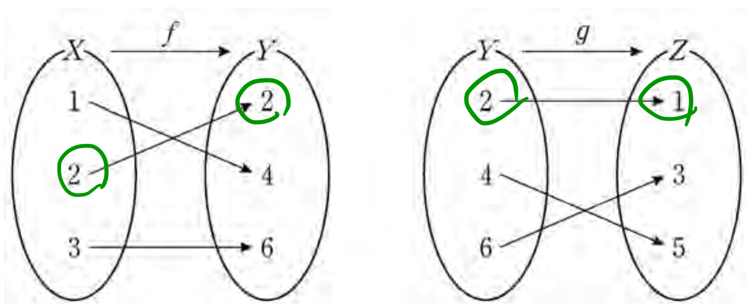
집합

3. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{5^n - 3}{5^{n+1}}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

극한

4. 그림은 두 함수 $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$를 나타낸 것이다.

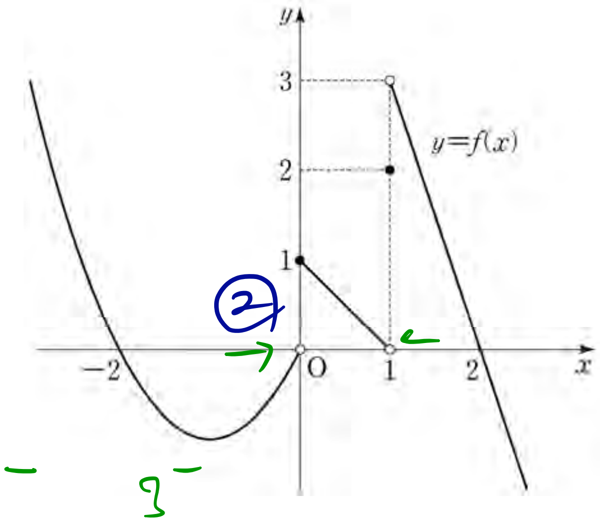


$(g \circ f)(2)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

함수

5. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



0 3

$\lim_{x\to 0-} f(x) + \lim_{x\to 1+} f(x)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

극한

6. 실수 x에 대한 두 조건 $x=1, 4$

$p:(x-1)(x-4)=0,$

$q: 1 < 2x \le a$

$p \subset Q$

에 대하여 p가 q이기 위한 충분조건이 되도록 하는 자연수 a의 최솟값은? [3점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

명제. 방정식. 부등식.

7. 어느 고등학교 전체 학생 500명을 대상으로 지역 A와 지역 B에 대한 국토 문화 탐방 희망 여부를 조사한 결과는 다음과 같다.

(단위: 명)

지역 A / 지역 B	희망함	희망하지 않음	합계
희망함	140	310	450
희망하지 않음	40	10	50
합계	180	320	500

이 고등학교 학생 중에서 임의로 선택한 1명이 지역 A를 희망한 학생일 때, 이 학생이 지역 B도 희망한 학생일 확률은? [3점]

① $\frac{19}{45}$ ② $\frac{23}{45}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{31}{45}$ ⑤ $\frac{7}{9}$

조건부 확률

8. 자연수 11을 3 이상 7 이하의 자연수로 분할하는 방법의 수는? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

분할

3 3 5 v
3 4 4 v
3 5 3 X
4 4 3 X
4 7 v
5 6 v

9. $\int_0^a (3x^2-4)dx=0$을 만족시키는 양수 a의 값은? [3점]

① 2 ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{11}{4}$ ⑤ 3

$x^3-4x=0$

적분

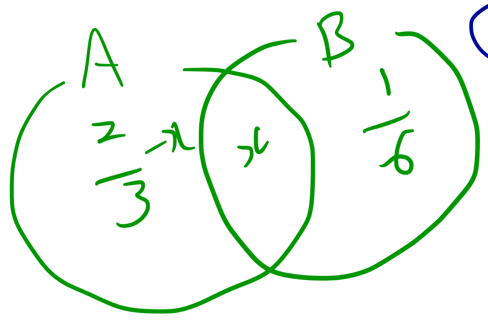
10. 두 사건 A와 B는 서로 독립이고

$$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{3},\quad \mathrm{P}(A\cup B)=\frac{5}{6}$$

일 때, $\mathrm{P}(B)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{5}{12}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{7}{12}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

확률



$\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{6}+x\right)=x$

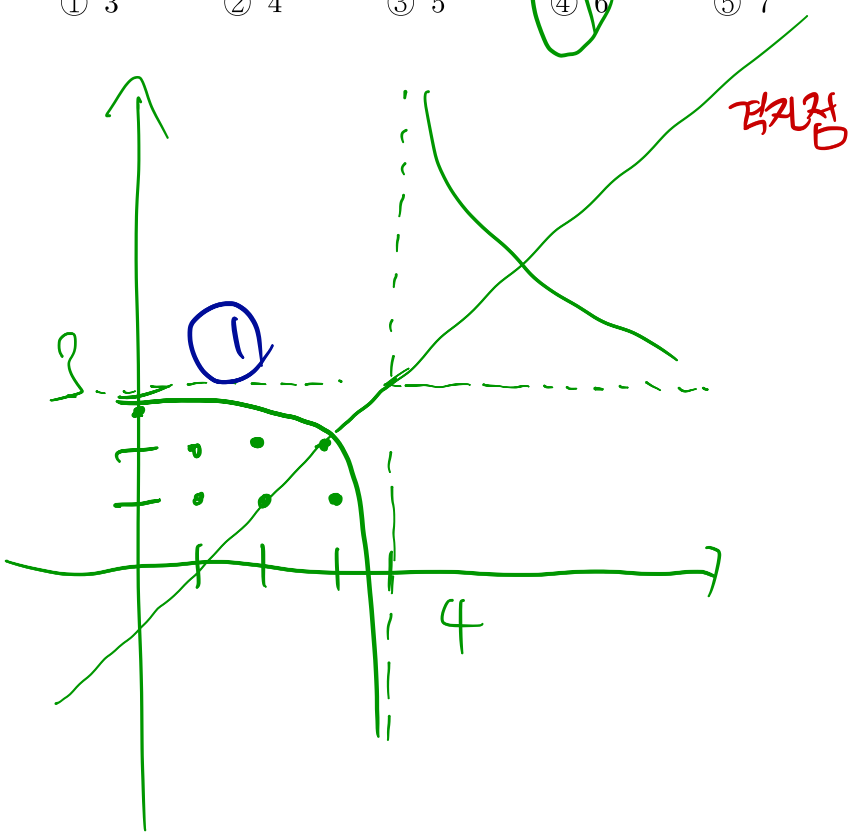
$\frac{1}{3}+2x=3x$

$2x - y = -3$

4

11. 좌표평면에서 곡선 $y=\dfrac{1}{2x-8}+3$과 x축, y축으로 둘러싸인 영역의 내부에 포함되고 x좌표와 y좌표가 모두 자연수인 점의 개수는? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7



12. $\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^8$의 전개식에서 x^4의 계수는? [3점]

① 128 ② 124 ③ 120 ④ 116 ⑤ 112

이항정리

$_8C_6 \cdot 2^2$

13. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=2$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n-1 & (a_n\text{이 짝수인 경우}) \\ a_n+n & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \end{cases}$$

①

를 만족시킨다. a_7의 값은? [3점]

① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

수열

②

$a_1=2$

$a_2=1$

$a_3=3$

$a_4=6$

$a_5=5$

$a_6=10$

$a_7=9$

14. 등차수열 $\{a_n\}$이

$$a_5+a_{13}=3a_9,\quad \sum_{k=1}^{18}a_k=\frac{9}{2}$$

를 만족시킬 때, a_{13}의 값은? [4점]

① 2 ② 1 ③ 0 ④ -1 ⑤ -2

수열

① ②

$2\times a_9=3a_9$

$a_9=0$

$a_{9.5}\times 18=\frac{9}{2}$

$0.5d$

$9d=\frac{9}{2}$

$d=\frac{1}{2}.$

15. 어느 공장에서 생산하는 화장품 1개의 내용량은 평균이 201.5g이고 표준편차가 1.8g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공장에서 생산한 화장품 중 임의추출한 9개의 화장품 내용량의 표본평균이 200g 이상일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.7745 ② 0.8413 ③ 0.9332 ④ 0.9772 ⑤ 0.9938

추정

$\bar{X} \ge 200$ -2.5

$Z \ge \frac{-1.5}{\frac{1.8}{3}}$ $\frac{15}{6}$

16. 1보다 큰 두 실수 a, b에 대하여

$$\log_{\sqrt{3}} a = \log_9 ab$$

가 성립할 때, $\log_a b$의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

32

$a^2 = \sqrt{ab}$

$a^4 = ab$

17. 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0.121	0.221	0.321	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	b	$\frac{2}{3}$	1

다음은 $\mathrm{E}(X)=0.271$일 때, $\mathrm{V}(X)$를 구하는 과정이다.

> $Y=10X-2.21$이라 하자. 확률변수 Y의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.
>
> | Y | -1 | 0 | 1 | 합계 |
> |---|---|---|---|---|
> | $\mathrm{P}(Y=y)$ | a | b | $\frac{2}{3}$ | 1 |
>
> $\mathrm{E}(Y)=10\mathrm{E}(X)-2.21=0.5$이므로
>
> $a=$ $\boxed{(가)}$, $b=$ $\boxed{(나)}$
>
> 이고 $\mathrm{V}(Y)=\frac{7}{12}$이다.
>
> 한편, $Y=10X-2.21$이므로 $\mathrm{V}(Y)=$ $\boxed{(다)}$ $\times\mathrm{V}(X)$이다.
>
> 따라서 $\mathrm{V}(X)=\frac{1}{\boxed{(다)}}\times\frac{7}{12}$이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r라 할 때, pqr의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① $\frac{13}{9}$ ② $\frac{16}{9}$ ③ $\frac{19}{9}$ ④ $\frac{22}{9}$ ⑤ $\frac{25}{9}$

$\frac{5}{6}$ $\frac{1}{6}$ 100

이산 확률분포

① $a+b=\frac{1}{3}$

② $-a+\frac{2}{3}=0.5$

$a=\frac{4}{6}-\frac{3}{6}$

18. 최고차항의 계수가 1이고 $f(1)=0$인 삼차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{(x-2)\{f'(x)\}^2}=\frac{1}{4}$$

을 만족시킬 때, $f(3)$의 값은? [4점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

미분

-2

① $(x-1)(x-2)(x-\alpha)$

$2 \cdot 1 \cdot 5$

② $\frac{(x-1)(x-\alpha)}{(-1)(-2)+(-1)(-\alpha)+(-2)(-\alpha)}$

③ $\frac{1\cdot(2-\alpha)}{1\cdot(2-\alpha)^2}=\frac{1}{4}$

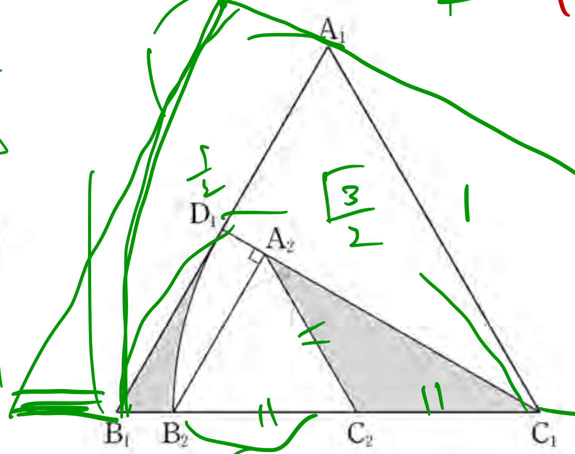
$\alpha=-2$

19. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정삼각형 $A_1B_1C_1$이 있다. 선분 A_1B_1의 중점을 D_1이라 하고, 선분 B_1C_1 위의 $\overline{C_1D_1}=\overline{C_1B_2}$인 점 B_2에 대하여 중심이 C_1인 부채꼴 $C_1D_1B_2$를 그린다. 점 B_2에서 선분 C_1D_1에 내린 수선의 발을 A_2, 선분 C_1B_2의 중점을 C_2라 하자. 두 선분 B_1B_2, B_1D_1과 호 D_1B_2로 둘러싸인 영역과 삼각형 $C_1A_2C_2$의 내부에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

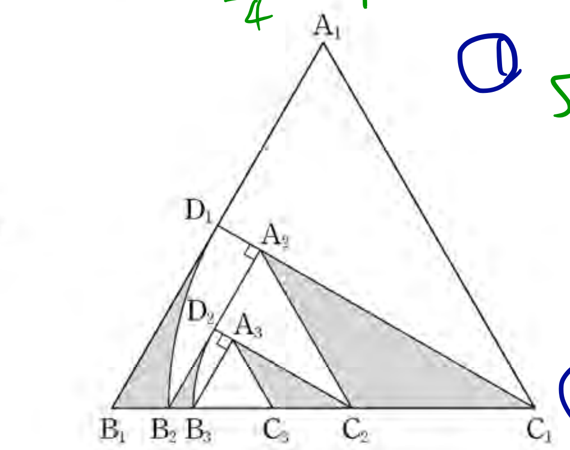
그림 R_1에서 선분 A_2B_2의 중점을 D_2라 하고, 선분 B_2C_2 위의 $\overline{C_2D_2}=\overline{C_2B_3}$인 점 B_3에 대하여 중심이 C_2인 부채꼴 $C_2D_2B_3$을 그린다. 점 B_3에서 선분 C_2D_2에 내린 수선의 발을 A_3, 선분 C_2B_3의 중점을 C_3이라 하자. 두 선분 B_2B_3, B_2D_2와 호 D_2B_3으로 둘러싸인 영역과 삼각형 $C_2A_3C_3$의 내부에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]

R_1



R_2



⋮ ⋮

① $\frac{11\sqrt{3}-4\pi}{56}$ ② $\frac{11\sqrt{3}-4\pi}{52}$ ③ $\frac{15\sqrt{3}-6\pi}{56}$

④ $\frac{15\sqrt{3}-6\pi}{52}$ ⑤ $\frac{15\sqrt{3}-4\pi}{52}$

$S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{16}\right) - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{6}$

$r = \frac{3}{16}$

20. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

$f' = 4x(x-k)^2$

(가) $f'(0)=0$, $f'(2)=16$

(나) 어떤 양수 k에 대하여 두 열린 구간 $(-\infty, 0)$, $(0, k)$에서 $f'(x)<0$이다.

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 방정식 $f'(x)=0$은 열린 구간 $(0, 2)$에서 한 개의 실근을 갖는다.

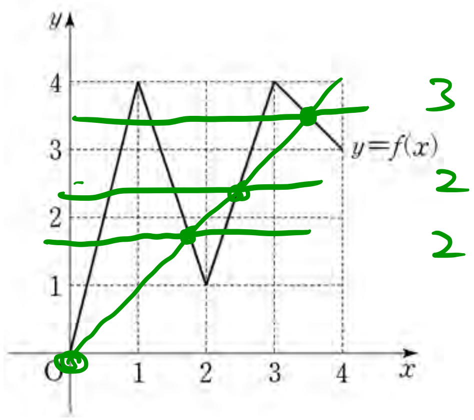
ㄴ. 함수 $f(x)$는 극댓값을 갖는다.

ㄷ. $f(0)=0$이면, 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq -\frac{1}{3}$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 그림과 같이 닫힌 구간 $[0, 4]$에서 정의된 함수 $f(x)$의 그래프는 점 $(0, 0)$, $(1, 4)$, $(2, 1)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$을 이 순서대로 선분으로 연결한 것과 같다.



3

다음 조건을 만족시키는 집합 $X = \{a, b\}$의 개수는? (단, $0 \le a < b \le 4$) [4점]

함수. 경우의 수.

> X에서 X로의 함수 $g(x) = f(f(x))$가 존재하고 $g(a) = f(a)$, $g(b) = f(b)$를 만족시킨다.

① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

1 $g(a) = f(a) = f(f(a))$
$g(b) = f(b) = f(f(b))$

$f(a) = f(f(a))$
$☆ = f(☆)$

2

1 : $4C_2 = 6$

2 : X (∵ a≠b)

3 : 2+2+3 = 7

단답형

22. ${}_5C_3$의 값을 구하시오. [3점]

경우의 수

10

23. 함수 $f(x) = 2x^3 + x + 1$에 대하여 $f'(1)$의 값을 구하시오. [3점]

7

미분

24. 전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$의 두 부분집합

$A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{2, 4, 6, 8\}$

에 대하여 $n(A\cup B^C)$의 값을 구하시오. [3점]

집합

5

$l'f(1)=\frac{1}{2}$

25. 함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to 1}(x+1)f(x)=1$ 을 만족시킬 때, $\lim_{x\to 1}(2x^2+1)f(x)=a$이다. $20a$의 값을 구하시오. [3점]

$3 \quad \frac{1}{2}$

30

미분

26. 곡선 $y=-2x^2+3x$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이가 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

적분

4

$-2x^2+2x$

$-2x(x-1)$

$\frac{1}{3}$

$>$ $\frac{1^3}{6}$

27. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10}(a_k+1)^2=28,\ \sum_{k=1}^{10}a_k(a_k+1)=16$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10}(a_k)^2$의 값을 구하시오. [4점]

14

순열

① $A+2B+10=28$

② $2A+4B=\cancel{16}\ 32$

$A-10=4$

28. 한 개의 동전을 6번 던질 때, 앞면이 나오는 횟수가 뒷면이 나오는 횟수보다 클 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

확률

앞 뒤 43

$\frac{22}{64}$ $\frac{11}{32}$

① 6 0, 5 1, 4 2 A

② 3 3 $B={}_6C_3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{20}{64}$

2 4, 1 5, 0 6 A

$\frac{3x-x^2}{2}-x = -\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}$
$= -\frac{1}{2}x(x-1)$
$\frac{1}{6}$

29. 두 실수 a와 k에 대하여 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는

$$f(x)=\begin{cases}0 & (x\le a)\\ (x-1)^2(2x+1) & (x>a)\end{cases},$$

$$g(x)=\begin{cases}0 & (x\le k)\\ 12(x-k) & (x>k)\end{cases}$$

이고, 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
> (나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge g(x)$이다.

k의 최솟값이 $\frac{q}{p}$일 때, $a+p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

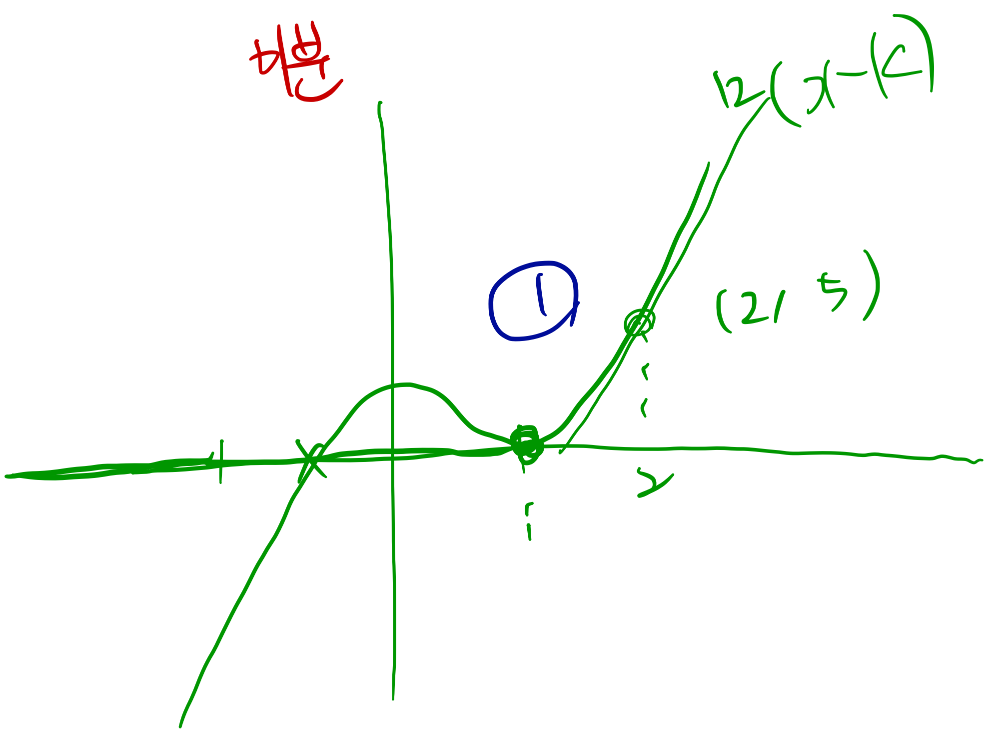
$a=1$

$12(2-k)=5$

$2-k=\frac{5}{12}$

32

미분



$2(x-1)\cdot(2x+1)$
$+(x-1)^2\cdot 2=12$
$(x-1)(4x+2+2x-2)=12$
$(x-1)(6x)=12$
$x^2-x-2=0$
$(x-2)(x+1)$

30. 이차함수 $f(x)=\frac{3x-x^2}{2}$에 대하여 구간 $[0, \infty)$에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $0\le x<1$일 때, $g(x)=f(x)$이다.
> (나) $n\le x<n+1$일 때,
> $$g(x)=\frac{1}{2^n}\{f(x-n)-(x-n)\}+x$$
> 이다. (단, n은 자연수이다.)

어떤 자연수 $k\,(k\ge 6)$에 대하여 함수 $h(x)$는

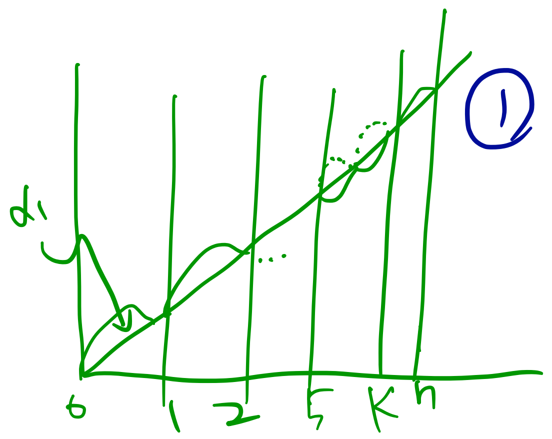
$$h(x)=\begin{cases}g(x) & (0\le x<5 \text{ 또는 } x\ge k)\\ 2x-g(x) & (5\le x<k)\end{cases}$$

이다. 수열 $\{a_n\}$을 $a_n=\int_0^n h(x)dx$라 할 때,

$\lim_{n\to\infty}(2a_n-n^2)=\frac{241}{768}$이다. k의 값을 구하시오. [4점]

적분

9



$k-5=4$

$a_n=\frac{1}{2}n^2+\Sigma b_n-2C_n$

$\frac{d_1(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}}$ $\quad\frac{d_1\cdot(\frac{1}{2})^5(1-\frac{1}{2}^★)}{1-\frac{1}{2}}$

lim $\Downarrow$ $d_1=\frac{1}{12}$

$2d_1-2\cdot(2\cdot d_1)\cdot\frac{1}{32}(1-r^★)$

$4d_1(1-\frac{1}{16}★)=\frac{241}{768}\cdot 3$

$=\frac{241}{256}$

$\frac{15}{16}$

* 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

2018 - 9

문과

제 2 교시

수학 영역(나 형)

5지선다형

1. $3^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}}$의 값은? [2점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

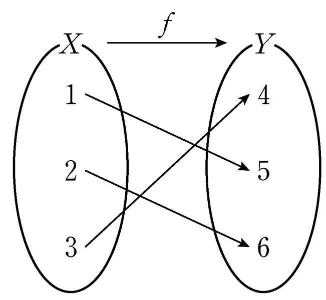
2. 두 집합

$$A=\{1, 2, 3\},\ B=\{1, 3, 5\}$$

에 대하여 집합 $A \cap B$의 모든 원소의 합은? [2점]

① 4　② 5　③ 6　④ 7　⑤ 8

3. 그림은 함수 $f: X \to Y$를 나타낸 것이다.



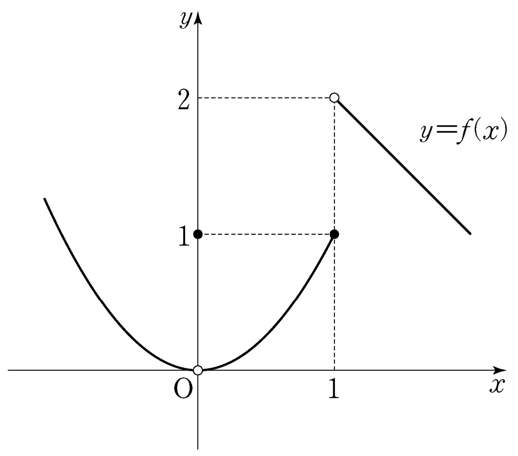
$f^{-1}(4)$의 값은? [2점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

4. $\lim_{n \to \infty} \frac{4 \times 3^{n+1}+1}{3^n}$의 값은? [3점]

① 8　② 9　③ 10　④ 11　⑤ 12

5. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

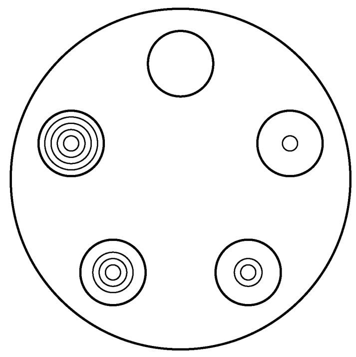


$\lim_{x\to 0} f(x)+\lim_{x\to 1+} f(x)$의 값은? [3점]

① -1　② 0　③ 1　④ 2　⑤ 3

6. 서로 다른 5개의 접시를 원 모양의 식탁에 일정한 간격을 두고 원형으로 놓는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]

① 6　② 12　③ 18　④ 24　⑤ 30



7. 닫힌 구간 $[2, 4]$에서 함수 $y=\frac{1}{x-1}+3$의 최댓값은? [3점]

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

8. 함수 $f(x)=\int_{1}^{x}(t-2)(t-3)\,dt$에 대하여 $f'(4)$의 값은? [3점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

9. 실수 x에 대하여 두 조건 p, q가 다음과 같다.

$p : (x+2)(x-4) \neq 0$,　　$x \ne -2, 4$

$q : -2 \leq x \leq 4$

다음 중 참인 명제는? [3점]

① $p \rightarrow q$　② $\sim p \rightarrow \sim q$　③ $q \rightarrow \sim p$
④ $q \rightarrow p$　⑤ $\sim p \rightarrow q$

10. 14개의 공에 각각 검은색과 흰색 중 한 가지 색이 칠해져 있고, 자연수가 하나씩 적혀 있다. 각각의 공에 칠해져 있는 색과 적혀 있는 수에 따라 분류한 공의 개수는 다음과 같다.

(단위 : 개)

구분	검은색	흰색	합계
홀수	5	3	8
짝수	4	2	6
합계	9	5	14

14개의 공 중에서 임의로 선택한 한 개의 공이 검은색일 때, 이 공에 적혀 있는 수가 짝수일 확률은? [3점]

① $\frac{2}{9}$　② $\frac{5}{18}$　③ $\frac{1}{3}$　④ $\frac{7}{18}$　⑤ $\frac{4}{9}$

11. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n + b_n = 10$을 만족시킨다. $\sum_{k=1}^{10}(a_k + 2b_k) = 160$일 때, $\sum_{k=1}^{10} b_k$의 값은? [3점]

① 60 ② 70 ③ 80 ④ 90 ⑤ 100

12. 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^2} = 2$
>
> (나) $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 3$

$2x^2 + 3x$

$f(2)$의 값은? [3점]

① 11 ② 14 ③ 17 ④ 20 ⑤ 23

13. 두 실수 a, b가

$$ab = \log_3 5, \qquad b - a = \log_2 5$$

를 만족시킬 때, $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$의 값은? [3점]

① $\log_5 2$ ② $\log_3 2$ ③ $\log_3 5$ ④ $\log_2 3$ ⑤ $\log_2 5$

$\frac{b-a}{ab}$

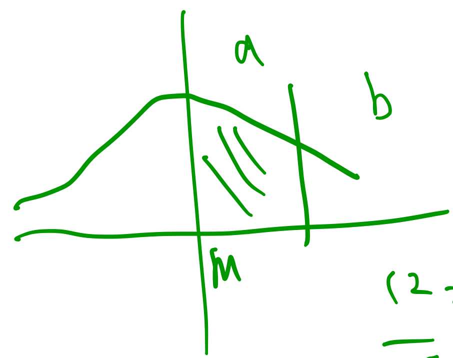
14. 확률변수 X는 평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 따르고 다음 등식을 만족시킨다.

$$\mathrm{P}(m \le X \le m+12) - \mathrm{P}(X \le m-12) = 0.3664$$

오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 σ의 값을 구한 것은? [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12



$a - (0.5 - a) = 0.7664$

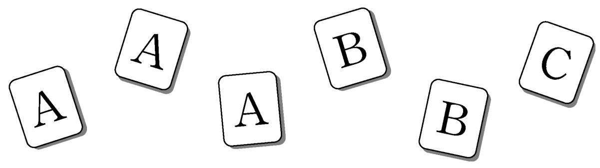
8664

$\frac{12}{\sigma} = 1.5$

4312

15. A, A, A, B, B, C의 문자가 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 있다. 이 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 임의로 나열할 때, 양 끝 모두에 A가 적힌 카드가 나오게 나열될 확률은? [4점]

① $\frac{3}{20}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{3}{10}$ ⑤ $\frac{7}{20}$



A A BBC A

$$\frac{\frac{4!}{2!}}{\frac{6!}{3!2!}}$$

16. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수는? [4점]

0 이상

> (가) $x+y+z=10$
> (나) $0<y+z<10$

① 39 ② 44 ③ 49 ④ 54 ⑤ 59

$x+\boxed{}=10$

A

$y+z$

$=1$	${}_2C_1$
2	${}_3C_1$
3	${}_4C_1$
4	⋮
5	
6	
7	
8	
9	${}_{10}C_1$

17. 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여

$x<0$일 때, $f(x)+g(x)=x^2+4$

$x>0$일 때, $f(x)-g(x)=x^2+2x+8$

이다. 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이고 $\lim_{x\to 0-} g(x) - \lim_{x\to 0+} g(x) = 6$일 때, $f(0)$의 값은? [4점]

-4

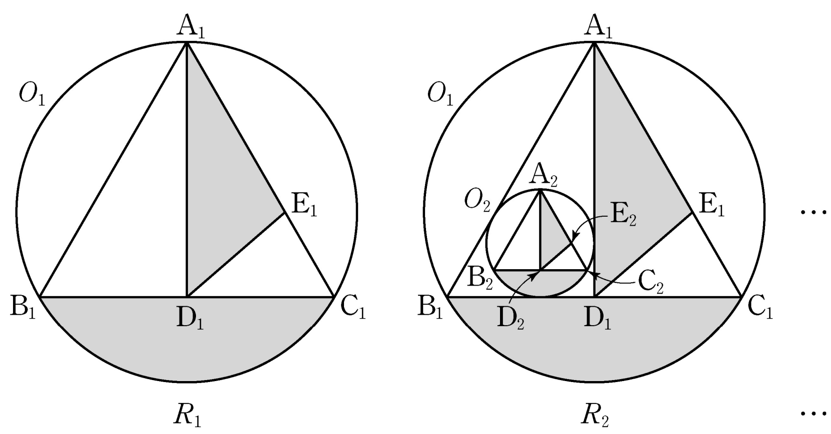
① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

$4-g_0^-$

$\parallel$

$8+g_0^+$

18. 그림과 같이 반지름의 길이가 2인 원 O_1에 내접하는 정삼각형 $A_1B_1C_1$이 있다. 점 A_1에서 선분 B_1C_1에 내린 수선의 발을 D_1이라 하고, 선분 A_1C_1을 $2:1$로 내분하는 점을 E_1이라 하자. 점 A_1을 포함하지 않는 호 B_1C_1과 선분 B_1C_1로 둘러싸인 도형의 내부와 삼각형 $A_1D_1E_1$의 내부를 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에 삼각형 $A_1B_1D_1$에 내접하는 원 O_2와 원 O_2에 내접하는 정삼각형 $A_2B_2C_2$를 그리고, 점 A_2에서 선분 B_2C_2에 내린 수선의 발을 D_2, 선분 A_2C_2를 $2:1$로 내분하는 점을 E_2라 하자. 점 A_2를 포함하지 않는 호 B_2C_2와 선분 B_2C_2로 둘러싸인 도형의 내부와 삼각형 $A_2D_2E_2$의 내부를 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



① $\frac{16(3\sqrt{3}-2)\pi}{69}$ ② $\frac{16(3\sqrt{3}-1)\pi}{65}$ ③ $\frac{32(3\sqrt{3}-2)\pi}{69}$

④ $\frac{32(3\sqrt{3}-1)\pi}{69}$ ⑤ $\frac{32(3\sqrt{3}-1)\pi}{65}$

19. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 $a_1 = a_2 = 1$, $b_1 = k$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2} = (a_{n+1})^2 - (a_n)^2, \qquad b_{n+1} = a_n - b_n + n$$

을 만족시킨다. $b_{20} = 14$일 때, k의 값은? [4점]

① -3　② -1　③ 1　④ 3　⑤ 5

2

1
1
0
−1
1
0
−1
1
0
−1
1

$b_n = a_n - b_{n+1} + n$

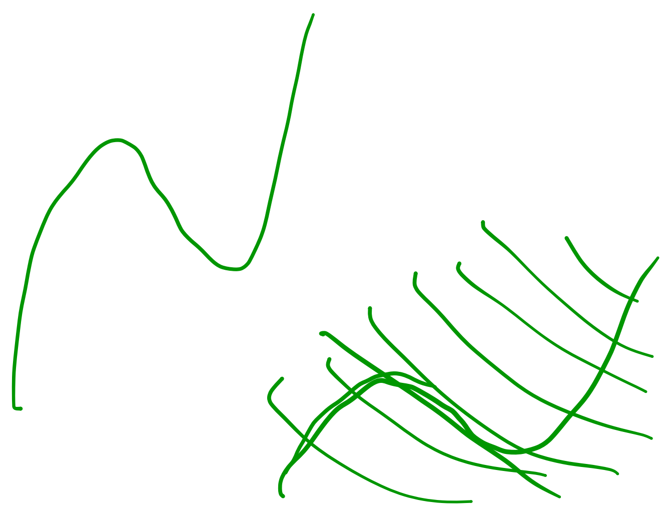
19　4 = −1 − 14 + 19
18　14 = 0 − 4 + 18
17　4 = 1 − 14 + 17
16　11 = −1 − 4 + 16
15　4 = 0 − 11 + 15
14　11 = 1 − 4 + 14
13　1 = −1 − 11 + 13
12　11 = 0 − 1 + 12
11　1 = 1 − 11 + 11
10　8 = −1 − 1 + 10
9　1 = 0 − 8 + 9
8　8 = 1 − 1 + 8
7　−2 = −1 − 8 + 7
6　8 = 0 + 2 + 6
5　−2 = 1 − 8 + 5
4　5 = −1 + 2 + 4
3　−2 = 0 − 5 + 3
2　5 = 1 + 2 + 2
1　−3 = 1 − 5 + 1

20. 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 곡선 $y = f(x)$와 직선 $y = -x + t$의 교점의 개수를 $g(t)$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $f(x) = x^3$이면 함수 $g(t)$는 상수함수이다.
ㄴ. 삼차함수 $f(x)$에 대하여, $g(1) = 2$이면 $g(t) = 3$인 t가 존재한다.
ㄷ. 함수 $g(t)$가 상수함수이면, 삼차함수 $f(x)$의 극값은 존재하지 않는다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



21. 실수 a, b, c와 두 함수

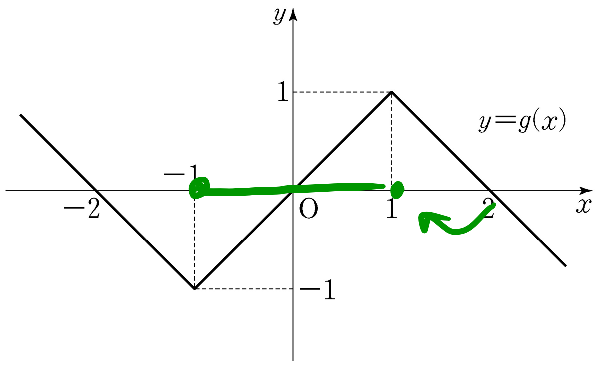
$$f(x)=\begin{cases} x+a & (x<-1) \\ bx & (-1\le x<1) \\ x+c & (x\ge 1) \end{cases},$$

$$g(x)=|x+1|-|x-1|-x$$

에 대하여, 합성함수 $g\circ f$는 실수 전체의 집합에서 정의된 역함수를 갖는다. $a+b+2c$의 값은? [4점]

-1 0 1

① 2　② 1　③ 0　④ -1　⑤ -2



단답형

22. ${}_7\mathrm{P}_3$의 값을 구하시오. [3점]

7·6·5 = 210

23. 함수 $f(x)=3x^2-2x$에 대하여 $f'(1)$의 값을 구하시오. [3점]

4

24. 함수 $y=2\sqrt{x}$의 그래프를 y축의 방향으로 k만큼 평행이동시킨 그래프가 점 $(1,5)$를 지난다. 상수 k의 값을 구하시오. [3점]

$y-k=2\sqrt{x}$

3

25. 첫째항과 공차가 같은 등차수열 $\{a_n\}$이

$$a_2+a_4=24$$

를 만족시킬 때, a_5의 값을 구하시오. [3점]

2a+4a

a=4

20

26. 곡선 $y=6x^2-12x$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오. [4점]

9

6x(x-2)

8

27. 대중교통을 이용하여 출근하는 어느 지역 직장인의 월 교통비는 평균이 8이고 표준편차가 1.2인 정규분포를 따른다고 한다. 대중교통을 이용하여 출근하는 이 지역 직장인 중 임의추출한 n명의 월 교통비의 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때,

$$\mathrm{P}\left(7.76 \le \overline{X} \le 8.24\right) \ge 0.6826$$

이 되기 위한 n의 최솟값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하시오. (단, 교통비의 단위는 만 원이다.) [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

25

$$\frac{0.24}{\frac{1.2}{\sqrt{n}}} = 1$$

$$\sqrt{n} = \frac{1.2}{0.24}$$

28. 두 이산확률변수 X와 Y가 가지는 값이 각각 1부터 5까지의 자연수이고

$$\mathrm{P}(Y=k) = \frac{1}{2}\mathrm{P}(X=k) + \frac{1}{10} \quad (k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$$

이다. $\mathrm{E}(X)=4$일 때, $\mathrm{E}(Y)=a$이다. $8a$의 값을 구하시오. [4점]

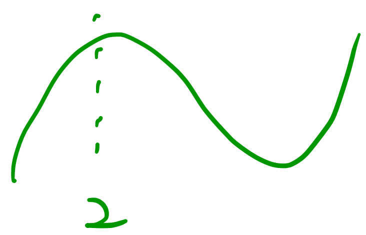
$\frac{7}{2}$

28

29. 두 삼차함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)g(x)=(x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2$$: ㄹ 674

을 만족시킨다. $g(x)$의 최고차항의 계수가 3이고, $g(x)$가 $x=2$에서 극댓값을 가질 때, $f'(0)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



$g : 3(x-2)^2(x-3)$

$f : \frac{1}{3}(x-1)^2(x-3)$

$\frac{1}{3}\cdot 2\cdot(x-1)(x-3)$ $\quad \frac{7}{3}$

$+$

$\frac{1}{3}(x-1)^2$

10

30. 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가

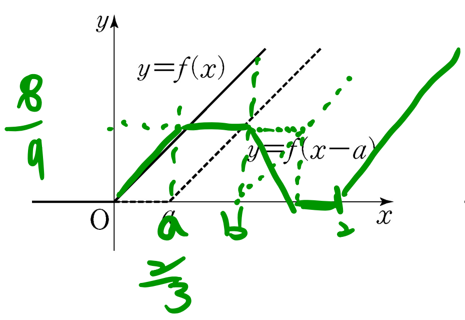
$$f(x)=\begin{cases}0 & (x\le 0)\\ x & (x>0)\end{cases},\quad g(x)=\begin{cases}x(2-x) & (|x-1|\le 1)\\ 0 & (|x-1|>1)\end{cases}$$

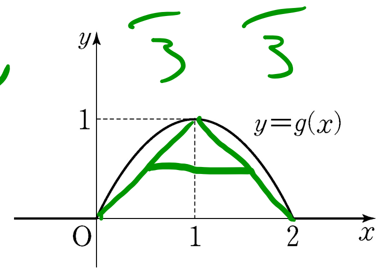
이다. 양의 실수 k, a, b $(a<b<2)$에 대하여, 함수 $h(x)$를

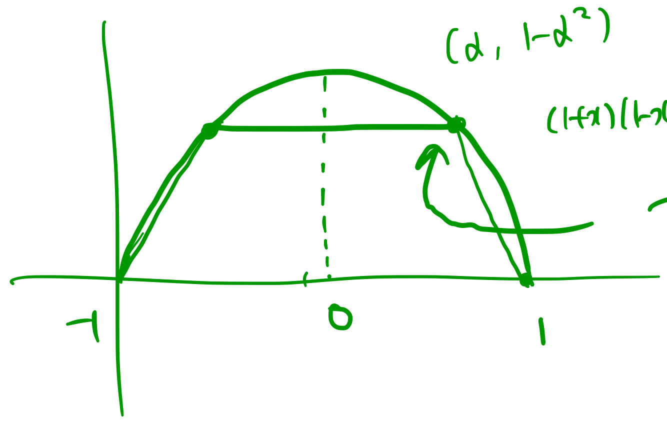
$$h(x)=k\{f(x)-f(x-a)-f(x-b)+f(x-2)\}$$

라 정의하자. 모든 실수 x에 대하여 $0\le h(x)\le g(x)$일 때, $\int_0^2\{g(x)-h(x)\}dx$의 값이 최소가 되게 하는 k, a, b에 대하여 $60(k+a+b)$의 값을 구하시오. [4점]

$\frac{2}{3}$ $\quad \frac{4}{3}$ $\quad \frac{1}{3}$ $\quad k=\frac{4}{\frac{1}{3}}$







$\frac{1}{3}$, $\frac{8}{9}$

$(1+\alpha)(1-\alpha^2)$

$1-\alpha^2+(1+\alpha)\cdot(-2\alpha)=0$

$-2\alpha-2\alpha^2$

$-3\alpha^2-2\alpha+1=0$

$(3\alpha-1)(\alpha+1)=0$

200

＊ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

2017 - 11

이과

2016. 11. 17.

바풀 쿨쌤

제 2 교시

수학 영역(가 형)

홀수형

5지선다형

1. 두 벡터 $\vec{a}=(1,\,3)$, $\vec{b}=(5,\,-6)$에 대하여 벡터 $\vec{a}-\vec{b}$의 모든 성분의 합은? [2점] 고3

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$4-(-1)=5$

바로 계산

(계산, 10초)

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{6x}-1}{\ln(1+3x)}$ 의 값은? [2점] 고3

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\dfrac{6x}{3x}=2$

$x\to 0:\ \ln(1+x)\approx x$, $e^x-1\approx x$

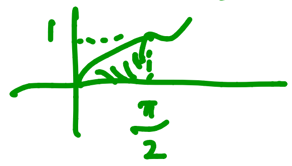
(계산, 10초)

3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x\,dx$ 의 값은? [2점] 고3

① 0 ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

"1"

$2\times\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx$



(계산, 1분)

4. 두 사건 A와 B는 서로 독립이고

$$\mathrm{P}(B^C)=\frac{1}{3},\quad \mathrm{P}(A\,|\,B)=\frac{1}{2}$$

일 때, $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$의 값은? (단, B^C은 B의 여사건이다.) [3점] 고2

① $\frac{5}{6}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

$P(B)=\frac{2}{3}$. $P(A)=\frac{1}{2}$

$\frac{1}{3}$

(계산, 20초)

5. 숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 네 개를 택해 일렬로 나열하여 만든 네 자리의 자연수가 5의 배수인 경우의 수는? [3점] 중3

① 115 ② 120 ③ 125 ④ 130 ⑤ 135

끝 2자리가 5의 배수

□ □ □□

1 5
2 5
3 5
4 5
5 5

$5 \times 5 \times 5$

(계산, 1분)

6. 함수 $f(x) = x^3 + x + 1$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g'(1)$의 값은? [3점] 고2

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ 1

$f(0) = 1$

$g'(1) = \frac{1}{f'(0)} = 1$

(계산, 30초)

7. 한 개의 주사위를 3번 던질 때, 4의 눈이 한 번만 나올 확률은? [3점] 중3

① $\frac{25}{72}$ ② $\frac{13}{36}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{7}{18}$ ⑤ $\frac{29}{72}$

4 × ×
× 4 ×
× × 4

$3 \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 \times \left(\frac{1}{6}\right)$

(계산, 30초)

$\overline{3:2}$

8. 좌표공간의 두 점 A$(1, a, -6)$, B$(-3, 2, b)$에 대하여 선분 AB를 $3:2$로 외분하는 점이 x축 위에 있을 때, $a+b$의 값은? [3점] 고3

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

$-2a+6=0$

$+12+3b=0$

$a=3,\ b=-4$

(계산, 1분)

9. $\int_1^e \ln\frac{x}{e}\,dx$의 값은? [3점] 고3

① $\frac{1}{e}-1$ ② $2-e$ ③ $\frac{1}{e}-2$ ④ $1-e$ ⑤ $\frac{1}{2}-e$

$\int_1^e (\ln x-1)\,dx$

$=\left[x\ln x - x - x\right]_1^e$

$= e-e-e+2$

$= 2-e$

(계산, 2분)

10. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t>0)$에서의 위치 (x, y)가

$$x=t-\frac{2}{t},\quad y=2t+\frac{1}{t}$$

이다. 시각 $t=1$에서 점 P의 속력은? [3점] 고3

① $2\sqrt{2}$ ② 3 ③ $\sqrt{10}$ ④ $\sqrt{11}$ ⑤ $2\sqrt{3}$

$\frac{dx}{dt}=1+\frac{2}{t^2}$

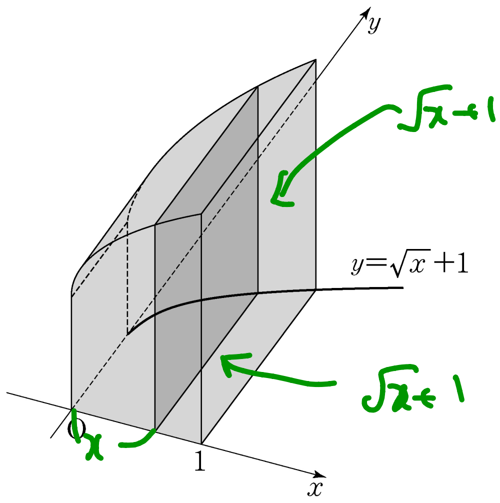
$\frac{dy}{dt}=2-\frac{1}{t^2}$

$\vec{v}=(3, 1)$

$\therefore |\vec{v}|=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$

(계산, 2분)

11. 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{x}+1$과 x축, y축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점] 고3



① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{8}{3}$ ④ $\frac{17}{6}$ ⑤ 3

$S(x) = (\sqrt{x}+1)^2$

$V = \int_0^1 S(x)\,dx$

$= \int_0^1 (x+2\sqrt{x}+1)\,dx$

$= \left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + x\right]_0^1$

$= \frac{1}{2} + \frac{4}{3} + 1$

$= \frac{3+8+6}{6}$

(계산, 3분)

12. 좌표공간에서 평면 $2x+2y-z+5=0$과 xy평면이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은? [3점] 고3

① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

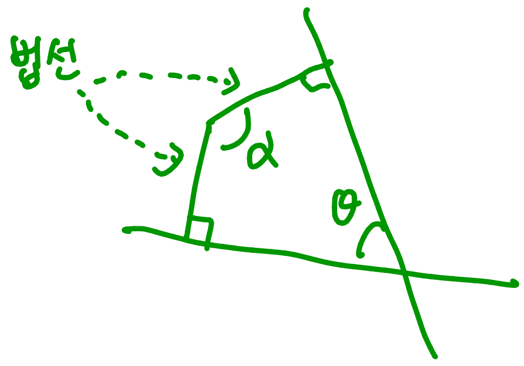
$(2, 2, -1) \cdot (0, 0, 1)$

$= -1 = 3 \cdot \cos\alpha$

$\cos\alpha = -\frac{1}{3}$

$\therefore \cos\theta = \frac{1}{3}$

$(\because \theta + \alpha = 2\pi)$



(계산, 1분)

13. 정규분포 $\mathrm{N}(0,\,4^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 9인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$, 정규분포 $\mathrm{N}(3,\,2^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 16인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{Y}$라 하자. $\mathrm{P}(\overline{X} \ge 1) = \mathrm{P}(\overline{Y} \le a)$를 만족시키는 상수 a의 값은? [3점]

고2

① $\frac{19}{8}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{21}{8}$ ④ $\frac{11}{4}$ ⑤ $\frac{23}{8}$

$$P(\overline{X} \ge 1) = P\left(Z \ge \frac{1-0}{\frac{4}{3}}\right)$$

$$P(\overline{Y} \le a) = P\left(Z \le \frac{a-3}{\frac{2}{4}}\right)$$

$$\therefore -\frac{3}{4} = \frac{a-3}{\frac{2}{4}}$$

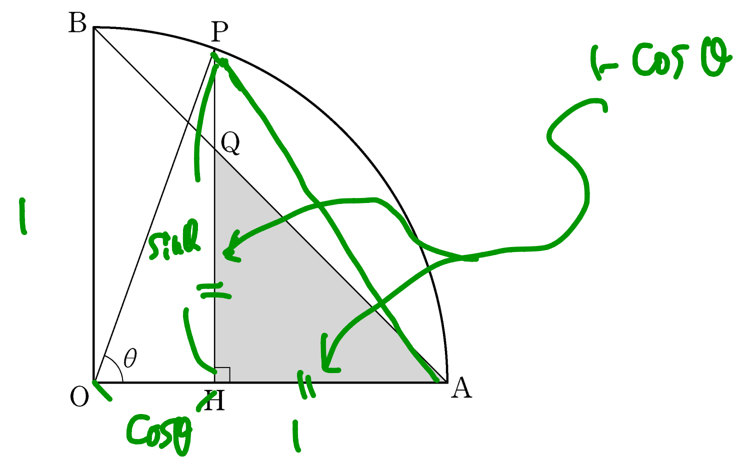
$$a-3 = -\frac{6}{16} = -\frac{3}{8}$$

$$\therefore a = \frac{21}{8}$$

(계산, 2분)

14. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H, 선분 PH와 선분 AB의 교점을 Q라 하자. $\angle \mathrm{POH} = \theta$일 때, 삼각형 AQH의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^4}$의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) [4점]

고3



① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

$$\triangle AQH = \frac{1}{2}(1-\cos\theta)^2$$

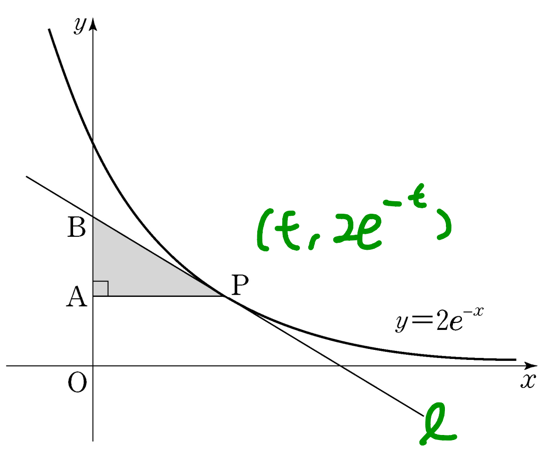
$$\theta \to 0: \cos\theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2$$

$$\therefore \lim \frac{S(\theta)}{\theta^4} \approx \frac{\frac{1}{8}\theta^4}{\theta^4} = \frac{1}{8}$$

(기하, 2분)

15. 곡선 $y=2e^{-x}$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ 2e^{-t})$ $(t>0)$에서 y축에 내린 수선의 발을 A라 하고, 점 P에서의 접선이 y축과 만나는 점을 B라 하자. 삼각형 APB의 넓이가 최대가 되도록 하는 t의 값은? [4점] 고3

① 1 ② $\frac{e}{2}$ ③ $\sqrt{2}$ ④ 2 ⑤ e



접선 l : $y-2e^{-t}=-2e^{-t}(x-t)$

$\triangle APB$의 넓이

$=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AP}$

$=\frac{1}{2}\cdot(2e^{-t}+2te^{-t}-2e^{-t})\cdot t$

$=\frac{1}{2}\cdot 2t^2e^{-t}$

$=t^2e^{-t}$

미분

$(t^2e^{-t})'=2te^{-t}-t^2e^{-t}$

$=e^{-t}\cdot t\cdot(2-t)$

$\therefore t=2$

(개념, 3분)

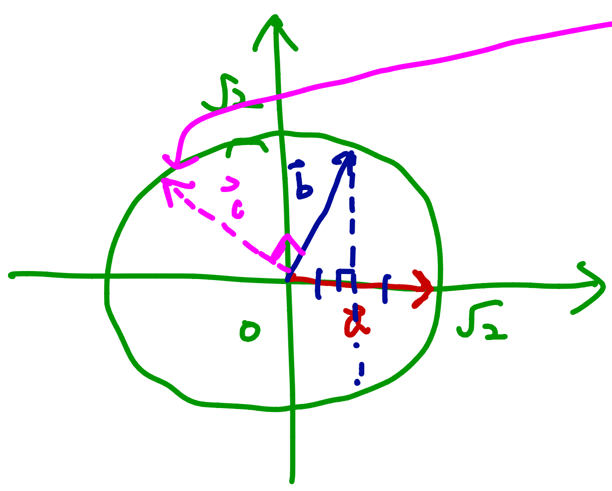
16. 좌표공간에서 원점에 대한 세 점 A, B, C의 위치벡터를 차례로 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$라 할 때, 이들 벡터 사이의 내적을 표로 나타내면 다음과 같다.

$\cdot$	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$
$\vec{a}$	2	1	$-\sqrt{2}$
$\vec{b}$	1	2	0
$\vec{c}$	$-\sqrt{2}$	0	2

예를 들어, $\vec{a}\cdot\vec{c}=-\sqrt{2}$이다. 세 점 A, B, C에 대하여 두 점 사이의 거리의 대소 관계로 옳은 것은? [4점] 고3

① $\overline{AB}<\overline{AC}<\overline{BC}$
② $\overline{AB}<\overline{BC}<\overline{AC}$
③ $\overline{AC}<\overline{AB}<\overline{BC}$
④ $\overline{BC}<\overline{AB}<\overline{AC}$
⑤ $\overline{BC}<\overline{AC}<\overline{AB}$

$\therefore |\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=\sqrt{2}$



$\overline{AB}<\overline{BC}<\overline{AC}$

(그림, 개념, 3분)

$N(m, 5^2)$

17. 좌표평면 위의 한 점 (x, y)에서 세 점 $(x+1, y)$, $(x, y+1)$, $(x+1, y+1)$ 중 한 점으로 이동하는 것을 점프라 하자.

가로: +4, 세로: +3

점프를 반복하여 점 $(0, 0)$에서 점 $(4, 3)$까지 이동하는 모든 경우 중에서, 임의로 한 경우를 선택할 때 나오는 점프의 횟수를 확률변수 X라 하자. 다음은 확률변수 X의 평균 $\mathrm{E}(X)$를 구하는 과정이다. (단, 각 경우가 선택되는 확률은 동일하다.)

> 점프를 반복하여 점 $(0, 0)$에서 점 $(4, 3)$까지 이동하는 모든 경우의 수를 N이라 하자. 확률변수 X가 가질 수 있는 값 중 가장 작은 값을 k라 하면 $k=$ (가) 이고, 가장 큰 값은 $k+3$이다.
>
> 4
>
> $$\mathrm{P}(X=k)=\frac{1}{N}\times\frac{4!}{3!}=\frac{4}{N}$$
>
> $$\mathrm{P}(X=k+1)=\frac{1}{N}\times\frac{5!}{2!\,2!}=\frac{30}{N}$$
>
> $$\mathrm{P}(X=k+2)=\frac{1}{N}\times \boxed{(나)}$$
>
> $\frac{6!}{2!\,3!}$
>
> $$\mathrm{P}(X=k+3)=\frac{1}{N}\times\frac{7!}{3!\,4!}=\frac{35}{N}$$
>
> $x+1$: a
> $y+1$: b
> $x+1$&$y+1$: c
>
> 이고
>
> $$\sum_{i=k}^{k+3}\mathrm{P}(X=i)=1$$
>
> $a+c=4$
> $b+c=3$
> $a-b=1$
>
> $a+b+c=k$
> $a+b+c=6$
> $b=2$
> $c=1$
> $a=3$
>
> 이므로 $N=$ (다) 이다.
>
> 따라서 확률변수 X의 평균 $\mathrm{E}(X)$는 다음과 같다.
>
> $$\mathrm{E}(X)=\sum_{i=k}^{k+3}\{i\times\mathrm{P}(X=i)\}=\frac{257}{43}$$

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 a, b, c라 할 때, $a+b+c$의 값은? [4점] 22

① 190 ② 193 ③ 196 ④ 199 ⑤ 202

$$\frac{4}{N}+\frac{30}{N}+\frac{60}{N}+\frac{35}{N}=1$$

$N=129$

가: 4
나: 60
다: 129
193

(개념, 4분)

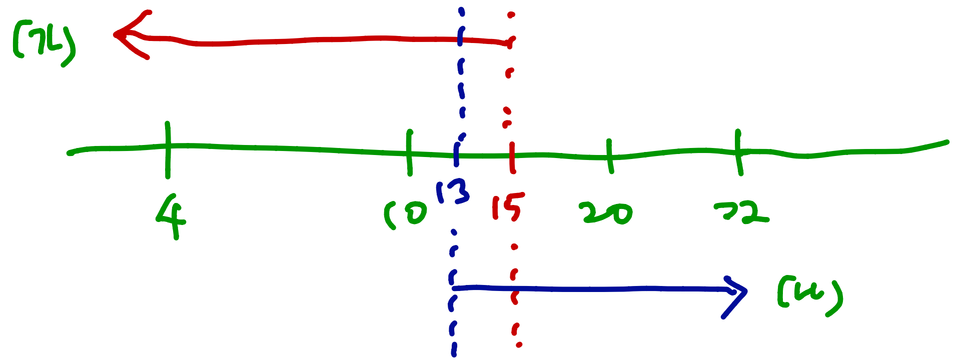
18. 확률변수 X는 평균이 m, 표준편차가 5인 정규분포를 따르고, 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(10)>f(20)$
> (나) $f(4)<f(22)$

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.6	0.226
0.8	0.288
1.0	0.341
1.2	0.385
1.4	0.419

m이 자연수일 때, $\mathrm{P}(17\le X\le 18)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점] 22

① 0.044 ② 0.053 ③ 0.062 ④ 0.078 ⑤ 0.097



$13 < m < 15$

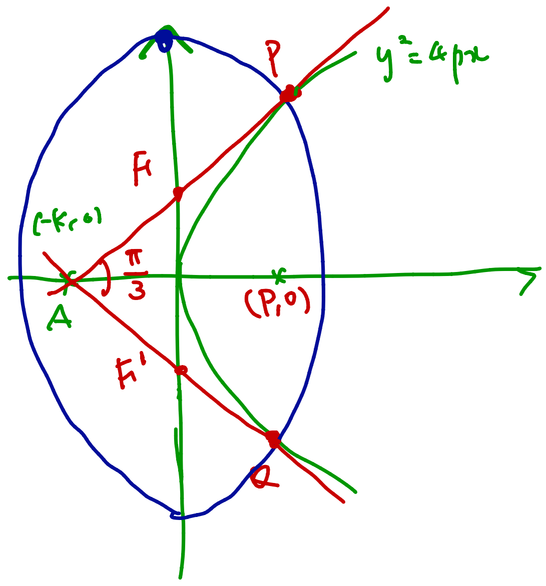
$\therefore m=14$

$\mathrm{P}(17\le X\le 18)$
$=$
$\mathrm{P}(0.6\le Z\le 0.8)$
$=$
0.062

(발상, 2분)

19. 두 양수 k, p에 대하여 점 $\mathrm{A}(-k, 0)$에서 포물선 $y^2=4px$에 그은 두 접선이 y축과 만나는 두 점을 각각 F, F′, 포물선과 만나는 두 점을 각각 P, Q라 할 때, $\angle \mathrm{PAQ}=\frac{\pi}{3}$이다. 두 점 F, F′을 초점으로 하고 두 점 P, Q를 지나는 타원의 장축의 길이가 $4\sqrt{3}+12$일 때, $k+p$의 값은? [4점] 고3

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16



① $P(x_1, y_1)$, $Q(x_1, -y_1)$

$y_1 y = 2p(x_1+x)$ (−k,0)

$-y_1 y = 2p(x_1+x)$

$0 = 2p(x_1-k)$

$\therefore x_1 = k$

② $\overline{AP}$ 의 기울기 $= \frac{\pi}{6}$

$2y \cdot y' = 4p$

$y' = \frac{4p}{2y} = \frac{4p}{2\sqrt{4pk}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore 48p^2 = 16pk$

$3p = k$

③ F의 좌표

$A(-3p, 0)$ $P(3p, 2\sqrt{3}p)$

$l = \frac{2\sqrt{3}p}{6p}(x+3p)$

$\therefore F(0, \sqrt{3}p)$, $F'(0, -\sqrt{3}p)$

④ $\overline{FP}+\overline{F'P} = 4\sqrt{3}+12$

$\sqrt{9p^2+3p^2} + \sqrt{9p^2+27p^2} = 4\sqrt{3}+12$

$6p + 2\sqrt{3}p = 4\sqrt{3}+12$

$\therefore p = 2$, $k = 6$

(개념, 발상, 5분)

20. 함수 $f(x)=e^{-x}\int_0^x \sin(t^2)dt$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점] 고3

<보 기>

ㄱ. $f(\sqrt{\pi})>0$

ㄴ. $f'(a)>0$을 만족시키는 a가 열린 구간 $(0, \sqrt{\pi})$에 적어도 하나 존재한다.

ㄷ. $f'(b)=0$을 만족시키는 b가 열린 구간 $(0, \sqrt{\pi})$에 적어도 하나 존재한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. $f(\sqrt{\pi}) = e^{-\sqrt{\pi}} \underbrace{\int_0^{\sqrt{\pi}} \sin t^2 \, dt}_{>0} > 0$ (자명)

$(0 < t < \sqrt{\pi})$

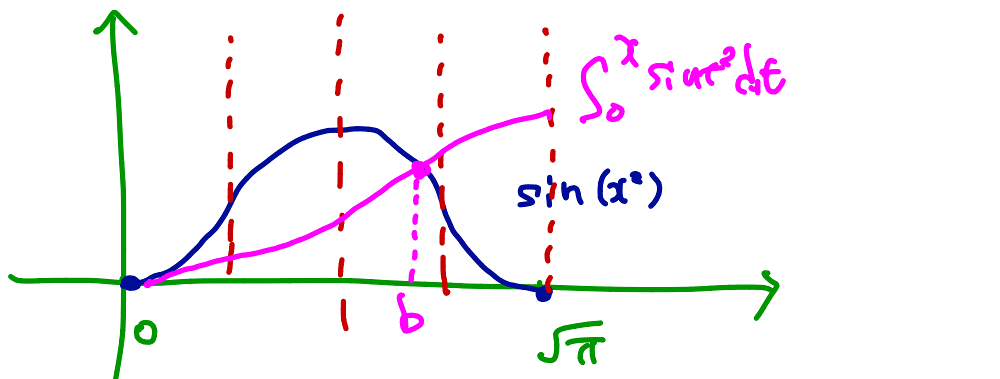
ㄴ. $f(0) = 0$, $f(\sqrt{\pi}) > 0$ 이고

연속 함수이니 자명

ㄷ. $f'(x) = -e^{-x}\int_0^x \sin t^2 dt$

$+ e^{-x} \sin x^2$ 부호에 영향

$= e^{-x}\left[\underbrace{\sin x^2 - \int_0^x \sin t^2 dt}\right]$



(개념, 발상, 2분)

21. 닫힌 구간 $[0, 1]$에서 증가하는 연속함수 $f(x)$가

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 2,\ \int_0^1 |f(x)|\,dx = 2\sqrt{2}$$ 더 크다.

를 만족시킨다. 함수 $F(x)$가

$$F(x) = \int_0^x |f(t)|\,dt \quad (0 \le x \le 1)$$

일 때, $\int_0^1 f(x)F(x)\,dx$의 값은? [4점] 고3

① $4-\sqrt{2}$ ② $2+\sqrt{2}$ ③ $5-\sqrt{2}$
④ $1+2\sqrt{2}$ ⑤ $2+2\sqrt{2}$

① $\int_0^1 f(x)\,dx = \underset{\sim}{a} - \underset{\sim}{b} = 2$

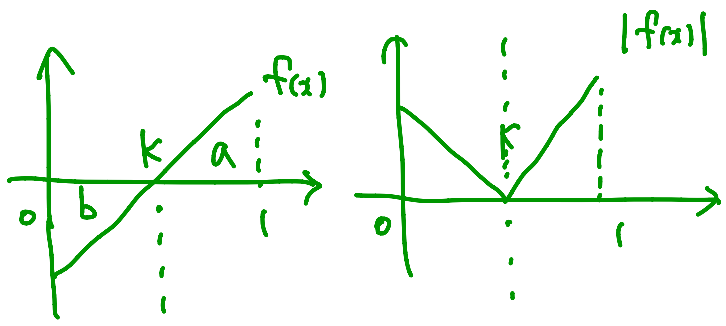
x축 윗부분넓이 x축 아래부분넓이

$a-b=2$

$a+b=2\sqrt{2}$

$\therefore \begin{cases} a = 1+\sqrt{2} \\ b = \sqrt{2}-1 \end{cases}$

②



③ $|f(x)| = \begin{cases} x \le k : -f \\ x \ge k : f \end{cases}$

④ $\int_0^1 f F\,dx$: 치환적분

미분된 것이 곱해짐

$F(x) = t$.

$|f(x)|dx = dt = \begin{cases} -f\,dx & (x \le k) \\ f\,dx & (x \ge k) \end{cases}$

$\therefore \int_0^{F(k)} -k\,dk + \int_{F(k)}^{F(1)} k\,dk$

$= \int_0^{\sqrt{2}-1} -k\,dk + \int_{\sqrt{2}-1}^{2\sqrt{2}} k\,dk$

단답형

22. ${}_4H_2$의 값을 구하시오. [3점] 고2

4개. 중복 허락. 2개.

$a+b+c+d=2$

$a'+b'+c'+d'=6$

${}_5C_3 = 10$

(계산, 1분)

23. 부등식 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-5} \ge 4$를 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합을 구하시오. [3점] 고1

$5-x \ge 2$

$x \le 3$

$x = 1, 2, 3$

⊕

6

(계산, 1분)

24. 좌표공간에서 평면 $x+8y-4z+k=0$이 구 $x^2+y^2+z^2+2y-3=0$에 접하도록 하는 모든 실수 k의 값의 합을 구하시오. [3점]

고3

$d=r$

$x^2+(y+1)^2+z^2=4$

$C(0,-1,1)$, $r=2$

$$\frac{|-8-4+k|}{\sqrt{1+8^2+4^2}}=2$$

$|k-12|=18$

$\therefore k=\underbrace{12+18,\ 12-18}_{24}$

(계산, 2분)

25. $0<x<2\pi$일 때, 방정식 $\cos^2 x-\sin x=1$의 모든 실근의 합은 $\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [3점]

고3

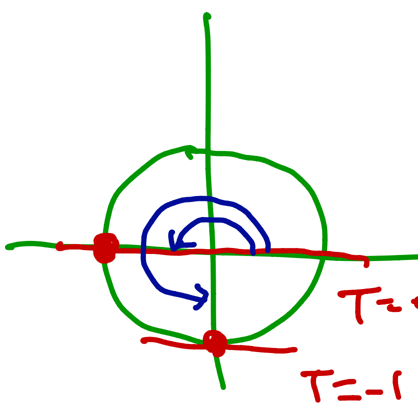
$\sin x=T$

$1-T^2-T=1$

$T^2+T=0$

$T(T+1)=0$

$T=0$ or $T=-1$



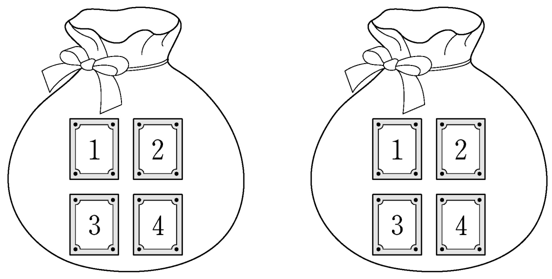
$\underbrace{\pi,\ \frac{3}{2}\pi}_{\frac{5}{2}\pi}$

$\therefore 7$

(계산, 1분)

26. 두 주머니 A와 B에는 숫자 1, 2, 3, 4가 하나씩 적혀 있는 4장의 카드가 각각 들어 있다. 갑은 주머니 A에서, 을은 주머니 B에서 각자 임의로 두 장의 카드를 꺼내어 가진다. 갑이 가진 두 장의 카드에 적힌 수의 합과 을이 가진 두 장의 카드에 적힌 수의 합이 같을 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

중3



A B

12	12	
13	13	
14	14, 23	✓
23	14, 23	✓
24	24	
34	34	

$$\frac{8}{{}_4C_2 \times {}_4C_2}$$

$$=\frac{8}{36}$$

$$=\frac{2}{9}$$

11

(개념, 2분)

27. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 구하시오. [4점]

A　0 이상　중3

(가) $a+b+c=7$
(나) $2^a \times 4^b$은 8의 배수이다.

① 2^{a+2b} 는 8의 배수

$\therefore a+2b \geq 3$

개수	a	b	c
6	0	2, 3, 4, 5, 6, 7	5, 4, 3, 2, 1, 0
6	1	1, 2, 3, 4, 5, 6	5, 4, 3, 2, 1, 0
5	2	1, 2, 3, 4, 5	4, 3, 2, 0
5	3	0, 1, 2, 3, 4	
4	4	0, 1, 2, 3	
3	5	0, 1, 2	
2	6	0, 1	
1	7	0	

$6+6+5+5+4+3+2+1$

$=32$

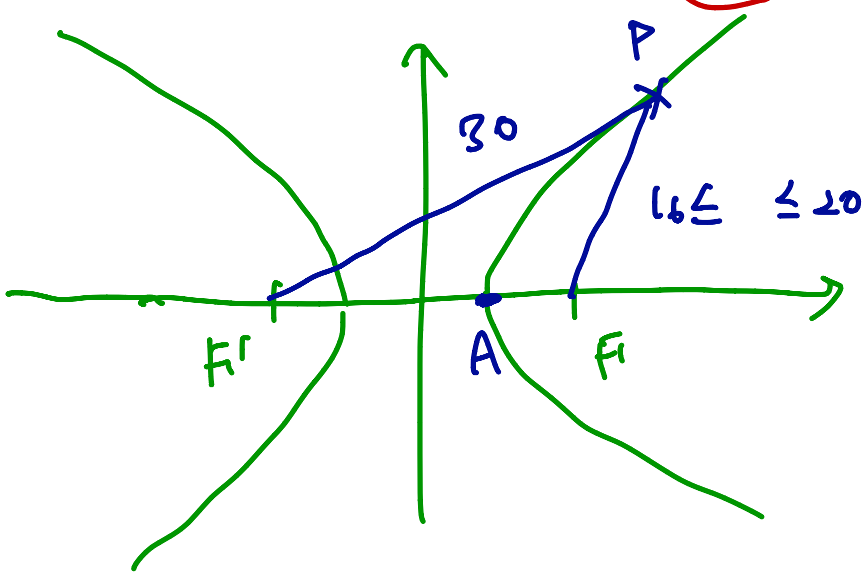
(계산, 개념, 4분)

28. 점근선의 방정식이 $y=\pm\frac{4}{3}x$이고 두 초점이 $\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F}'(-c, 0)\,(c>0)$인 쌍곡선이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 쌍곡선 위의 한 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{PF}'}=30$, $16 \leq \overline{\mathrm{PF}} \leq 20$이다.
(나) x좌표가 양수인 꼭짓점 A에 대하여 선분 AF의 길이는 자연수이다.

이 쌍곡선의 주축의 길이를 구하시오. [4점]

고3



$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a, b > 0)$

① $\frac{b}{a} = \frac{4}{3} \rightarrow b = \frac{4}{3}a$

② $10 \leq \overline{\mathrm{PF}'} - \overline{\mathrm{PF}} \leq 14$

$\overline{\mathrm{PF}'} - \overline{\mathrm{PF}} = 2a$

$5 \leq a \leq 7$

③ $\sqrt{a^2+b^2} - a$ = 자연수

$\frac{5}{3}a - a$ = 자연수

$\therefore a=6$

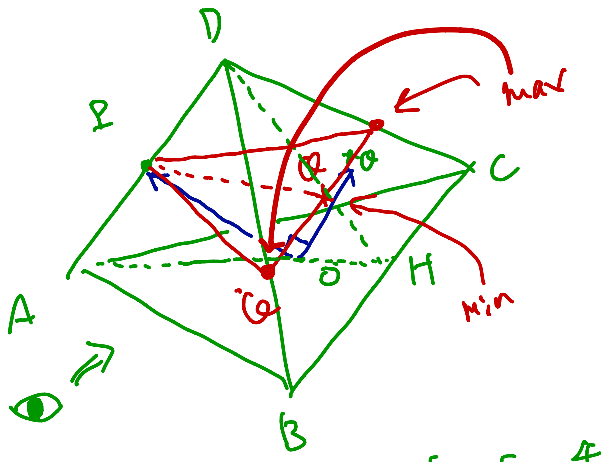
∴ 주축 = 12

(개념, 3분)

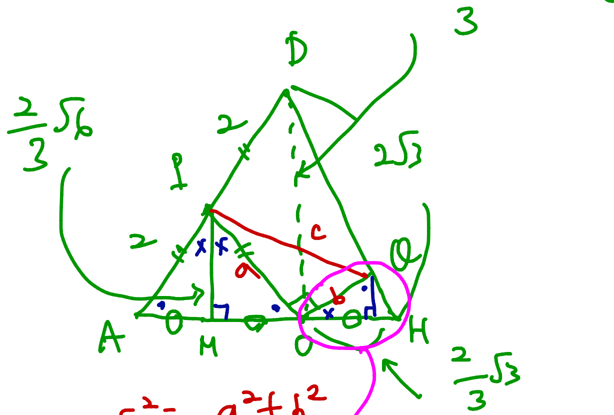
$f(x) = \frac{g(x)}{x-a} = \frac{y-0}{x-a}$

29. 한 모서리의 길이가 4인 정사면체 ABCD에서 삼각형 ABC의 무게중심을 O, 선분 AD의 중점을 P라 하자. 정사면체 ABCD의 한 면 BCD 위의 점 Q에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$가 서로 수직일 때, $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$의 최댓값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

23

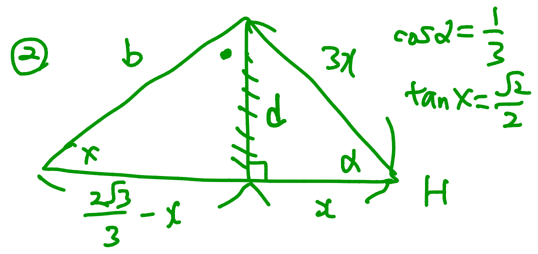


$\frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot 2\sqrt{3} = \frac{4}{3}\sqrt{6}$



$c^2 = a^2 + b^2$

① $a = 2$ (∵ P, D는 M, O로 떨어짐)



$\cos\theta = \frac{1}{3}$

$\tan x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

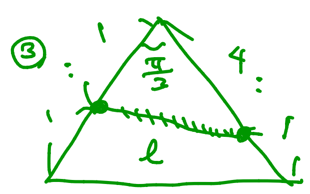
$2\sqrt{2}x = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} - x\right)\frac{\sqrt{2}}{2} = d$

$\therefore x = \frac{2}{15}\sqrt{3}$

$3x = \frac{2}{5}\sqrt{3}$.

$\overline{DQ} : \overline{QH} = 4 : 1$

③



$\ell^2 = 2^2 + \left(4 \cdot \frac{4}{5}\right)^2 - 2 \cdot 2 \cdot \left(4 \cdot \frac{4}{5}\right) \cdot \frac{1}{2}$

$= 4 + \frac{16^2}{25} - \frac{32}{5}$

$= \frac{100 + 256 - 160}{25}$

$= \frac{196}{25}$

$\therefore \ell = \frac{14}{5}$ 19

(개념, 그림, 8분)

30. $x > a$에서 정의된 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 -1인 사차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다. (단, a는 상수이다.)

> (가) $x > a$인 모든 실수 x에 대하여 $(x-a)f(x) = g(x)$이다.
>
> (나) 서로 다른 두 실수 α, β에 대하여 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$와 $x=\beta$에서 동일한 극댓값 M을 갖는다. (단, $M > 0$)
>
> (다) 함수 $f(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수는 함수 $g(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수보다 많다.

$\beta - \alpha = 6\sqrt{3}$일 때, M의 최솟값을 구하시오. [4점]

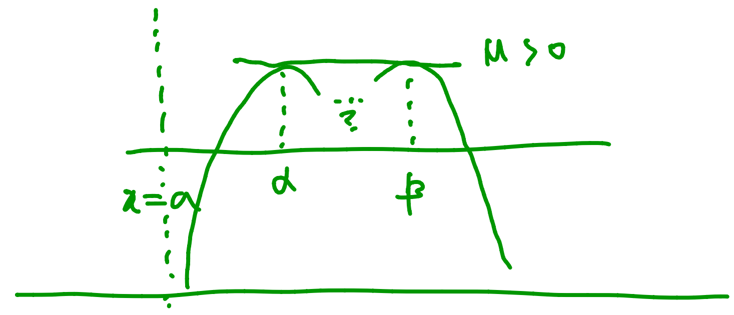
23

(가) g: 4차, $-1 \; x\,x\,x\,x$

$f = \frac{g(x)}{x-a}$

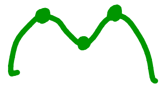
(나) f는 삼차함수 X

(∵ 극댓값 2개 이상)



* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

① g : 

$$f=\frac{g}{x-a} \longrightarrow f'=\frac{g-g'(x-a)}{(x-a)^2}=0$$

$f(\alpha)=f(\beta)$ $\qquad$ $g=g'\cdot(x-a)$: $x=\alpha,\beta$

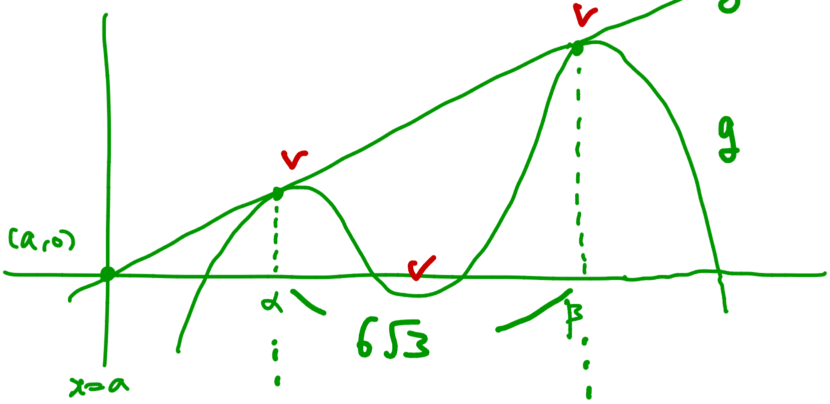
$f'(\alpha)=f'(\beta)=0$ $\qquad$ $\frac{g}{x-a}=g'$

$$\frac{g}{x-a} = f$$

$f(\alpha)=f(\beta)$

$$k=\frac{g(\alpha)-0}{\alpha-a}=g'(\alpha)=\frac{g(\beta)-0}{\beta-a}=g'(\beta)$$

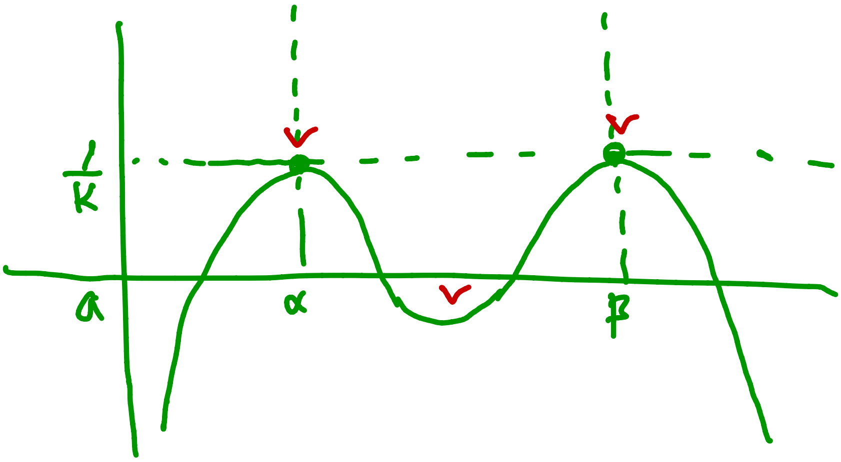
$y=k(x-a)$



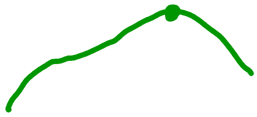
극값 : 3개

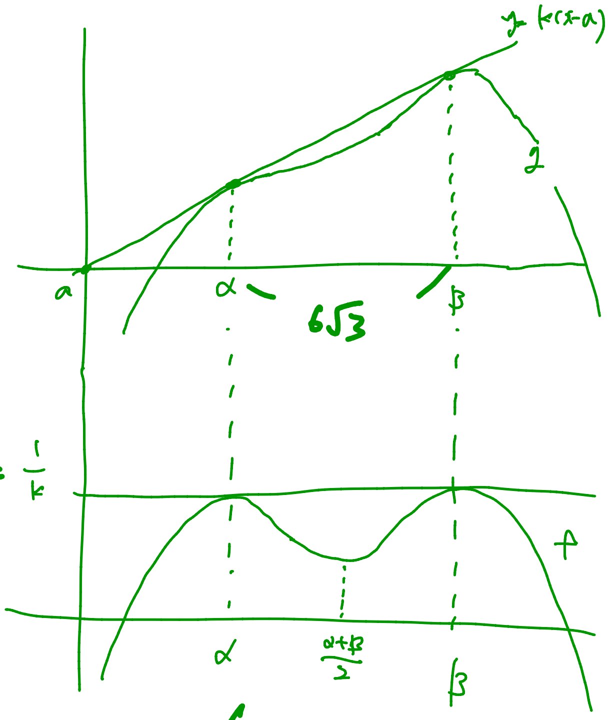
$\frac{g}{x-a}$

No.



극값 : 3개

② g 



$M = \frac{1}{k}$

극값 : 1개

극값 : 3개

$k = \frac{g(\beta)-g(\alpha)}{6\sqrt{3}} = g'(\alpha) = g'(\beta)$

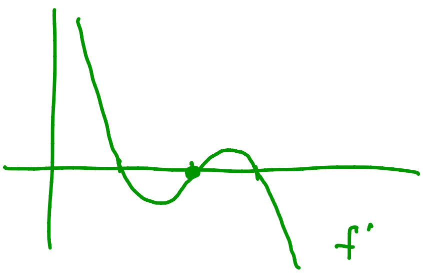
$(k>0)$

M의 min

$\Downarrow$

k의 Max.

f'의 개형 $\Rightarrow (x-\alpha)\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)(x-\beta)$



$$f - M = -\frac{(x-\alpha)^2(x-\beta)^2}{x-a}$$

$$f = -\frac{(x-\alpha)^2(x-\beta)^2}{(x-a)} + \frac{1}{k}$$

$$= \frac{g(x)}{x-a}$$

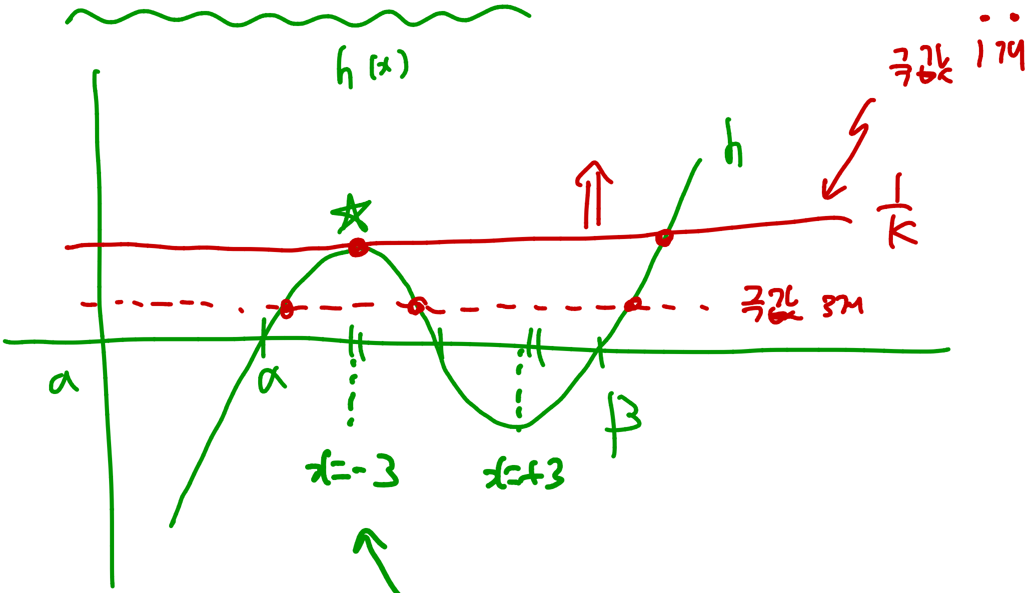
$$g(x) = -(x-\alpha)^2(x-\beta)^2 + \frac{1}{k}(x-a)$$

③ $f(x)$의 극값 : 1개

$$g(x) = -(x-\alpha)^2(x-\beta)^2 + \frac{1}{k}(x-a) \quad : \text{극값 1개}$$

$$g' = \underbrace{-2(x-\alpha)(x-\beta)^2 - 2(x-\alpha)^2(x-\beta) + \frac{1}{k} = 0}_{\text{근이 2개 이하}}$$

$$\underbrace{4(x-\alpha)(x-\beta)\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}_{h(x)} = \frac{1}{k} > 0$$



α는 x축 평행이동. y값에 영향 X

$\therefore \alpha = -3\sqrt{2}$ 이라 하면

$h = 4x(x+3\sqrt{2})(x-3\sqrt{2})$ 에서

$h' = 12x^2 - 108$, $h'=0 : x = 3, -3$

$\therefore h(-3) = 216$

(그림, 개념, 5분 ~ 10분)

2017 - 9

이과

바풀 클쌤

제 2 교시

수학 영역(가 형)

5지선다형

1. 두 벡터 $\vec{a}=(2,\ -1)$, $\vec{b}=(1,\ 3)$에 대하여 벡터 $\vec{a}+\vec{b}$의 모든 성분의 합은? [2점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

[계산]

$2-1+1+3=5$

※. $\vec{a}+\vec{b}$ 구해서 더하면 바보

2. 방정식 $3^{x+1}=27$을 만족시키는 실수 x의 값은? [2점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

[계산]

$x=2$

3. 좌표공간에서 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 3,\ -6)$, $\mathrm{B}(7,\ 0,\ 3)$에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표가 $(a,\ b,\ 0)$이다. $a+b$의 값은? [2점]

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

[계산]

$$\frac{(1+3)\times 1+(7+0)\times 2}{3}$$

$=6$

※. a, b 따로 구하면 바보

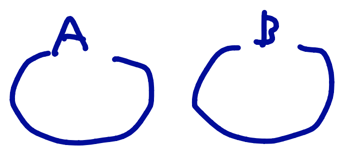
4. 두 사건 A와 B는 서로 배반사건이고

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{6},\quad \mathrm{P}(A\cup B)=\frac{1}{2}$$

일 때, $\mathrm{P}(B)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{6}$　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{1}{3}$　④ $\frac{5}{12}$　⑤ $\frac{1}{2}$

[계산]



$\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}$

5. $\cos(\alpha+\beta)=\frac{5}{7}$, $\cos\alpha\cos\beta=\frac{4}{7}$일 때, $\sin\alpha\sin\beta$의 값은? [3점]

① $-\frac{1}{7}$ ② $-\frac{2}{7}$ ③ $-\frac{3}{7}$
④ $-\frac{4}{7}$ ⑤ $-\frac{5}{7}$

[계산]

$c(\alpha+\beta)= c\alpha c\beta - s\alpha s\beta$

$\frac{5}{7} = \frac{4}{7} - \boxed{}$

6. $\int_0^3 \frac{2}{2x+1}dx$ 의 값은? [3점]

① $\ln 5$ ② $\ln 6$ ③ $\ln 7$
④ $3\ln 2$ ⑤ $2\ln 3$

[계산]

$\int_0^3 \frac{1}{x+\frac{1}{2}}dx$

$= \left[\ln\left|x+\frac{1}{2}\right|\right]_0^3$

$= \ln 7$

7. $0 \le x < 2\pi$일 때, 방정식

$$2\sin^2 x + 3\cos x = 3$$

의 모든 해의 합은? [3점]

① $\frac{\pi}{2}$ ② π ③ $\frac{3\pi}{2}$
④ 2π ⑤ $\frac{5\pi}{2}$

[개념 & 계산]

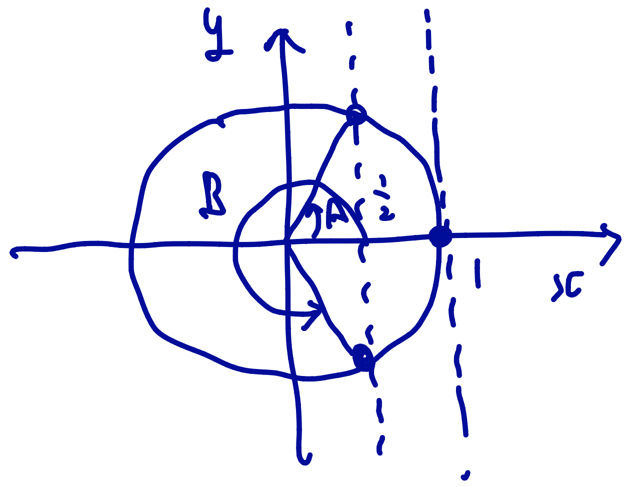
$\cos x = T$

$2-2T^2+3T=3$

$2T^2-3T+1=0$

$(2T-1)(T-1)=0$

$T=1, \frac{1}{2}$



$\underbrace{x=0,\ A,\ B}_{2\pi}$

※ A, B 직접 구하면 와우

8. 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=3$이고, 두 벡터 $6\vec{a}+\vec{b}$와 $\vec{a}-\vec{b}$가 서로 수직일 때, $\vec{a}\cdot\vec{b}$의 값은? [3점]

① $-\frac{3}{10}$ ② $-\frac{3}{5}$ ③ $-\frac{9}{10}$ ④ $-\frac{6}{5}$ ⑤ $-\frac{3}{2}$

[계산]

$(6a+b)\cdot(a-b)=0$

$6-5A-9=0$

$\therefore A=-\frac{3}{5}$

9. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(2x+1)=(x^2+1)^2$$

을 만족시킬 때, $f'(3)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[계산]

$f'(2x+1)\cdot 2 = 2(x^2+1)\cdot 2x$

$x=1: \ f'(3)= 4$

10. 어느 실험실의 연구원이 어떤 식물로부터 하루 동안 추출하는 호르몬의 양은 평균이 30.2mg, 표준편차가 0.6mg인 정규분포를 따른다고 한다. 어느 날 이 연구원이 하루 동안 추출한 호르몬의 양이 29.6mg 이상이고 31.4mg 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413 ✓
1.5	0.4332
2.0	0.4772 ✓

① 0.3830 ② 0.5328 ③ 0.6247 ④ 0.7745 ⑤ 0.8185

[개념 + 계산]

$N(30.2,\ 0.6^2)$

$P[29.6\le X\le 31.4]$

$P(-1\le Z\le 2)$

※ 0.3413 + 0.4772 계산 X

· 끝자리 : 3+2=5

· 최고자리 : 3+4+1=8

11. 함수 $f(x)=\log_3 x$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3-h)}{h}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2\ln 3}$ ② $\frac{2}{3\ln 3}$ ③ $\frac{5}{6\ln 3}$ ④ $\frac{1}{\ln 3}$ ⑤ $\frac{7}{6\ln 3}$

[계산]

$2\times f'(3)=2\times\frac{1/3}{\log 3}$

12. 한 개의 주사위를 두 번 던질 때 나오는 눈의 수를 차례로 a, b라 하자. 두 수의 곱 ab가 6의 배수일 때, 이 두 수의 합 $a+b$가 7일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{7}{30}$ ③ $\frac{4}{15}$ ④ $\frac{3}{10}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

[계산]

$a\times b = 6k$

6 : (1, 6) . (6, 1)
(2, 3) . (3, 2)

12 : (2. 6) . (6, 2)
(3. 4) (4. 3)

~~18~~

$a+b>7$

~~24~~

$P=\frac{4}{\boxed{15}}$

$\square\times\square=6k$

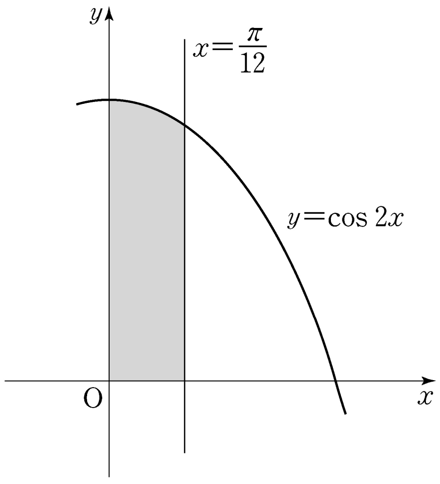
6 x : 6
x 6 : 6 > 12−1

2 3 : 1 ×2
4 3 : 1 ×2

15

13. 함수 $y=\cos 2x$의 그래프와 x축, y축 및 직선 $x=\frac{\pi}{12}$로 둘러싸인 영역의 넓이가 직선 $y=a$에 의하여 이등분될 때, 상수 a의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2\pi}$　② $\frac{1}{\pi}$　③ $\frac{3}{2\pi}$　④ $\frac{2}{\pi}$　⑤ $\frac{5}{2\pi}$



[계산]

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{12}} \cos 2x \, dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{12}}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{6}$$

$$=a\times\frac{\pi}{12}\times 2$$

$$\therefore a=\frac{1}{4}\times\frac{12}{\pi}\times\frac{1}{2}$$

14. 매개변수 $t\,(t>0)$으로 나타내어진 함수

$$x=t-\frac{2}{t},\quad y=t^2+\frac{2}{t^2}$$

에서 $t=1$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은? [4점]

① $-\frac{2}{3}$　② -1　③ $-\frac{4}{3}$　④ $-\frac{5}{3}$　⑤ -2

[개념 & 계산]

$$\left.\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right|_{t=1}=\left.\frac{2t-\frac{4t}{t^4}}{1+\frac{2}{t^2}}\right|_{t=1}$$

$$=\frac{-2}{3}$$

15. 각 자리의 수가 0이 아닌 네 자리의 자연수 중 각 자리의 수의 합이 7인 모든 자연수의 개수는? [4점]

① 11 ② 14 ③ 17 ④ 20 ⑤ 23

[개념]

a b c d

$a+b+c+d=7$

>0

0 0 0 0 0 0 0

$_6C_3 = 20$

16. 직사각형 ABCD의 내부의 점 P가

$$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{CA}$$

를 만족시킨다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

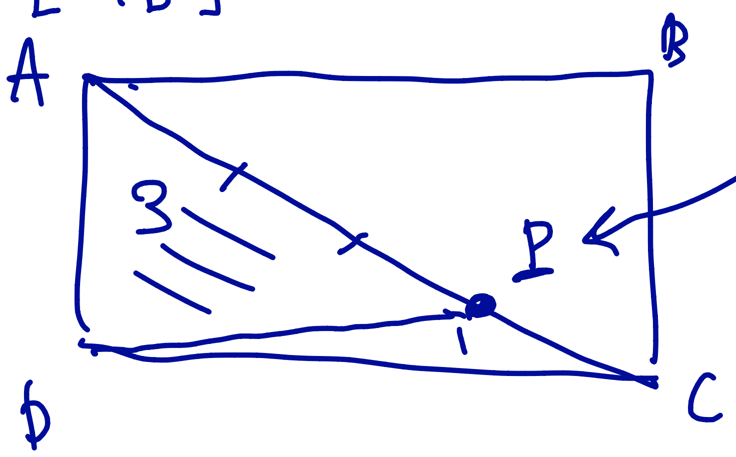
ㄱ. $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}=2\overrightarrow{CP}$

ㄴ. $\overrightarrow{AP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

ㄷ. 삼각형 ADP의 넓이가 3이면 직사각형 ABCD의 넓이는 8이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[개념]



ㄱ. 식에서 ok.

ㄴ. 식 변형

$$-\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AP}=-\overrightarrow{AC}$$

$$4\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$$

$$=3\overrightarrow{AC}$$

ㄷ. $(3+1)\times 2=8$

17. 1부터 n까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 n장의 카드가 있다. 이 카드 중에서 임의로 서로 다른 4장의 카드를 선택할 때, 선택한 카드 4장에 적힌 수 중 가장 큰 수를 확률변수 X라 하자. 다음은 $\mathrm{E}(X)$를 구하는 과정이다. (단, $n \geq 4$)

> 자연수 $k(4 \leq k \leq n)$에 대하여 확률변수 X의 값이 k일 확률은 1부터 $k-1$까지의 자연수가 적혀 있는 카드 중에서 서로 다른 3장의 카드와 k가 적혀 있는 카드를 선택하는 경우의 수를 전체 경우의 수로 나누는 것이므로
>
> $$\mathrm{P}(X=k)=\frac{\boxed{(가)}}{{}_n\mathrm{C}_4}$$
>
> $_{k-1}C_3$
>
> 이다. 자연수 $r(1 \leq r \leq k)$에 대하여
>
> $${}_k\mathrm{C}_r=\frac{k}{r}\times{}_{k-1}\mathrm{C}_{r-1}$$
>
> $\Rightarrow k\times {}_{k-1}C_{r-1}$
>
> $= r\cdot {}_kC_r$
>
> 이므로
>
> $$k\times\boxed{(가)}=4\times\boxed{(나)}$$
>
> ${}_kC_4$
>
> 이다. 그러므로
>
> $$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=\sum_{k=4}^{n}\{k\times\mathrm{P}(X=k)\}\\&=\frac{1}{{}_n\mathrm{C}_4}\sum_{k=4}^{n}\left(k\times\boxed{(가)}\right)\\&=\frac{4}{{}_n\mathrm{C}_4}\sum_{k=4}^{n}\boxed{(나)}\end{aligned}$$
>
> $= 4\times\frac{{}_{n+1}C_5}{{}_nC_4}$
>
> 이다.
>
> $$\sum_{k=4}^{n}\boxed{(나)}={}_{n+1}\mathrm{C}_5$$
>
> $= 4\times \frac{(n+1)\cdot \cancel{n}\cdot\cancel{(n-1)}\cdot\cancel{(n-2)}\cdot\cancel{(n-3)}}{\cancel{n}\cancel{(n-1)}\cancel{(n-2)}\cancel{(n-3)}}\cdot\frac{4!}{5!}$
>
> 이므로
>
> $$\mathrm{E}(X)=(n+1)\times\boxed{(다)}$$
>
> $\frac{4}{5}$
>
> 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 하고, (다)에 알맞은 수를 a라 할 때, $a\times f(6)\times g(5)$의 값은? [4점]

① 40 ② 45 ③ 50 ④ 55 ⑤ 60

[개념 & 계산]

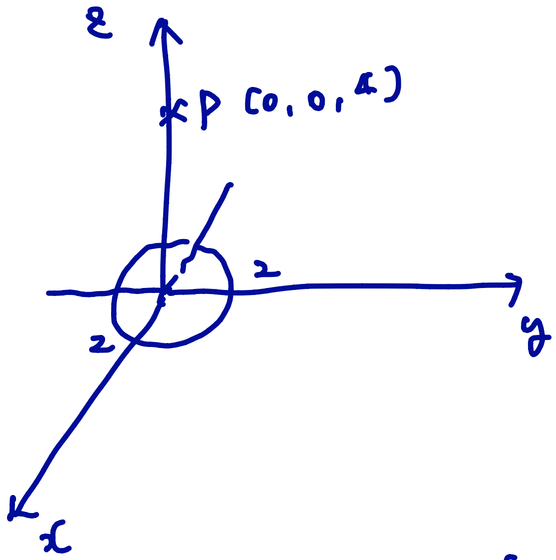
$\frac{4}{5}\times {}_5C_3 \times {}_5C_4$

10 5

18. 좌표공간에 점 $\mathrm{P}(0,\ 0,\ 4)$가 있고 xy평면 위의 원 $x^2+y^2=4$ 위에 두 점 A, B가 있다. 평면 ABP의 법선벡터가 $\vec{n}=(2,\ -2,\ 1)$일 때, 선분 AB의 길이는? [4점]

① $\sqrt{6}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{10}$ ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $\sqrt{14}$

[개념]

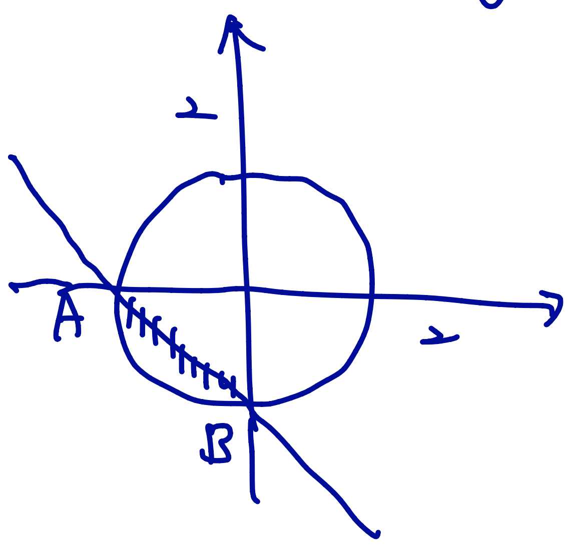


평면 ABP: $2x-2y+(z-4)=0$

xy평면

$2x-2y=4$

$x-y=2$

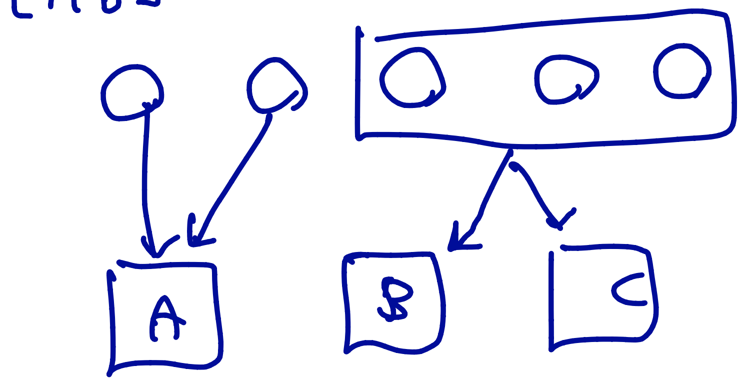


19. 서로 다른 과일 5개를 3개의 그릇 A, B, C에 남김없이 담으려고 할 때, 그릇 A에는 과일 2개만 담는 경우의 수는? (단, 과일을 하나도 담지 않은 그릇이 있을 수 있다.) [4점]

① 60 ② 65 ③ 70 ④ 75 ⑤ 80

[개념]

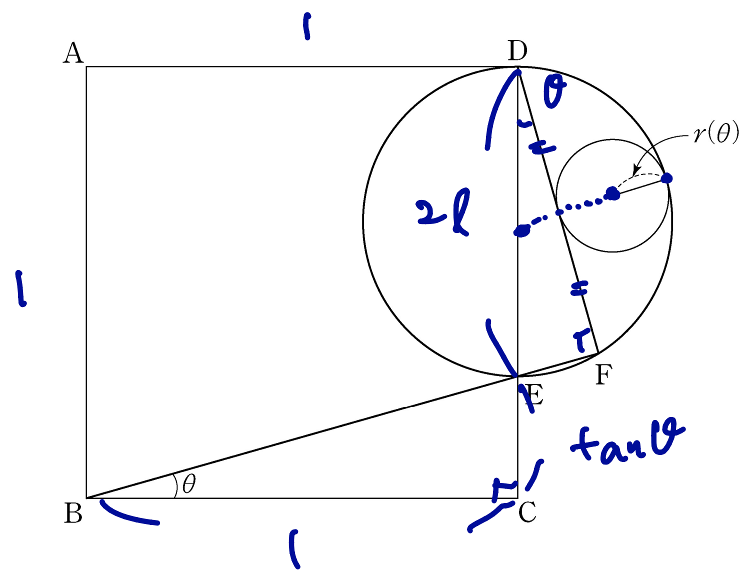
$2 \times 2 \times 2$



$_5C_2 \times 8$

20. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD가 있다. 변 CD 위의 점 E에 대하여 선분 DE를 지름으로 하는 원과 직선 BE가 만나는 점 중 E가 아닌 점을 F라 하자. $\angle EBC = \theta$라 할 때, 점 E를 포함하지 않는 호 DF를 이등분하는 점과 선분 DF의 중점을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$라 하자.

$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}-} \dfrac{r(\theta)}{\frac{\pi}{4} - \theta}$의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) [4점]



① $\frac{1}{7}(2-\sqrt{2})$ ② $\frac{1}{6}(2-\sqrt{2})$ ③ $\frac{1}{5}(2-\sqrt{2})$
④ $\frac{1}{4}(2-\sqrt{2})$ ⑤ $\frac{1}{3}(2-\sqrt{2})$

[개념]

$2r = l - l\cos\theta$

$2l + \tan\theta = 1 \rightarrow l = \dfrac{1-\tan\theta}{2}$

$r = \dfrac{l}{2}(1-\cos\theta)$

$= \dfrac{(1-t)(1-c)}{4}$

$\dfrac{r}{\frac{\pi}{4}-\theta} = \dfrac{(1-t)(1-c)}{\pi - 4\theta}$

$= \dfrac{-\sec^2(1-c) + (1-t)\cdot s}{-4}$

$= \dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$= \dfrac{1}{4}(2-\sqrt{2})$

21. 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 양의 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)' = x^2 e^{-x^2}$ $= A$

(나) $g(x) = \dfrac{4}{e^4}\displaystyle\int_1^x e^{t^2} f(t)\,dt$

$f(1) = \dfrac{1}{e}$일 때, $f(2) - g(2)$의 값은? [4점]

① $\dfrac{16}{3e^4}$ ② $\dfrac{6}{e^4}$ ③ $\dfrac{20}{3e^4}$ ④ $\dfrac{22}{3e^4}$ ⑤ $\dfrac{8}{e^4}$

[개념 & 발상]

(나) $\dfrac{4}{e^4}\displaystyle\int_1^x 2te^{t^2}\cdot\dfrac{f(t)}{2t}\,dt$

$= \dfrac{4}{e^4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\displaystyle\int_1^x 2te^{t^2}\cdot\dfrac{f(t)}{t}\,dt$

$= \dfrac{2}{e^4}\left\{\left[e^{t^2}\cdot\dfrac{f}{t}\right]_1^x - \displaystyle\int_1^x e^{t^2}\cdot A\,dt\right\}$

$= \dfrac{2}{e^4}\left\{\dfrac{e^{x^2}f}{x} - 1 - \displaystyle\int_1^x t^2\,dt\right\}$

$= \dfrac{2}{e^4}\left\{\dfrac{e^{x^2}f}{x} - 1 - \dfrac{1}{3}(x^3-1)\right\}$

$x=2$: $g(2) = f(2) - \dfrac{20}{3e^4}$

단답형

22. ${}_7C_2$의 값을 구하시오. [3점]

[계산] 21

23. 곡선 $y=\log_2(x+5)$의 점근선이 직선 $x=k$이다. k^2의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.) [3점]

[계산] 25

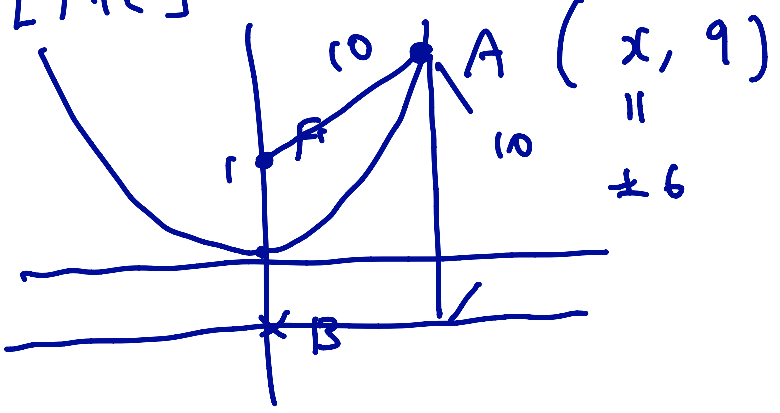
24. 흰 공 2개, 빨간 공 4개가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 2개의 공이 모두 흰 공일 확률이 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [3점]

[계산] $\frac{{}_2C_2}{{}_6C_2} = \frac{1}{15}$

16

25. 좌표평면에서 초점이 F인 포물선 $x^2=4y$ 위의 점 A가 $\overline{AF}=10$을 만족시킨다. 점 B$(0,\ -1)$에 대하여 $\overline{AB}=a$일 때, a^2의 값을 구하시오. [3점]

[계산]



$\overline{AB}^2 = x^2+10^2 = 136$

26. 함수 $f(x)=2x+\sin x$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(4\pi,\ 2\pi)$에서의 접선의 기울기는 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

[계산]

$f' = 2 + \cos x$

$f'(2\pi) = 2+1 = 3$

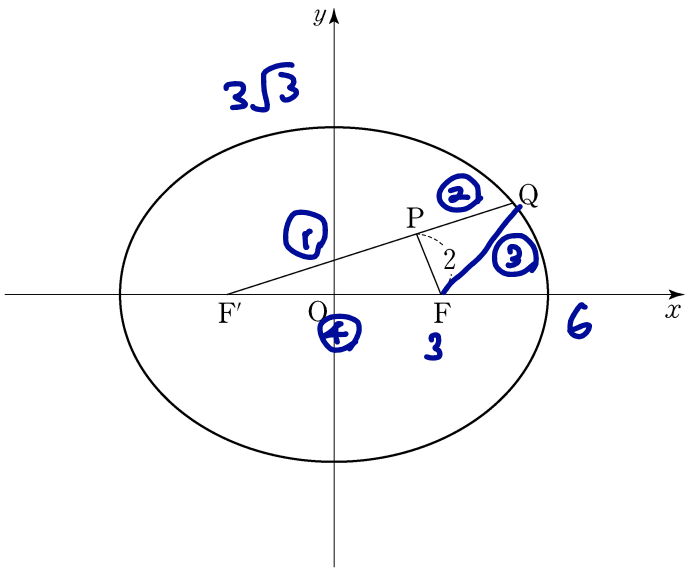
$\therefore \frac{1}{3}$

4

27. 그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$의 두 초점은 F, F′이고, 제1사분면에 있는 두 점 P, Q는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\overline{\mathrm{PF}}=2$
> (나) 점 Q는 직선 PF′과 타원의 교점이다.

삼각형 PFQ의 둘레의 길이와 삼각형 PF′F의 둘레의 길이의 합을 구하시오. [4점]



[개념]

$① + 2 + ④$

$+ ② + ③ + 2$

$= 4 + \underbrace{① + ② + ③}_{12} + ④$

$④ = 6$

22

28. 어느 고등학교에서 대중교통을 이용하여 등교하는 학생의 비율을 알아보기 위하여 이 고등학교 학생 중 n명을 임의추출하여 조사한 결과 50%의 학생이 대중교통을 이용하여 등교하는 것으로 나타났다. 이 결과를 이용하여 구한 이 고등학교 전체 학생 중에서 대중교통을 이용하여 등교하는 학생의 비율 p에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $a \le p \le b$이다. $b-a=0.14$일 때, n의 값을 구하시오. (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96)=0.95$로 계산한다.) [4점]

[개념]

$\hat{p} = \frac{1}{2}.$

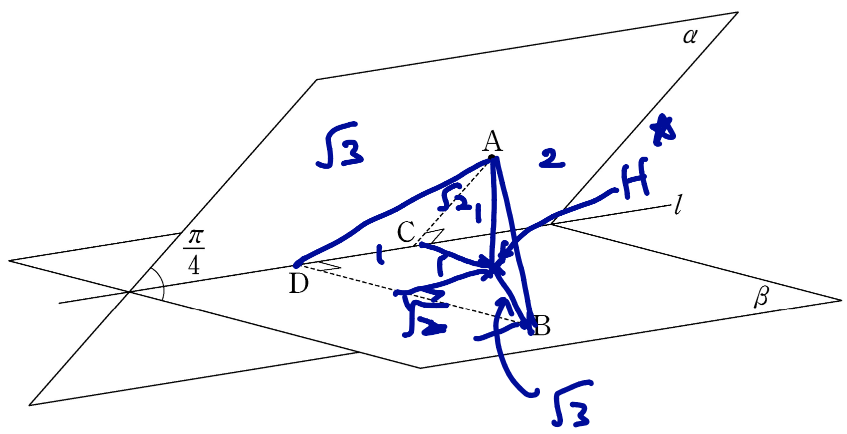
$2 \times 1.96 \times \frac{\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}}{\sqrt{n}} = 0.14$

$\frac{1.96}{\sqrt{n}} = \frac{14}{100}$

$196 = 14 \cdot \sqrt{n}$

$\therefore n = 14^2 = 196$

29. 그림과 같이 직선 l을 교선으로 하고 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$인 두 평면 α와 β가 있고, 평면 α 위의 점 A와 평면 β 위의 점 B가 있다. 두 점 A, B에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. $\overline{AB}=2$, $\overline{AD}=\sqrt{3}$이고 직선 AB와 평면 β가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{6}$일 때, 사면체 ABCD의 부피는 $a+b\sqrt{2}$이다. $36(a+b)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이다.) [4점]



[개념 & 발상]

$V = \frac{1}{3} \times S \times h$

$= \frac{1}{3} \times \triangle BCD \times \overline{AH}$

$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times (1+\sqrt{2}) \times 1 \times 1$

$= \frac{1}{6}(1+\sqrt{2})$

$36 \times \frac{1}{3} = 12$

30. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 함수

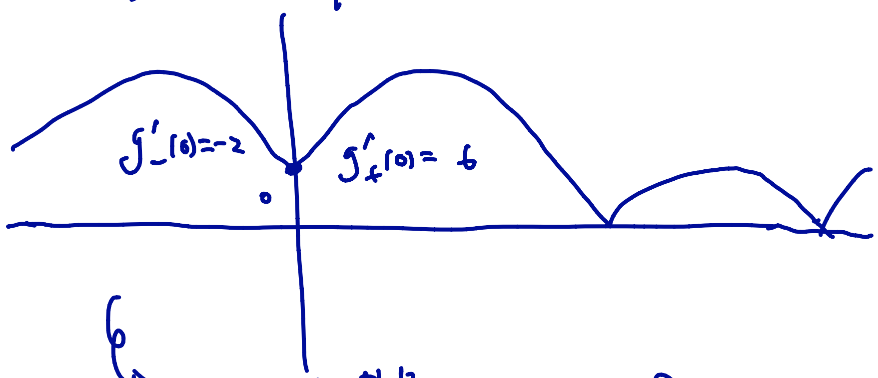
$$g(x)=\left|2\sin(x+2|x|)+1\right|$$

에 대하여 함수 $h(x)=f(g(x))$는 실수 전체의 집합에서 이계도함수 $h''(x)$를 갖고, $h''(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. $f'(3)$의 값을 구하시오. [4점]

[개념 & 발상]

g : $x \ge 0$: $|2\sin 3x+1|$

$x<0$: $|-2\sin x+1|$



$6 \to$ $x=0$: 미분 x

$g(x)=0$: 〃

> f가 해결

$h' = f'(g)\cdot g'$

① $x=0$: h'_+ : $f'(1^+)\cdot 6$

h'_- : $f'(1^+)\cdot(-2)$

$\therefore f'(1)=0$

② $g(x)=0$: x_n h'_+ : $f'(0^+)\cdot \alpha$

h'_- : $f'(0^+)\cdot(-\alpha)$

$\therefore f'(0)=0$

③ 이계도함수

$x=0$: h''_+ : $f''(1)\times 36$

h''_- : $f''(1)\times 4$

$\therefore f''(1)=0$

$\therefore f'(x)=4x(x-1)(x-k)$, $k=1$

$=4x(x-1)^2$

48

＊ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

2017 - 11

문과

제 2 교시

수학 영역(나 형)

홀수형

5지선다형

1. 8×2^{-2}의 값은? [2점] 고1

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 16

(계산, 5초)

2. 두 집합

$$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\},\quad B=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$$

에 대하여 $n(A\cup B)$의 값은? [2점] 고1

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

(계산, 5초)

3. $\log_{15}3+\log_{15}5$의 값은? [2점] 고1

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

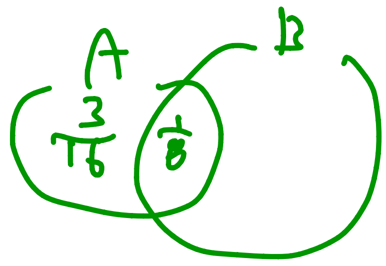
(계산, 5초)

4. 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{8},\quad \mathrm{P}(A\cap B^C)=\frac{3}{16}$$ 고2

일 때, $\mathrm{P}(A)$의 값은? (단, B^C은 B의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{3}{16}$ ② $\frac{7}{32}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{9}{32}$ ⑤ $\frac{5}{16}$



(계산, 10초)

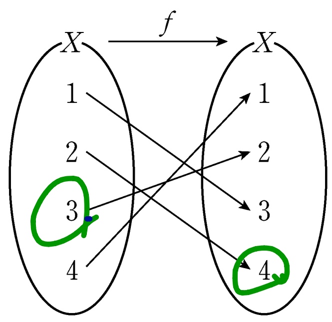
5. 세 수 $\frac{9}{4}$, a, 4가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, 양수 a의 값은? [3점] 고1

① $\frac{8}{3}$ ② 3 ③ $\frac{10}{3}$ ④ $\frac{11}{3}$ ⑤ 4

$a^2=9$

(계산, 5초)

6. 그림은 함수 $f: X \to X$를 나타낸 것이다.



$f(2)+f^{-1}(2)$의 값은? [3점] 고1

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

4+3

(계산, 10초)

7. 실수 x에 대한 두 조건

$p: |x-1| \le 3$,

$q: |x| \le a$ 2

에 대하여 p가 q이기 위한 충분조건이 되도록 하는 자연수 a의 최솟값은? [3점] 고1

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$-2 \le x \le 4$

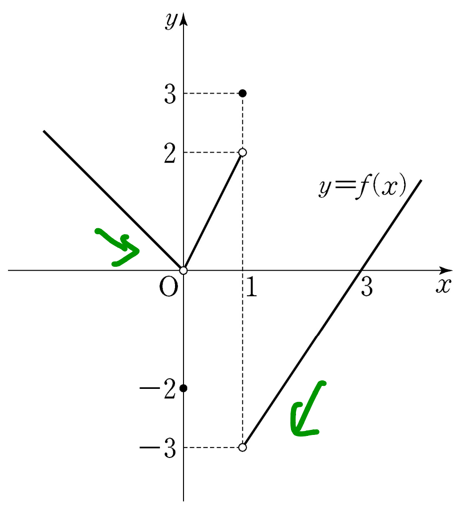
$\cap$

$-a \le x \le a$

$a \ge 4$

(계산, 10초)

8. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to 0-} f(x) + \lim_{x\to 1+} f(x)$의 값은? [3점] 고2

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

$0^+ + -3^+ = -3$

(계산, 개념, 10초)

9. $\int_0^2 (6x^2 - x)\,dx$의 값은? [3점] 고2

① 15 ② 14 ③ 13 ④ 12 ⑤ 11

$\left[2x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_0^2$

$16-2=14$

(계산, 10초)

10. 좌표평면에서 함수 $y=\frac{3}{x-5}+k$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭일 때, 상수 k의 값은? [3점] 고1

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

점근선의 교점이 $y=x$ 위에 있다

$K=5$

(개념, 5초)

11. 한 개의 주사위를 3번 던질 때, 4의 눈이 한 번만 나올 확률은? [3점] 중3

① $\frac{25}{72}$ ② $\frac{13}{36}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{7}{18}$ ⑤ $\frac{29}{72}$

$3C_1 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^2$

$3 \cdot \frac{25}{216}$

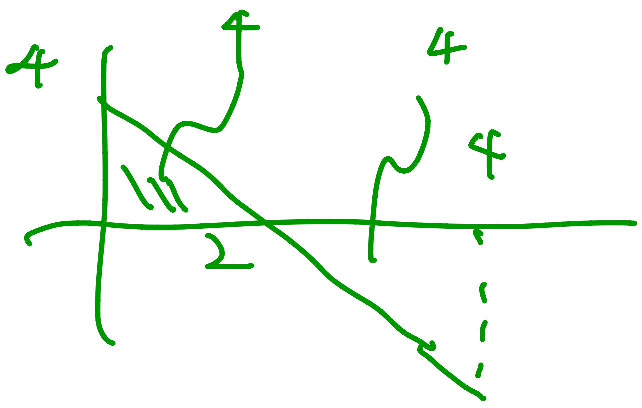
(계산, 10초)

12. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t) = -2t + 4$$

이다. $t=0$부터 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리는? [3점] 고3

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12



(그림, 개념, 10초)

13. 어느 학교의 전체 학생은 360명이고, 각 학생은 체험 학습 A, 체험 학습 B 중 하나를 선택하였다. 이 학교의 학생 중 체험 학습 A를 선택한 학생은 남학생 90명과 여학생 70명이다. 이 학교의 학생 중 임의로 뽑은 1명의 학생이 체험 학습 B를 선택한 학생일 때, 이 학생이 남학생일 확률은 $\frac{2}{5}$이다. 이 학교의 여학생의 수는? [3점]

중3

① 180 ② 185 ③ 190 ④ 195 ⑤ 200

	A	B
남	90	a
여	70	b

$a+b=200$

$\frac{a}{a+b}=\frac{2}{5}=\frac{a}{200}$

$\therefore a=80$

$b=120$

$\therefore 70+120=190$

(개념, 1분)

14. 두 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x+6 & (x<2) \\ 1 & (x \geq 2) \end{cases},$$

$$g(x)=ax+1$$

에 대하여 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은? [4점]

고2

① $-\frac{5}{4}$ ② -1 ③ $-\frac{3}{4}$ ④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ $-\frac{1}{4}$

$g(2)=0$

(개념, 1분)

$d>0$

15. 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_2의 값은? [4점]

고1

(가) $a_6+a_8=0$ (나) $\lvert a_6\rvert=\lvert a_7\rvert+3$

① -15 ② -13 ③ -11 ④ -9 ⑤ -7

(가) $2a_6+2d=0$

$\Rightarrow d=-a_6>0$

(나) $-a_6=|a_6+d|+3$

$=3$

$\therefore a_6=-3$

$d=3$

$a_2=-3-4\cdot 3$

$=-15$

(개념, 1분)

16. 어느 농가에서 생산하는 석류의 무게는 평균이 m, 표준편차가 40인 정규분포를 따른다고 한다. 이 농가에서 생산하는 석류 중에서 임의추출한, 크기가 64인 표본을 조사하였더니 석류 무게의 표본평균의 값이 $\overline{x}$이었다. 이 결과를 이용하여, 이 농가에서 생산하는 석류 무게의 평균 m에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간을 구하면 $\overline{x}-c\le m\le\overline{x}+c$이다. c의 값은? (단, 무게의 단위는 g이고, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 2.58)=0.495$로 계산한다.) [4점]

고2

① 25.8 ② 21.5 ③ 17.2 ④ 12.9 ⑤ 8.6

$N(m, 40^2)$

$n=64$

$c=2.58\cdot\frac{40}{8}$

$=2.58\times 5$

$=12.9$

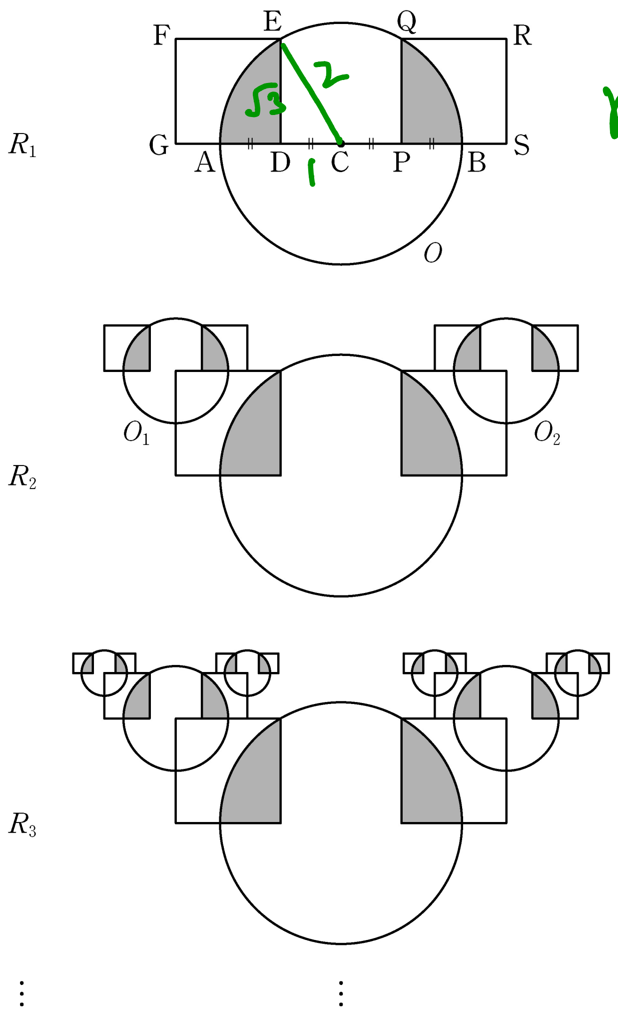
(개념, 1분)

17. 그림과 같이 길이가 4인 선분 AB를 지름으로 하는 원 O가 있다. 원의 중심을 C라 하고, 선분 AC의 중점과 선분 BC의 중점을 각각 D, P라 하자. 선분 AC의 수직이등분선과 선분 BC의 수직이등분선이 원 O의 위쪽 반원과 만나는 점을 각각 E, Q라 하자. 선분 DE를 한 변으로 하고 원 O와 점 A에서 만나며 선분 DF가 대각선인 정사각형 DEFG를 그리고, 선분 PQ를 한 변으로 하고 원 O와 점 B에서 만나며 선분 PR가 대각선인 정사각형 PQRS를 그린다. 원 O의 내부와 정사각형 DEFG의 내부의 공통부분인 ◿ 모양의 도형과 원 O의 내부와 정사각형 PQRS의 내부의 공통부분인 ◺ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 점 F를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}\overline{\mathrm{DE}}$인 원 O_1, 점 R를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}\overline{\mathrm{PQ}}$인 원 O_2를 그린다. 두 원 O_1, O_2에 각각 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 만들어지는 ◿ 모양의 2개의 도형과 ◺ 모양의 2개의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]

고2



$r_1 = 2$

$r_2 = 1$

① $\frac{12\pi-9\sqrt{3}}{10}$ ② $\frac{8\pi-6\sqrt{3}}{5}$ ③ $\frac{32\pi-24\sqrt{3}}{15}$

④ $\frac{28\pi-21\sqrt{3}}{10}$ ⑤ $\frac{16\pi-12\sqrt{3}}{5}$

$$\frac{2\times\left(\frac{1}{2}2^2\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2\times 2} = \frac{2\cdot\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{1-\frac{3}{8}}$$

$$= \frac{2(16\pi-12\sqrt{3})}{15}$$

(계산, 3분)

18. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)} = \frac{3}{5}$$

을 만족시킨다. 방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $|\alpha-\beta|$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

고2

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

① $f(a)\neq 0$: 1

$\therefore f(a)=0$

② $f=(x-a)(x-b)$

$$\lim_{x\to a}\frac{x-b-1}{x-b+1} = \frac{3}{5}$$

$5(a-b-1) = 3(a-b+1)$

$5(X-1) = 3(X+1)$

$2X = 8$

$\therefore X = 4$

(개념, 2분)

19. 좌표평면 위의 한 점 (x, y)에서 세 점 $(x+1, y)$, $(x, y+1)$, $(x+1, y+1)$ 중 한 점으로 이동하는 것을 점프라 하자.

가로: +4, 세로: +3

점프를 반복하여 점 $(0, 0)$에서 점 $(4, 3)$까지 이동하는 모든 경우 중에서, 임의로 한 경우를 선택할 때 나오는 점프의 횟수를 확률변수 X라 하자. 다음은 확률변수 X의 평균 $\mathrm{E}(X)$를 구하는 과정이다. (단, 각 경우가 선택되는 확률은 동일하다.)

> 점프를 반복하여 점 $(0, 0)$에서 점 $(4, 3)$까지 이동하는 모든 경우의 수를 N이라 하자. 확률변수 X가 가질 수 있는 값 중 가장 작은 값을 k라 하면 $k=$ $\boxed{\text{(가)}}$ 이고, 가장 큰 값은 $k+3$이다.
>
> 4
>
> $$\mathrm{P}(X=k)=\frac{1}{N}\times\frac{4!}{3!}=\frac{4}{N}$$
>
> $$\mathrm{P}(X=k+1)=\frac{1}{N}\times\frac{5!}{2!\,2!}=\frac{30}{N}$$
>
> $$\mathrm{P}(X=k+2)=\frac{1}{N}\times\boxed{\text{(나)}}$$
>
> $\frac{6!}{2!\,3!}$
>
> $$\mathrm{P}(X=k+3)=\frac{1}{N}\times\frac{7!}{3!\,4!}=\frac{35}{N}$$
>
> x+1: a
> y+1: b
> x+1 & y+1: c
>
> 이고
>
> $$\sum_{i=k}^{k+3}\mathrm{P}(X=i)=1$$
>
> a + c = 4
> b + c = 3
> a − b = 1
>
> a+b+c = k
> a+b+c = 6
> b = 2
> c = 1
> a = 3
>
> 이므로 $N=$ $\boxed{\text{(다)}}$ 이다.
>
> 따라서 확률변수 X의 평균 $\mathrm{E}(X)$는 다음과 같다.
>
> $$\mathrm{E}(X)=\sum_{i=k}^{k+3}\{i\times\mathrm{P}(X=i)\}=\frac{257}{43}$$

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 a, b, c라 할 때, $a+b+c$의 값은? [4점] 고2

① 190 ② 193 ③ 196 ④ 199 ⑤ 202

$$\frac{4}{N}+\frac{30}{N}+\frac{60}{N}+\frac{35}{N}=1$$

$N=129$

가: 4
나: 60
다: 129
193

(개념, 4분)

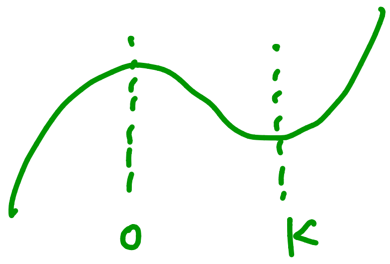
20. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값, $x=k$에서 극솟값을 가진다. (단, k는 상수이다.)
>
> (나) 1보다 큰 모든 실수 t에 대하여
>
> $$\int_0^t |f'(x)|\,dx = f(t)+f(0)$$
>
> 이다.

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점] 고3

> <보 기>
>
> ㄱ. $\displaystyle\int_0^k f'(x)\,dx<0$
>
> ㄴ. $0<k\le 1$
>
> ㄷ. 함수 $f(x)$의 극솟값은 0이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



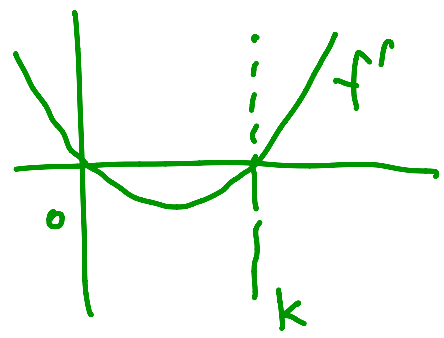
$f = ax^3 + \cdots$

$(a>0)$

(가) $f' = 3ax(x-k)$

(나) $\int_0^t f'(x)\,dx = f(t) - f(0)$ $(t>1)$

$\int_0^t |f'|\,dx = \int_0^k dx + \int_k^t dx$



$= f(0) - f(k) + f(t) - f(k)$

$= f(t) + f(0) - 2f(k)$

$= f(t) + f(0)$

$\therefore f(k) = 0$

ㄱ. ok (그림)

ㄴ. ok (나 조건)

ㄷ. ok

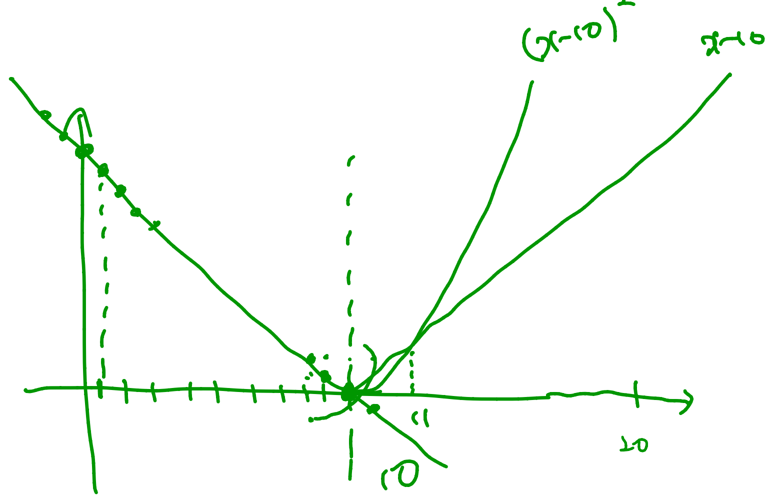
$y-10=(x-11)^2$

21. 좌표평면에서 함수

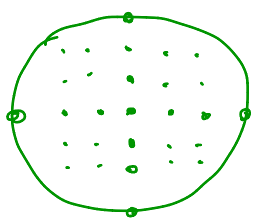
$$f(x)=\begin{cases}-x+10 & (x<10)\\ (x-10)^2 & (x\ge 10)\end{cases}$$

과 자연수 n에 대하여 점 $(n, f(n))$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 원 O_n이 있다. x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점 중에서 원 O_n의 내부에 있고 함수 $y=f(x)$의 그래프의 아랫부분에 있는 모든 점의 개수를 A_n, 원 O_n의 내부에 있고 함수 $y=f(x)$의 그래프의 윗부분에 있는 모든 점의 개수를 B_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{20}(A_n-B_n)$의 값은? [4점] 고1

① 19 ② 21 ③ 23 ④ 25 ⑤ 27



① $A_n+B_n+\underbrace{C_n}$ <25
f 그래프 상의 점



② $n=1\sim n=7$: $A_n=B_n$.

$n=8$: 직접 센다...

(뒤에 ...)

크게 그리자.

단답형

22. ${}_5\mathrm{P}_2+{}_5\mathrm{C}_2$의 값을 구하시오. [3점] 고2

20+10 = 30

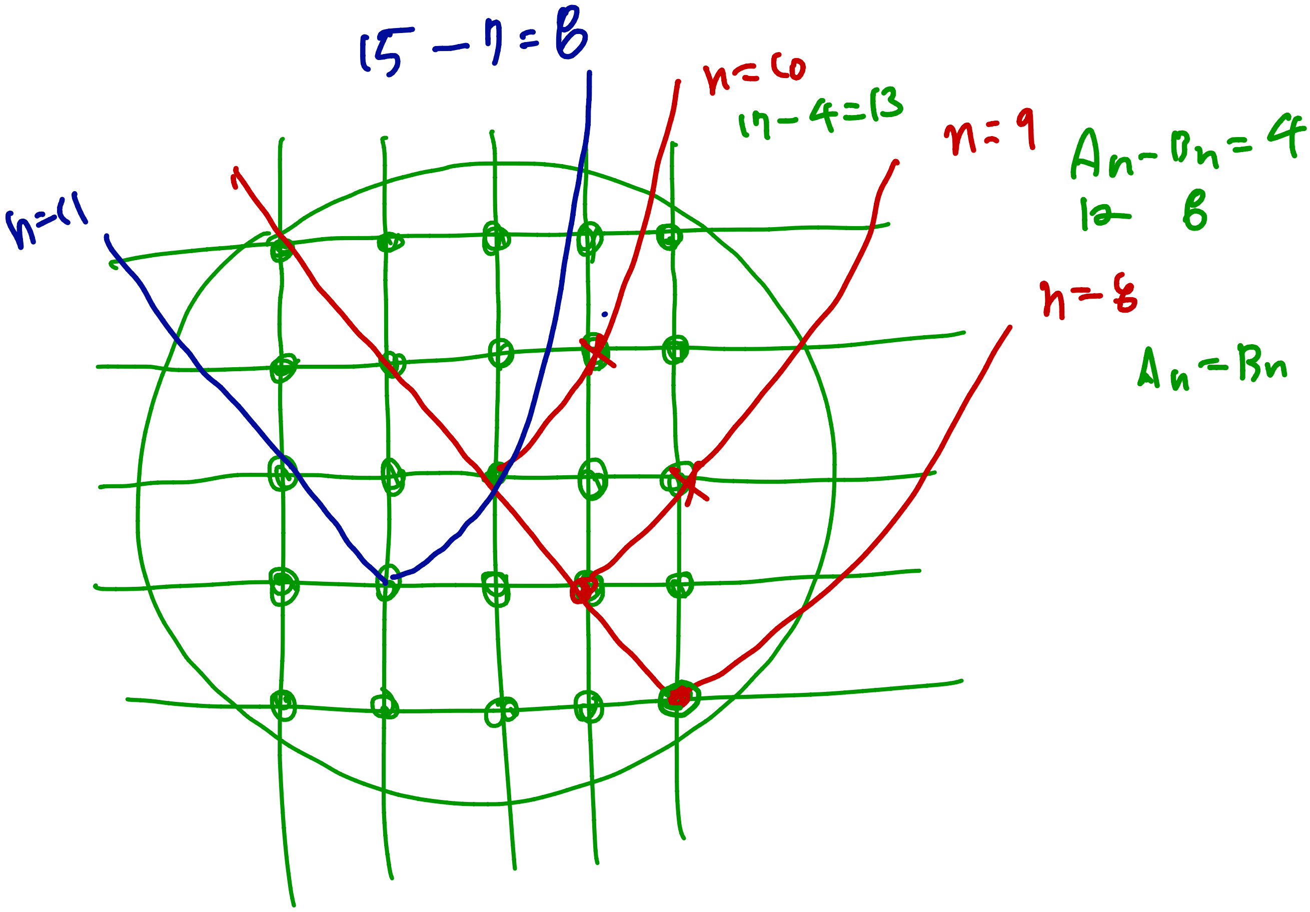
(계산, 10초)

23. 함수 $f(x)=x^3+3x^2+3$에 대하여 $f'(2)$의 값을 구하시오. [3점] 고2

$3x^2+6x$

12+12=24

(계산, 10초)



$n=12$: $A_n = B_n$

⋮

$n=20$

$\therefore\ 8+13+4 = 25$

(그림, 계산, 발상, 10분)

※ 시간 오래 써야 하는 문제

24. 전체집합 $U=\{x\,|\,x$는 9 이하의 자연수$\}$의 두 부분집합

$A=\{3, 6, 7\}$, $B=\{a-4, 8, 9\}$

에 대하여

$A\cap B^{C}=\{6, 7\}$

이다. 자연수 a의 값을 구하시오. [3점]

고1

$a=7$

(계산, 개념, 1분)

$\sum_{k=1}^{15}(k+2)=\frac{15\cdot 16}{2}+30=120+30=150$

25. 함수 $f(x)=\frac{1}{2}x+2$에 대하여 $\sum_{k=1}^{15}f(2k)$의 값을 구하시오. [3점]

고1

$\sum k+2$

$120+30=150$

(계산, 1분)

26. 곡선 $y=x^3-ax+b$ 위의 점 $(1, 1)$에서의 접선과 수직인 직선의 기울기가 $-\frac{1}{2}$이다. 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. [4점]

고2

$f'(1)=2=3-a$

$f(1)=1=1-a+b$

$\therefore a=1$, $b=1$ >2

(계산, 1분)

27. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 구하시오. [4점]

0 이상

중3

(가) $a+b+c=7$

(나) $2^a \times 4^b$은 8의 배수이다.

①

2^{a+2b} 는 8의 배수

$\therefore a+2b \geq 3$ c

6 (0 : 2, 3, 4, 5, 6, 7 / 5, 4, 3, 2, 1, 0

6 (1 : 1, 2, 3, 4, 5, 6 / 5, 4, 3, 2, 1, 0

5 (2 : 1, 2, 3, 4, 5 / 4, 3, 2, 0

5 (3 : 0, 1, 2, 3, 4

4 (4 : 0, 1, 2, 3

3 (5 : 0, 1, 2

2 (6 : 0, 1

1 (7 : 0

$6+6+5+5+4+3+2+1$

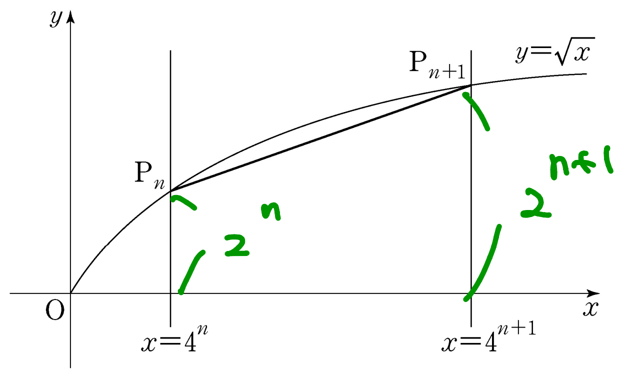
$=32$

(계산, 개념, 4분)

28. 자연수 n에 대하여 직선 $x=4^n$이 곡선 $y=\sqrt{x}$와 만나는 점을 P_n이라 하자. 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$의 길이를 L_n이라 할 때,

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{L_{n+1}}{L_n}\right)^2$ 의 값을 구하시오. [4점]

고2



$L_n^2 = (4^{n+1}-4^n)^2 + (2^{n+1}-2^n)^2$

$$\frac{(4^{n+2}-\cancel{4^{n+1}})^2 + (\cancel{2^{n+2}}-\cancel{2^{n+1}})^2}{(4^{n+1}-\cancel{4^n})^2 + (\cancel{2^{n+1}}-\cancel{2^n})^2}$$

$\Downarrow$

$$\frac{4^{2n+4}}{4^{2n+2}} = 16$$

(계산, 3분)

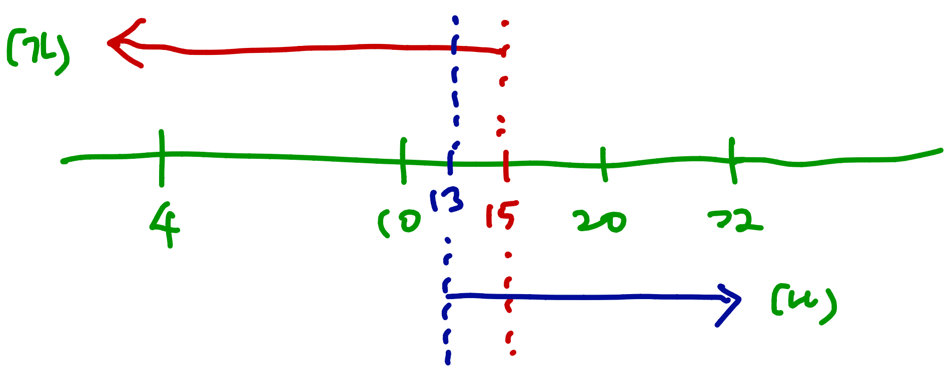
$N(m, 5^2)$

29. 확률변수 X는 평균이 m, 표준편차가 5인 정규분포를 따르고, 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(10) > f(20)$
> (나) $f(4) < f(22)$

m이 자연수일 때 $\mathrm{P}(17 \le X \le 18) = a$이다. $1000a$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하시오. [4점] 고2

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.6	0.226
0.8	0.288
1.0	0.341
1.2	0.385
1.4	0.419



$13 < m < 15$

$\therefore m = 14$

$P(17 \le X \le 18)$
$=$
$P(0.6 \le Z \le 0.8)$
$=$
0.062

$\times 1000$

$\boxed{62}$

(발상, 2분)

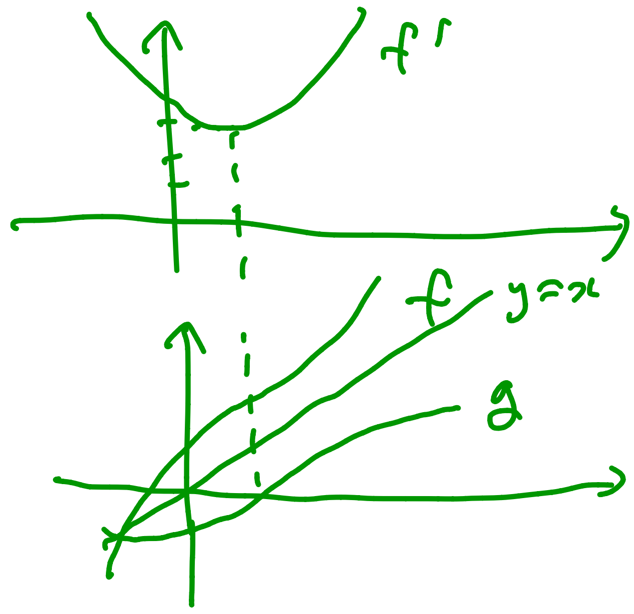
30. 실수 k에 대하여 함수 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x + k$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 방정식 $4f'(x) + 12x - 18 = (f' \circ g)(x)$가 닫힌 구간 $\boxed{[0, 1]}$에서 실근을 갖기 위한 k의 최솟값을 m, 최댓값을 M이라 할 때, $m^2 + M^2$의 값을 구하시오. [4점] 고3

①

$f' = 3x^2 - 6x + 6$

$= 3(x^2 - 2x + 2)$

$= 3(x-1)^2 + 3$



②

$4f' + 12x - 18 = f'(g(x))$

$=$

$12x^2 - 24x + 24$
$-12x - 18$

$=$

$12x^2 - 36x + 6$

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

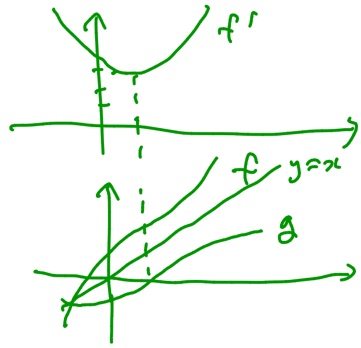
$f = x^3 - 3x^2 + 6x + k$

①

$f' = 3x^2 - 6x + 6$

$= 3(x^2 - 2x + 2)$

$= 3(x-1)^2 + 3$



②

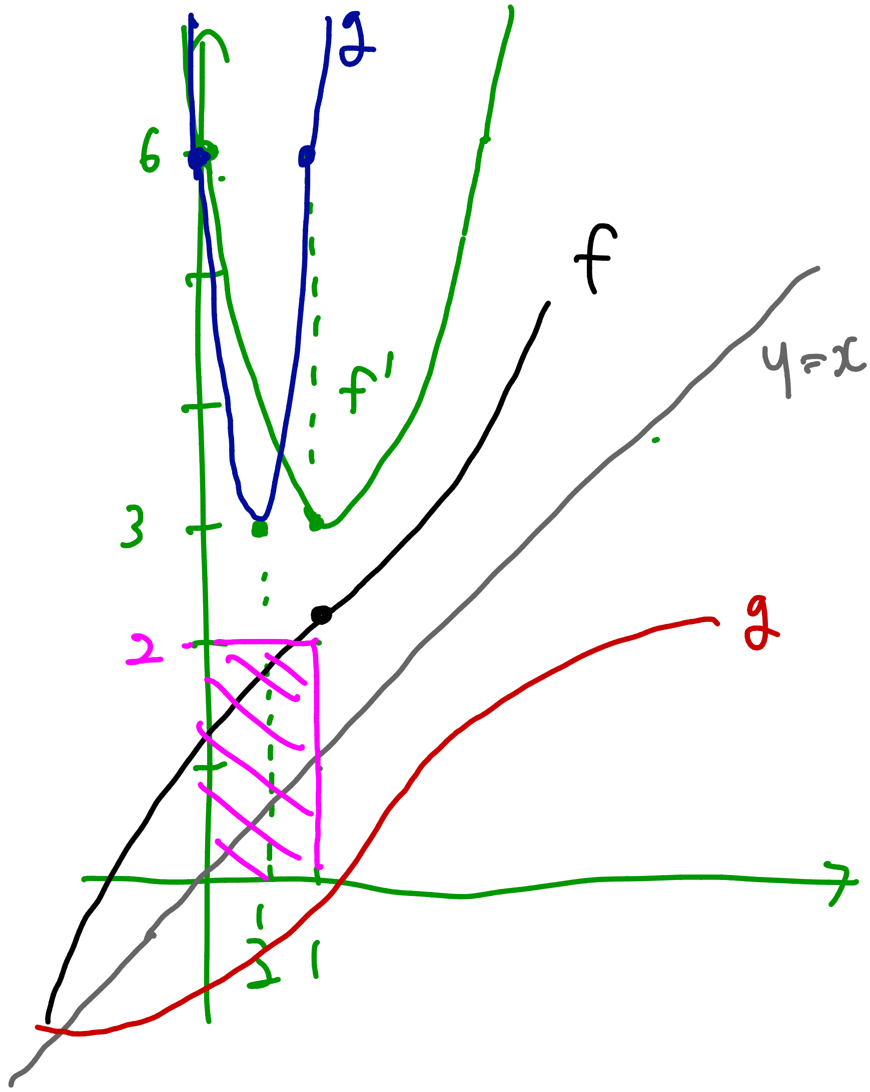
$4f' + 12x - 18 = f'(g(x))$

$4f' + 12x - 18 = 12x^2 - 24x + 24 + 12x - 18$

$= 12x^2 - 12x + 6$

$= 12(x - \frac{1}{2})^2 + 3$

$= g(x)$



③ $[0,1]$ 에서 $g(x)$

$[0, \frac{1}{2}] \to [6, 3]$

$[\frac{1}{2}, 1] \to [3, 6]$

$\Rightarrow$ $3 \le f'(g(x)) \le 6$ 인 x가 $[0,1]$ 에 있으면 됨.

④

$3 \le f'(T) \le 6$

$3 \le 3T^2 - 6T + 6 \le 6$

$3T^2 - 6T + 3 \ge 0$

$T^2 - 2T + 3 \ge 0$

$(T-1)^2 + 1 \ge 0$

항상 ok

$T^2 - 2T \le 0$

$T(T-2) \le 0$

$0 \le T \le 2$

⑤ $[0,1]$ 에서 $0 \le g(x) \le 2$ 인 x가 있으면 됨.

$\Rightarrow$  a 겹치면 됨

$\Rightarrow$ $(1,0)$, $(0,2)$ 가 경계

⑥ g가 $(1,0)$ 지남 $\Rightarrow$ f가 $(0,1)$ 지남

$\Rightarrow$ $k=1$

g가 $(0,2)$ 지남 $\Rightarrow$ f가 $(2,0)$ 지남

$\Rightarrow$ $k=-8$

$\therefore 1^2 + (-8)^2 = 65$

(그림, 개념, 5~10분)

2017 - 9

문과

제 2 교시

수학 영역(나 형)

5지선다형

1. $6\times 8^{\frac{1}{3}}$ 의 값은? [2점]

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

[계산]
6 × 2

2. 두 집합

$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $B=\{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$

에 대하여 $n(A\cap B)$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[계산]

3. $\lim_{n\to\infty}\frac{8n^2+1}{3n^2-2}$ 의 값은? [2점]

① 2 ② $\frac{8}{3}$ ③ $\frac{10}{3}$ ④ 4 ⑤ $\frac{14}{3}$

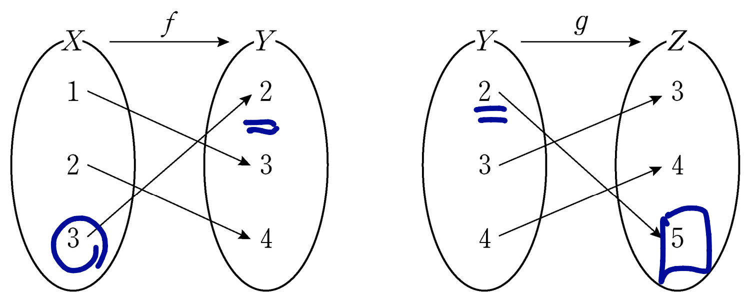
[계산]

4. $\log_3 6-\log_3 2$ 의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[계산]
$l_3 \frac{6}{2}$

5. 그림은 두 함수 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$를 나타낸 것이다.



$(g \circ f)(3)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[계산]

$g(f(3))$

6. 첫째항이 1이고 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\frac{a_7}{a_5} = 4 \quad = r^2 \quad = (\pm 2)^2$$

일 때, a_4의 값은? [3점]

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

[계산]

7. 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) = \frac{7}{9}, \quad \mathrm{P}(A \cap B) = \frac{2}{9}$$

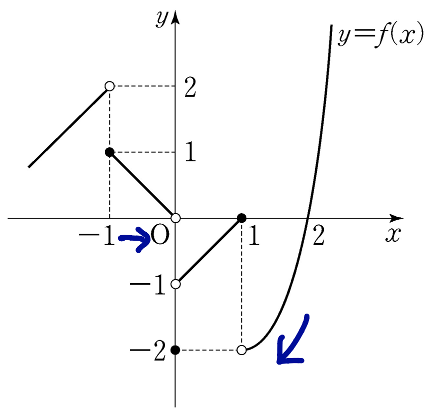
일 때, $\mathrm{P}(A \cup B)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{7}{18}$ ③ $\frac{4}{9}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{9}$

[계산]

$$\frac{7}{9} - \frac{2}{9}$$

8. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim\limits_{x\to0-}f(x)+\lim\limits_{x\to1+}f(x)$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

[계산]

0^{+} + $(-2)^{+}$

9. 수열 $\{a_n\}$이

$$\sum_{k=1}^{7}a_k=\sum_{k=1}^{6}(a_k+1)$$

을 만족시킬 때, a_7의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

[계산]

10. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to2}\frac{(x^2-4)f(x)}{x-2}=12$$

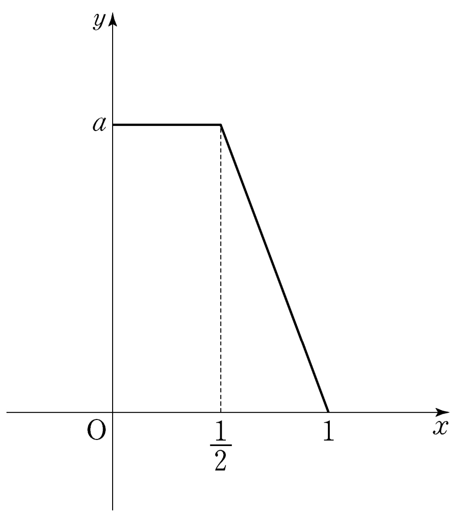
를 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[계산]

$4\cdot f(2)=12$

11. 연속확률변수 X가 갖는 값의 범위는 $0 \le X \le 1$이고, X의 확률밀도함수의 그래프는 그림과 같다.



상수 a의 값은? [3점]

① $\frac{10}{9}$ ② $\frac{11}{9}$ ③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{13}{9}$ ⑤ $\frac{14}{9}$

[계산]

$\frac{1}{2} \times (1 + \frac{1}{2}) \times a = 1$

12. 정수 x에 대한 조건

$p : x(x-11) \ge 0$

에 대하여 조건 $\sim p$의 진리집합의 원소의 개수는? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

[계산]

$x(x-11) < 0$

$1 \sim 10$

13. 어느 학급 학생 20명을 대상으로 과목 A와 과목 B에 대한 선호도를 조사하였다. 이 조사에 참여한 학생은 과목 A와 과목 B 중 하나를 선택하였고, 각 학생이 선택한 과목별 인원수는 다음과 같다.

(단위: 명)

구분	과목 A	과목 B	합계
남학생	3	7	10
여학생	5	5	10
합계	8	12	20

이 조사에 참여한 학생 중에서 임의로 선택한 1명이 남학생일 때, 이 학생이 과목 B를 선택한 학생일 확률은? [3점]

① $\frac{13}{20}$ ② $\frac{7}{10}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{17}{20}$

[계산]

14. 첫째항이 4이고 공차가 1인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{12} \frac{1}{\sqrt{a_{k+1}}+\sqrt{a_k}} = \frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{d}$$

의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[계산]

$\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}$

$\sqrt{a_3} - \sqrt{a_2}$

$\vdots$

$\sqrt{a_{13}} - \sqrt{a_{12}}$

$\sqrt{a_{13}} - \sqrt{a_1}$

$= \sqrt{16} - \sqrt{4}$

15. 어느 공항에서 처리되는 각 수하물의 무게는 평균이 18kg, 표준편차가 2kg인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공항에서 처리되는 수하물 중에서 임의로 한 개를 선택할 때, 이 수하물의 무게가 16kg 이상이고 22kg 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

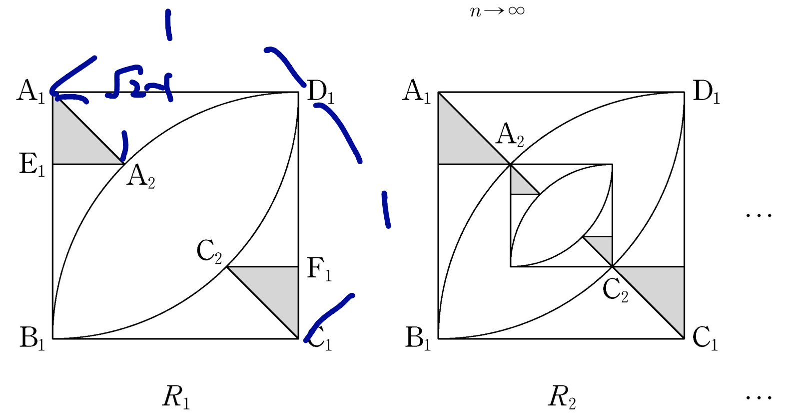
① 0.5328 ② 0.6247 ③ 0.7745
④ 0.8185 ⑤ 0.9104

[계산]

$16 \le X \le 22$

$-1 \le Z \le 2$

16. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 안에 꼭짓점 A_1, C_1을 중심으로 하고 선분 A_1B_1, C_1D_1을 반지름으로 하는 사분원을 각각 그린다. 선분 A_1C_1이 두 사분원과 만나는 점 중 점 A_1과 가까운 점을 A_2, 점 C_1과 가까운 점을 C_2라 하자. 선분 A_1D_1에 평행하고 점 A_2를 지나는 직선이 선분 A_1B_1과 만나는 점을 E_1, 선분 B_1C_1에 평행하고 점 C_2를 지나는 직선이 선분 C_1D_1과 만나는 점을 F_1이라 하자. 삼각형 $A_1E_1A_2$와 삼각형 $C_1F_1C_2$를 그린 후 두 삼각형의 내부에 속하는 영역을 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에 선분 A_2C_2를 대각선으로 하는 정사각형을 그리고, 새로 그려진 정사각형 안에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 두 개의 사분원과 두 개의 삼각형을 그리고 두 삼각형의 내부에 속하는 영역을 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



① $\frac{1}{12}(\sqrt{2}-1)$ ② $\frac{1}{6}(\sqrt{2}-1)$ ③ $\frac{1}{4}(\sqrt{2}-1)$
④ $\frac{1}{3}(\sqrt{2}-1)$ ⑤ $\frac{5}{12}(\sqrt{2}-1)$

[계산]

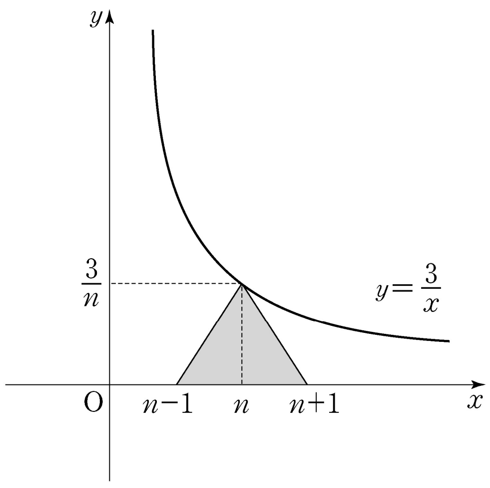
$$\frac{(\sqrt{2}-1)^2 \times \frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1-(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}}\right)^2}$$ 대각선 비교

$$= \frac{(\sqrt{2}-1)^2 \times \frac{1}{2}}{1-(\sqrt{2}-1)^2}$$

$$= \frac{(\sqrt{2}-1)^2 \times \frac{1}{2}}{2\sqrt{2}-2} = \frac{1}{4}(\sqrt{2}-1)$$

17. 자연수 n에 대하여 곡선 $y=\frac{3}{x}\,(x>0)$ 위의 점 $\left(n,\ \frac{3}{n}\right)$과 두 점 $(n-1,\ 0)$, $(n+1,\ 0)$을 세 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10}\frac{9}{a_n a_{n+1}}$의 값은? [4점]

① 410 ② 420 ③ 430 ④ 440 ⑤ 450



[계산]

$a_n = \frac{3}{n}$

$\frac{9}{\frac{3}{n}\cdot\frac{3}{n+1}} = n(n+1)$

$\sum_{n=1}^{10} n(n+1)$

$= \frac{10\cdot 11\cdot 12}{3}$

18. 1부터 n까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 n장의 카드가 있다. 이 카드 중에서 임의로 서로 다른 4장의 카드를 선택할 때, 선택한 카드 4장에 적힌 수 중 가장 큰 수를 확률변수 X라 하자. 다음은 $\mathrm{E}(X)$를 구하는 과정이다. (단, $n\geq 4$)

자연수 $k\,(4\leq k\leq n)$에 대하여 확률변수 X의 값이 k일 확률은 1부터 $k-1$까지의 자연수가 적혀 있는 카드 중에서 서로 다른 3장의 카드와 k가 적혀 있는 카드를 선택하는 경우의 수를 전체 경우의 수로 나누는 것이므로

$\mathrm{P}(X=k)=\dfrac{\boxed{(가)}}{{}_n\mathrm{C}_4}$ ← ${}_{k-1}C_3$

이다. 자연수 $r\,(1\leq r\leq k)$에 대하여

$${}_k\mathrm{C}_r=\frac{k}{r}\times{}_{k-1}\mathrm{C}_{r-1}$$

⇒ $k\times {}_{k-1}C_{r-1}$ $= r\cdot {}_kC_r$

이므로

$k\times\boxed{(가)}=4\times\boxed{(나)}$ ${}_kC_4$

이다. 그러므로

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=\sum_{k=4}^{n}\{k\times\mathrm{P}(X=k)\}\\&=\frac{1}{{}_n\mathrm{C}_4}\sum_{k=4}^{n}\left(k\times\boxed{(가)}\right)\\&=\frac{4}{{}_n\mathrm{C}_4}\sum_{k=4}^{n}\boxed{(나)}\end{aligned}$$

이다.

$$\sum_{k=4}^{n}\boxed{(나)}={}_{n+1}\mathrm{C}_5$$

이므로

$\mathrm{E}(X)=(n+1)\times\boxed{(다)}$

이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 하고, (다)에 알맞은 수를 a라 할 때, $a\times f(6)\times g(5)$의 값은? [4점]

① 40 ② 45 ③ 50 ④ 55 ⑤ 60

$= 4\times\frac{{}_{n+1}C_5}{{}_nC_4}$

$= 4\times\frac{(n+1)\cdot \cancel{n}\cdot \cancel{(n-1)}\cdot \cancel{(n-2)}\cdot \cancel{(n-3)}}{\cancel{n}\,\cancel{(n-1)}\,\cancel{(n-2)}\,\cancel{(n-3)}}\cdot\frac{4!}{5!}$

$\frac{4}{5}$ a

$\frac{4}{5}\times{}_5C_3\times{}_5C_4$

10 5

19. 각 자리의 수가 0이 아닌 네 자리의 자연수 중 각 자리의 수의 합이 7인 모든 자연수의 개수는? [4점]

① 11 ② 14 ③ 17 ④ 20 ⑤ 23

[개념]

a b c d

$a+b+c+d=7$

>0

0˅0˅0˅0˅0˅0˅0

${}_6C_3 = 20$

20. 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

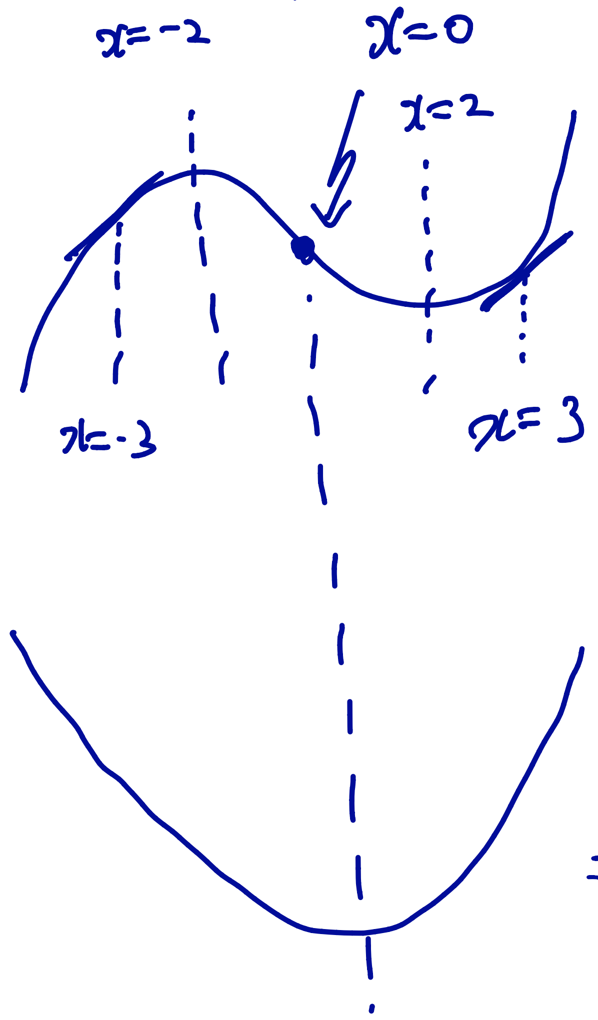
(가) $x=-2$에서 극댓값을 갖는다. (나) $f'(-3)=f'(3)$

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 도함수 $f'(x)$는 $x=0$에서 최솟값을 갖는다.
ㄴ. 방정식 $f(x)=f(2)$는 서로 다른 두 실근을 갖는다.
ㄷ. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1,\ f(-1))$에서의 접선은 점 $(2,\ f(2))$를 지난다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



f

$f = \frac{1}{3}ax^3 - 4ax + b$

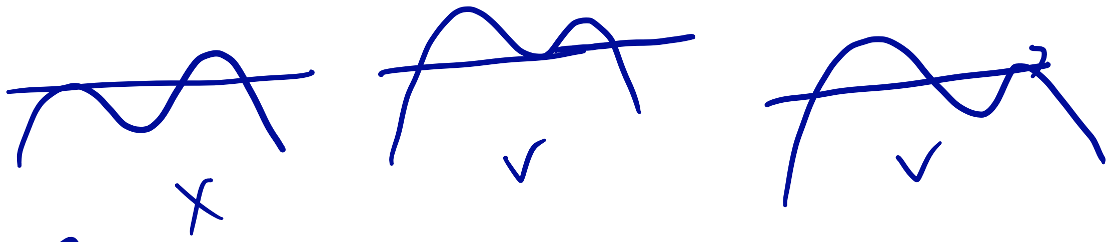
f'

$= a(x+2)(x-2)$
$= a(x^2-4)$

ㄷ. $f'(-1) = a(1)\cdot(-3) = -3a$

∴ 접선: $y = -3a(x+1) + (-\frac{1}{3}a + 4a + b)$

$(2,\ f(2))$: OK

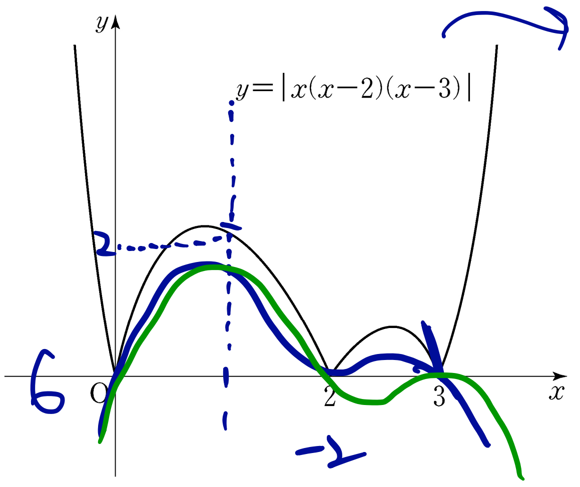


min (k)

21. 다음 조건을 만족시키며 최고차항의 계수가 음수인 모든 사차함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)$의 최댓값은? [4점]

(가) 방정식 $f(x)=0$의 실근은 0, 2, 3뿐이다.
(나) 실수 x에 대하여 $f(x)$와 $|x(x-2)(x-3)|$ 중 크지 않은 값을 $g(x)$라 할 때, 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$



f Lv: $f(0) = f(2) = f(3)$
$f(x) = k(x-0)(x-2)(x-3)$

f′ Lv: $f'(0) \le h'(0)$:
$f'(3) \ge h'(3)$:

$-\frac{1}{2}\cdot x(x-2)^2(x-3)$
$x=1: \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot 2 = 1$

[case I] $f = k(x-0)(x-2)^2(x-3)$
$f' = k(x-2)^2(x-3) + 2kx(x-2)(x-3) + kx(x-2)^2$
$= k(x-2)\{x^2-5x+6 + 2x^2-6x + x^2-2x\}$
$= k(x-2)\{4x^2-13x+6\}$
$f'(0) = -2k\cdot 6 = 6$
$\therefore k = -\frac{1}{2}$

[case II] $f = k(x-0)(x-2)(x-3)^2$
$f' = k(x-3)\{x^2-5x+6 + x^2-3x + 2x^2-4x\}$
$4x^2-12x+6$
$f'(0) = -3k\cdot 6 \le 6$: $k = -\frac{1}{3}$
$f'(2) = \ldots$
$\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 4$

단답형

22. ${}_7C_2$의 값을 구하시오. [3점]

$\frac{7\cdot 6}{2\cdot 1} = 21$

$x(x-2)(x-3)$
$x^2-5x+6 + x^2-3x + x^2-2x$
$3x^2-10x+6$
$12-20+6$

23. $\int_0^3 (x^2-4x+11)\,dx$의 값을 구하시오. [3점]

$\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 11x \Big|_0^3$
$9-18+33$
24

24. 함수 $f(x)=2x-13$에 대하여 $f^{-1}(7)$의 값을 구하시오. [3점]

10

25. 함수

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+1 & (x<1) \\ x^4+a & (x \geq 1) \end{cases}$$

이 $x=1$에서 미분가능할 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

$2a=4$

2

26. 흰 공 2개, 빨간 공 4개가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 2개의 공이 모두 흰 공일 확률이 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

OO
XX
XX

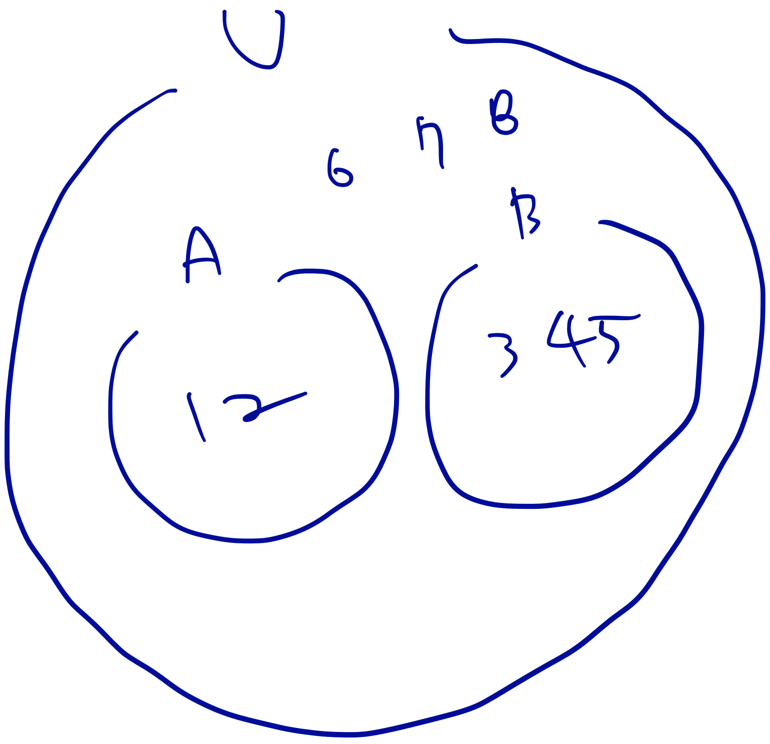
$\frac{{}_2C_2}{{}_6C_2}=\frac{1}{15}$

16

27. 전체집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$의 두 부분집합 $A=\{1,\ 2\}$, $B=\{3,\ 4,\ 5\}$에 대하여

$$X\cup A=X, \quad X\cap B^C=X$$

를 만족시키는 U의 모든 부분집합 X의 개수를 구하시오. [4점]



$A \subset X \subset B^c$

$1\times1\times 2\times2\times2 = 8$

28. 함수 $f(x)=4x^2+6x+32$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

의 값을 구하시오. [4점]

$\int_0^1 x f(x)\,dx$

$4x^3+6x^2+32x$

$x^4+2x^3+16x^2$

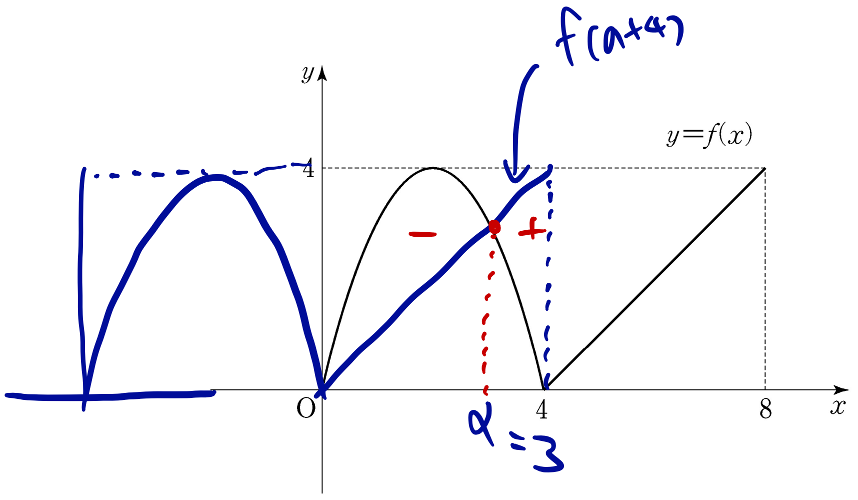
19

min{g(a)}   Max(n)

29. 구간 $[0,\ 8]$에서 정의된 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} -x(x-4) & (0\le x<4) \\ x-4 & (4\le x\le 8)\end{cases}$$

이다. 실수 $a\,(0\le a\le 4)$에 대하여 $\int_a^{a+4} f(x)\,dx$의 최솟값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



$g(a)=\int_a^{a+4} f(x)\,dx$

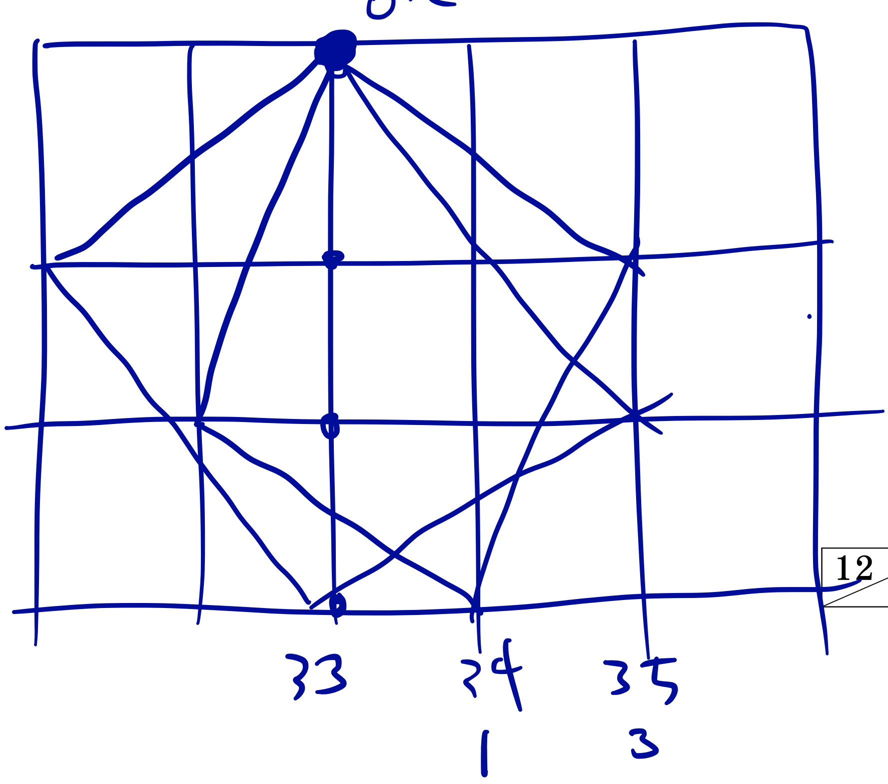
$= F(a+4)-F(a)$

$g'(a)=f(a+4)-f(a)$

$-x(x-4)=x$

$\int_3^7 f\,dx=\frac{37}{6}$

정가운데



30. 좌표평면에서 자연수 n에 대하여 영역

$$\left\{(x,\ y)\ \middle|\ 0\le x\le n,\ 0\le y\le \frac{\sqrt{x+3}}{2}\right\}$$

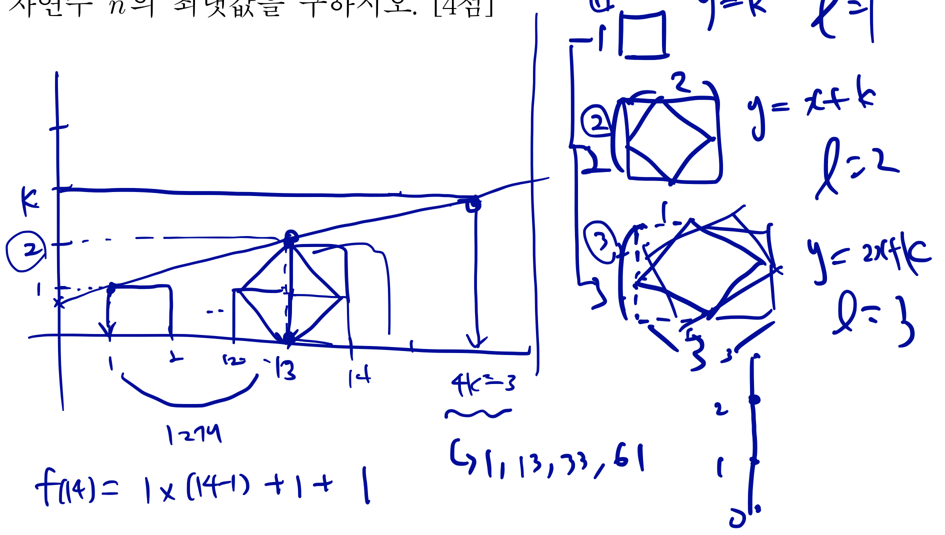
에 포함되는 정사각형 중에서 다음 조건을 만족시키는 모든 정사각형의 개수를 $f(n)$이라 하자.

$\sqrt{x+3}=2n$, $x+3=4n^2$, $x=4n^2-3$

(가) 각 꼭짓점의 x좌표, y좌표가 모두 정수이다. (나) 한 변의 길이가 $\sqrt{5}$ 이하이다.

$\sqrt{1^2+2^2}$

예를 들어 $f(14)=15$이다. $f(n)\le 400$을 만족시키는 자연수 n의 최댓값을 구하시오. [4점]



$f(14)=1\times(14-1)+1+1$

$f(n)=\begin{cases} l=1 : (n-1)+(n-13)+\cdots \\ l=2 : (n-13)+\cdots+(n-14) \\ l=3 : 2\times(n-33)+\cdots \to 2(n-34)+1 \end{cases}$

check
$n=33$: $32+20+20+19=91$ 389, 400

check
$n=61$

$\begin{cases} 60+48+28=136 \\ 48+28=76 \\ 47+27=74 \\ 2(61-34)+1=55 \end{cases}$ 286, 150, 341, 400, 59

$n\ge 61$

$+1: \begin{cases} 4k \\ 3k+7k \\ 2k \end{cases}$ $12k \le 59$

$\therefore k=4$

65

※ 확인 사항 ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.